საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

მალხაზ ბიბილური

სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა გამოყენება ნეიტრონული დასხივების თეორიიდან წარმოქმნილ ზოგიერთ მათემატიკურ ამოცანაში

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“, შიფრი 0501

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

თბილისი, 0175, საქართველო

14 ივლისი, 2015 წელი

თბილისი
2015 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი
კომპიუტერული ინჟინერიის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: პროფ. დ. შულაია
ასოც. პროფ. დ. გულუა

რეცენზენტები: --

დაცვა შედგება ---------- წლის ”------” ----------------, --------- საათზე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის -----------------------
----------------------------------- ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის
სხდომაზე, კორპუსი ----------------, აუდიტორია ------------
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ინფორმატიკის და მართვის ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით მალხაზ ბიბილურის მიერ შესრულებულ სადოქტორო ნაშრომს დასახელებით: „სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა გამოყენება ნეიტრონული დასხივების თეორიიდან წარმოქმნილ ზოგიერთ მათემატიკურ ამოცანაში“
და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის საგამოცდო სადისერტაციო საბჭოზე მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელები: პროფ. დ. შულაია

ასოც. პროფ. დ. გულუა

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2015

ავტორი: მალხაზ ბიბილური

დასახელება: „სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა გამოყენება ნეიტრონული დასხივების თეორიიდან წარმოქმნილ ზოგიერთ მათემატიკურ ამოცანაში“

ფაკულტეტი: ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: 2015 წლის 14 ივლისი

ავტორის ხელმოწერა

რეზიუმე

წინამდებარე ნაშრომში განიხილება გადატანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლებისათვის დასმული ამოცანები. სახელდობრ, განიხილება ის შემთხვევა, როცა გარემო უსასრულოა, განტოლების გული გადაგვარებულია და საკუთხო ცვლადის მიმართ იზოტროპულია.

განტოლებასთან ერთად განიხილება მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება, რომელიც უშვებს ცვლადთა განცალებას. რის შედეგად მიიღება პარამეტრზე დამოკიდებული ორცვლადიანი წრფივი ინტეგრალური განტოლება.

სპექტრი, ამ განტოლების შესაბამისი ოპერატორისა შეიცავს როგორც დისკრეტულ, ასევე უწყვეტ ნაწილებს. საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა სრულია და ბიორთოგონალური. აღნიშნული თვისებები გამოიყენება დასმული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის დასადგენად და მისი ცხადი სახით წარმოსადგენად.

ამასთან ერთად შეისწავლება ე.წ. ალბედოს ამოცანა - რომელიც არის ამოცანა ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის პოვნისა ნახევარსივრცეში, რომლის საზღვარზე ეცემა გამოსხივების პარალელური ნაკადი.

გარდა ამისა განიხილება მილნის პრობლემა, რომელშიც შეისწავლება ნეიტრონების განაწილება წყაროდან თავისუფალ გარემოში, და რომელიც მოიცავს ნახევარსივრცეს, ამასთან ნაკადი გარედან დაცემული დასხივებისა ნულის ტოლია. შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ნეიტრონების წყარო განთავსებულია უსასრულობაში.

ამრიგად, იძებნება ერთგვაროვანი განტოლების ისეთ ამონახსნი, რომელიც კმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობას უსასრულობაში.

ამ ამოცანებთან ერთად განიხილება გრინის ფუნქცია ნახევარ სივრცისათვის. ის განისაზღვრება როგორც გადატანის განტოლების ამონახსნი უსასრულო ნახევარსივრცეში როცა გარედან არ ხდება დასხივება და წყარო გამოსხივებისა მდებარეობს განსახილველ არეში.

შემდგომში ჩვენი ინტერესების სფეროს წარმოადგენს ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის ასიმპტოტური ყოფაქცევის დადგენა. ამასთან განიხილება ის შემთხვევა როცა აღნიშნული ფაზური სიმკვრივე წარმოქმნილია ბრტყელი, ერთეულოვანი სიმძლავრის მქონე მიმართულების და ტალღის სიგრძის მქონე წყაროსაგან. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად გამოყენებული იქნება საძებნი სიდიდის საკუთრივ ფუნქციათა საშუალებით გაშლის მეთოდი. ცნობილია, რომ რეგულარული და სინგულარული საკუთრივ ფუნქციები აიგება შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებიდან. თვით ეს განტოლება წარმოქმნილია გადატანის წრფივი

თეორიის განტოლებიდან, რომელიც აღწერს ლითონში რადიაციის გაჭოლვის პროცესს. ამასთან ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ დისკრეტული საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციები წარმოადგენენ, თავიანთი არგუმენტების მიმართ, კლასიკური აზრით განმარტებულ ფუნქციებს. მათი რაოდენობა სასრული ან თვლადია. სინგულარული საკუთრივი ფუნქციები კი წარმოადგენენ სობოლევ-შვარცის აზრით განმარტებულ განზოგადებულ ფუნქციებს. მათი რაოდე-ნობა კონტინუმ სიმძლავრისაა. ამრიგად, მახასიათებელი განტოლების დისკრეტული სპექტრი სასრული ან თვლადია, ხოლო უწყვეტ სპექტრს მონაკვეთი წარმოადგენს. დასმული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს წარმოვადგენთ რეგულარული და სინგულარული საკუთრივ ფუნქცი-ების დახმარებით, სადაც შესაბამისი კოეფიციენტების განსაზღვრი-სათვის გამოიყენება ამოცანის ფიზიკური შინაასიდან გამომდინარე სასაზღვრო პერობები. ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ არსებობს გარკვეული ხასიათის ანალოგია კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებსა და ჩვენს მიერ განხილული გადატანის თეორიის განტოლე-ბებისთვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანებს შორის მისი ამოხსნის თვალსაზრისით.

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ისეთი ფორმულის მიღება რომელის საშუალებით შესაძლებელი იქნება ასიმპტოტური ყოფაქცევის დადგენა ბოლცმანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლების ამონა-ხსნისთვის. აღნიშნული ამონახსნით აღიწერება ნეიტრონების ნაკადის გაჭოლვის პროცესი უსასრულო ერთგვაროვან გარემოში. გეომეტრია, რომელიც აქ იქნება განხილული ბრტყელია. წყარო - მონო მიმართული და მონო ქრომატული, გამოსახული დირაკის ფუნქციის საშუალებით.

დასასრულს, ჰელდერის ფუნქციათა კლასში მოიცემა ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ერთი ორცვლადიანი ინტეგრალური განტოლებისა, რომელსაც ერთი ცვლადის მიმართ გააჩნია სინგუ-ლარობა. ასეთი სახის განტოლებები ხშირად გვხვდებიან ნეიტრონების გადატანის თეორიაში. ამონახსნის მოძებნა მიიყვანება ფრედგოლმის მეორე გვარის ერთცვლადიანი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნამდე. ჩვენ შევისწავლით ერთი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას რემელსაც გააჩნია დიდი მნიშვნელობა მათემატიკური ფიზიკის ნეიტრონების გადატანის თეორიაში.

Abstract

The present work deals with the tasks set for the equation of linear multi-velocity theory of relocation. In particular. The case has been considered when the environment is infinite, and is isotropic towards the angle variable.

Together with the equation there is considered its relative homogeneous equation which allows the separation of variables. As a result of which there is received the two-variable linear integral equation depended on the parameter.

The spectrum of the operator corresponding to this equation comprises both the discrete and continuous parts. The system of functions themselves is complete and biorthogonal. The indicated features are used for determination of uniqueness of solution of the set task and for representation it vividly. Simultaneously, there is studied the Albedo task which is the task of finding of phase density of neutrons in hemisphereon the border of which there is fallen a stream parallel to irradiation

Besides, a Milni Problem is considered which serves to study the distribution of neutrons from the source in a free environment comprising the hemispace, besides, the stream of the irradiation externally incident equals to zero. It might be deemed that the source of neutrons is allocated in infinity.

Thus, such solutions of homogenous equation are being searched which meets the above-indicated condition in infinity and when then the following condition.

Together with these tasks there is considered a Green function for hemi-space. It is considered as a solution of relocation equation in infinite semi-space when no radiation takes place externally and the source of irradiation is located in the area to be considered.

Further, the sphere of our interests is to define the asymptotic behavior of phase density of neutrons. Simultaneously, there is considered the case when the indicated phase density is formed from the source having the direction of the flat, single power and wave length/ For solution of this problem there will be used a method of spanning by means of searching volume particularly of functions. It is known that regular and singular particular functions will be constructed from corresponding characteristic equation/ This equation itself has been constructed from linear theory of relocation. This equation itself has been created from the equation of linear theory of relocation which describes the process of radiation stitching of radiation in the metal. At the same time the situation should be specially underlined that the particular functions corresponding to discrete particular numbers relative to their arguments, are the determined functions in classical understanding. Their number is finite or countable. And the singular particular functions are the generalized functions determined from the point of view of Sobolev-Schvasrtss. Their number is of continuum power. Thus the discrete spectrum of characteristic equation is finite or countable, and the continiuum spectrum is a section. We represent the solution of set border task by means of regular and singular particular functions where for determination of relative coefficients there are used the definite border conditions as a consequence of physical content of the task/ Thus, it might be told that there is available an analogy of definite

character between the classical mathematical physical tasks and the border tasks set for the equations of of the theory of relocation from the point of view of its solution.

Our goal is to receive such a formulae by means of which it will be possible to define the asymptotic behavior for solution of equation of Botsman linear multi-velocity theory. By means of indicated solution it will be described the process of stitching of neutron stream under the infinite homogeneous environment. The geometry, which is considered here is flat. The source - mono directed and mono chromatic, expressed by means of Dirak function.

Finally, in the class of Helder's functions there is given the necessary and enough condition of solubility of one two-variable integral equation which has a singularity to one variable, We meet the equation of such type very frequently in the theory of relocation of the neutrons. Searching of solutions is brought to solution of one-variable integral equation of the second family of Fredholm. We shall study one singular integral equation which is of great importance in the theory of relocation of neutrons of mathematical physics.

Using of singular particular functions in some mathematical tasks formed from the neutral radiation theory.

შ ი ნ ა ა რ ს ი

შესავალი

ელემენტარულ ნაწილაკთა გადატანის თეორია წარმოადგენს თანამედრივე საბუნებისმეტყველო მეცნიერების ერთ-ერთ ძირითად მიმართულებას, რომელიც სწრაფად ვითარდება მათემატიკის და თეორიული ფიზიკის მიღწევების საფუძველზე და ღრმად აღწევს საბუნებისმეტყველო და ტექნიკური დარგების განსხვავებულ სფეროებში. ამ თეორიის ერთ-ერთ ძირითადი ამოცანაა კვლევა საკითხისა, რომელიც მდგომარეობს ნამზადთა საიმედობის გაზრდის მიზნით ნეიტრონული დასხივების გავლენა ლითონების ფიზიკო-მექანიკურ თვისებებზე. ამოცანები, რომელთანაც გვექნება საქმე, წარმოადგენს ორმხრივ ხასიათის დამახასიათებელ ნიშანს გამოსხივებასა და ნივთიერების ურთიერთ-ქმედებას შორის. ერთის მხრივ, გამოსხივების ველი განისაზღვრება ნივთიერების მდგომარეობით, მეორეს მხრივ, კი თვით ეს მდგომარეობა არსებითი ხასიათით დამოკიდებულია გამოსხივების ველისაგან. ლითონებში მიმდინარე პროცესები, რომლებიც შეიცავენ აღგზნებული დონის ატომებს, განისაზღვრებიან უმთავრესად რადიაქტიული პროცესებით, ე.ი. გამოსხივების ველით. მათი რაოდენობრიობის გათვლა, როცა თერმოდინამიკურ წონასწორობას არ აქვს ადგილი, წარმოადგენს იმ ამოცანას, რომლისაგან შედგება ნაშრომის ძირითადი შინაარსი.

დასმული ამოცანა ძალზე რთულია და თავიდავნე საჭირო ხდება დიდი შეზღუდვების შემოტანა გამოყენებითი ხასიათის შედეგების მისა-ღებად. თუმცა ამჟამად ეს ერთადერთი შესაძლო გზაა რომელიც უნდა იქნას გავლილი, რათა გამოკვლეულ იქნას ამოცანები ნაკლები შეზღუდვების მქონე პირობებში. მოვლენათა სფერო, რომელთანაც აქვთ საქმე თერმო-დინამიკურ არაწონასწორულ მდგომარეობასთან, განსაკუთრებით ფართოა. ხშირად მკვლევარები, რომლებიც იკვლევენ განსხვავებული მასშტაბების მოვლენებს, ისეთებს, როგორიცაა ჩვეულებრივი ლუმინესცენტნული ნათურის ნათება, ნეიტრონული დასხივების გავლენა ლითონების ფიზიკო-მექანიკურ თვისებებზე და ა.შ. ხშირად დგებიან ერთი და იგივე პრობ-

ლემების წინაშე. მზისა და ვარსკლავების გარე ფენები, სადაც ხდება შთანთქმა და გამოსხივება, არ იმყოფებიან თერმოდინამიკურ წონასწორობაში. გამოსხივების და ნივთიერების ურთიერთქმედება კოსმოსური მაშტაბის გაზურ მასაში არაფრით განსხვავდება ანალოგიური პროცესებისაგან, რომლებიც წარმოიშვებიან პლაზმაში ლაბორატორიული გაზური განმუხტვისას. ლითონთა რადიაქტიული დასხივების ამოცანების შესწავლის აქტუალობა განსხვავებული ბუნების მქონე ფიზიკურ სასტემებში რეალური გარემოს თავისებურობათა გათვალისწინებით განპირობებულია მთელი რიგი, როგორც სამეცნიერო-ტექნიკური, ასევე, უკანასკნელ პერიოდში სწრაფად განვითარებადი ტექნოლოგიური პროცესების მოთხოვნილებით. აღნიშნული თეორიის ეფექტურმა გამოყენებამ ტექნიკის მრავალ სფეროში, განსაკუთრებით ლითონთა საიმედოობის გაზრდის ამოცანებში, ბუნებრივი და, არაბუნებრივი პროცესების ოპერატიულ პროგნიზირებაში მოითხოვა ამოცანების უფრო ღრმა შესწავლა და საფუძვლიანი ანალიზი.

მიზანი, ელემენტარულ ნაწილაკთა დიფუზიის აღმწერი ლ. ბოლცმანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი გადატანის ინტეგრო-დიფერეციალურ განტოლებებისათვის დასმული ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ანალიზური ხერხით წარმოდგენაა.

ამოცანები: წარმოდგენილი მეთოდის გამოყენებით განტოლების გრინის ფუნქციის აგება, როგორც უსასრულო ასევე ნახევრად უსასრულო გარემოსათვის, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა. სახელდობრ, ალბედოსა და მილნის კლასიკური პრობლემების და ზოგიერთი არასტაციონალური ამოცანების ამოხსნა.

ნაშრომი თეორიული ხასიათის გამოკვლევაა. მიღებულ შედეგებს შეუძლიათ გარკვეული როლი შეასრულონ გადატანის მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლებისათვის დასმული ამოცანების გამოკვლევაში და მათი სტრუქტურული და თვისობრივი მახასიათებლების შესწავლაში.

აქედან გამომდინარე, სამეცნიერო ნაშრომთა დიდი რაოდენობა ეძღვნება აღნიშნული თეორიის ამოცანების კვლევას და მიღებული შედე-

გების პრაქტიკაში დანერგვას. ამ მიმართულებით კვლევის განსხვავებული მიდგომების სიმრავლის შესახებ მსჯელობა შეიძლება ს. ჩანდრასეკარის ვ. ამბარცუმიანის, ვ. სობოლევის, დ. ჰამერის [14] ლ. სტერბოიკის, ი. კაპრი-ოტის [12], მ. ფრიდრიხის, ზ. განაპოლის [7] გ. ბალის და ი.მადაის [6], ოსტერბროკის [8], ტიდზიზის [9], ნ. მასლენნიკოვის რ. თომასის [13], ე. ჰოფის [11] ვ.ფოკის, მ. შმიტისა [10] და სხვათა შრომების მიხედვით.

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ ლითონებზე ნეიტრონული დასხი-ვების პროცესების შესწავლა, როცა მათი ძირითადი მახასიათებლები ცვლადი სიდიდეებია, ერთ-ერთ რთულ და აქტუალურ პრობლემას წარმო-ადგენს. აღნიშნული მიმართულების განვითარება წარმოებს როგორც პროცესების შესწავლით ახალ კონკრეტულ გარემოებებში, ასევე მიღებული შედეგების განზოგადებაში. მიუხედავად იმისა, რომ ამ პროცესების შესწავლისადმი მიძღვნილია მრავალი ნაშრომი, გარემოს შთანთქმის როლის გათვალისწინება დღესაც ერთ-ერთ წინა პლანზე არის წამოწეული. სწორედ ასეთ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე. ჩვენს ძირითად მიზანს წარმოადგენს ნეიტრონული დასხივების შედეგად ნამზადთა საიმედობის დადგენის ამოცანების კვლევა მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით იმ შემთხვევაში, როცა გარემოს შთანთქმის როლი არსებითად არის გამოკვეთილი და მის საფუძველზე პრაქტიკული მნიშვნელობის მქონე საკითხების ანალიზი. ჩვენი მიზანია უსასრულო გარემოში ფიქსირებული წყაროს მიერ წარმოქმნილი ველის გამოკვლევა, ველის სპექტრალური მახასიათებლების მოძებნა და მათი ანალიზი. ნაშრომში გამოყენებული იქნება განზოგადებულ ფუნქციათა, სინგულარულ-ინტეგრალური და ბოლცმანის მოდელურ განტოლებათა თეორიების მეთოდები.

ძირითადი შედეგები შეიძლება გამოყენებულ იქნას ბუნებრივი მოვ-ლენების დიაგნოსტიკისათვის, გარემოს შემთხვევითი, არაერთგვარო-ვნებით განპირობებული ხარვეზების ანალიზისა და მათი აღმოფხვრი-სათვის, ლითონის სტატისტიკური მახასიათებლების განსაზღვრისათვის. გამოკვლეულია უსასრულო გარემოში ლითონის დასხივების ამოცანა, რაც

თავის მხრივ მნიშვნელოვნად გაამარტივებს რთული ეფექტების შესწავლას გარემოს საზღვრის მახლობლობაში. განხილულია ისეთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გამოკვლეულ იქნეს მრავალჯერადი დასხივების ამოცანები, როგორც უსასრულო, ასევე ნახევრად უსასრულო გარემოს შემთხვევისათვის, როცა მათ შთანთქმის თვისება გააჩნიათ. ჩვენს შემთხვევაში ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ ერთგვაროვანი განტოლების საკუთრივი ფუნქციის წრფივი კომბინაციის სახით. ამასთან ეს საკუთრივი ფუნქციები წარმოადგენენ როგორც რეგულარულ უწყვეტ ფუნქციებს, ასევე, სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციებს განზოგადებულ ფუნქციათა კლასი-დან. ანალიზურად აგებულია სინგულარული საკუთრივი ფუნქციათა კლასი. გამოყენებულია შედეგი რეგულარულ და სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა კლასის სისრულის შესახებ როგორც სრული ინტერვალისა-თვის, ასევე ნახევარი ინტერვალის შემთხვევისათვის. გადატანის განტოლებასთან ერთად განხილულია მისი შეუღლებული განტოლება, რომლისთვისაც აგებულია რეგულარულ და სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა. ცნობილია რომ აგებული ძირითადი და შეუღლებული სისტემები წარმოადგენენ ბიორთოგონალურ სისტემებს, რაც ამარტივებს ამონახსნის განაშალის კოეფიციენტების პოვნას.

ცნობილია, რომ ძალზე ზოგადი მათემატიკური, ფორმულირება გადატანის თეორიის ამოცანებისა, მოიცემა ბოლცმანის ლინეარიზებული კინეტიკური განტოლების საშუალებით. კინეტიკური თეორიის განტო-ლებები წარმოადგენენ მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიან ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა კლასს. თავისი სტრუქტურით ეს განტოლებები არსებითად განსხვავდებიან კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებისაგან და წარმოადგენენ გაცილებით რთულს მათთან შედარებით. ფუნქციონალური ანალიზის, განზოგადებულ ფუნქცი-ათა თეორიის და სასაზღვრო ამოცანების განზოგადებულ ამოხსნათა თეორიის განვითარებასთან ერთად განვითარება ჰპოვა გადატანის თეორიის ამოცანების ამონახსნთა თვისებების მათემატიკურმა კვლევებმა.

მიუხედავად ამისა კლასი ამოცანებისა, რომლებიც ამოხსნადია ჩაკეტილი ფორმით, ძალზე ვიწროა. სანამდვილეში ამონახსნების მიღება ჩაკეტილი ფორმით შესაძლებელია მხოლოდ მარტივ სიტუაციებში.

ანალიზური სახით ამონახსნთა მიღება გადატანის თეორიის ზოგი-ერთი ამოცანისათვის სასარგებლოა შემდეგი მოსაზრებების გამო:

1. ზოგიერთ სპეციალურ სიტუაციებში მსგავსი ამოცანები შესაძლებელია იძლეოდნენ კარგ მიახლოვებას ფიზიკური რეალობისა.
2. მათი ამონახსნები თავისთავად წარმოადგენენ დამოუკიდებელ მათემა-ტიკურ ინტერესს, რადგან ისინი იძლევიან წარმოდგენას გადატანის წრფივი თეორიის სასაზღვრო ამოცანათა ამონახსნთა სტრუქტურის შესახებ.
3. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის რომ, სავარაუდოდ, ამოცანები, რომლებიც უშვებენ ასეთ ამოხსნებს, წარმოქმნიან სისტემას, რომლებ-ზეც შესაძლებელია მიახლოებითი მეთოდების შემოწმება.

1. ლიტერატურის მიმოხილვა

1.1. პრობლემის აქტუალობა

ჩვენი მიზანია, რომ წარმოვადგინოთ ელემენტარულ ნაწილაკთა გადატანის აღმწერი ლ. ბოლცმანის (L. Boltzmann) წრფივ ინტეგროდიფერენციალურ განტოლებებისათვის დასმული ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის მიღება. აღნიშნული ამოცანები ხშირად გვხვდება მათემატიკური ფიზიკის მრავალი მნიშვნელოვანი პრობლემის კვლევისას. სახელდობრ, ნეიტრონების გადატანის თეორიის ფუნდამენტურ პრობლემებში, პლაზმის სტაციონალური ტალღის თეორიაში, სტატისტიკურ მექანიკაში, ასევე გაზებში ელექტრული განმუხტვის შესწავლისას, ვარსკვლავთა ატმოსფეროს თერმოდინამიკაში [16] და სხვ. ამ სისტემის კვლევის ჩვეულებრივი მეთოდები, ისეთები როგორიც ინტეგრალურ განტოლებებამდე დაყვანაა, მნიშვნელოვან სირთულეებთან არის დაკავშირებული გამარტივებულ შემთხვევბშიც კი.

ხშირად ამონახსნები მიღებული ინტეგრალური განტოლებებიდან გამოისახებიან მრუდწირული ინტეგრალებით. ისინი რიცხვითი რეალიზაციისათვის გამოსადეგი ხდებიან მხოლოდ მრავალჯერადი გარდაქმნების შედეგად. სასურველია, რომ გარდაქმნილი ფორმები მოიძებნოს უშუალოდ, პირდაპირი გზით. ზოგიერთი სპეციფიკური ამოცანის ზუსტი ამონახსნების მიღების მეთოდები ხშირად ერთმანეთისაგან რადიკალურად განსხვავებულია. მათ საერთო საფუძველი არ გააჩნიათ. განსაკუთრებით ეს ეხება იმ შემთხვევას, როცა ამონახსნის წარმოდგენა ხდება ცვლადთა განცალების შედეგად მიღებული განტოლების საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით. ამ შემთხვევაში ოპერირებენ განტოლებებით, რომლებიც მესამე გვარის ინტეგრალურ განტოლებათა კლასს ეკუთვნის და მათი საკუთრივ ფუნქციათა სიმრავლე (კლასიკური აზრით) არაა სრული. ეს უკანასკნელი შენიშვნა ასევე ეხება აქ წარმოდგენილი მეთოდის არსს. ამ მიმართულებით პირველი ნაბიჯი იყო ვან კამპენის მიგნება ნაშრომში [17]

პლაზმის ოსცილაციის პრობლემებთან დაკავშირებით. ვან კამპენმის მიგნებაში მნიშვნელოვანია ორი მომენტი: პირველი – შვარცის აზრით განაწილების შემცველი საკუთრივი ამონახსენების შემოყვანა, მეორე – პლაზმის სპეციფიკური ამოცანისათვის ამ საკუთრივ განაწილებათა სისრულის დადგენა. შემდგომში, კეისმა [18] იზოტროპულ გარემოში ერთ-სიჩქარიანი ნეიტრონების დიფუზიის განტოლებისათვის, განსაზღვრის მთელ არეში, ააგო ვან კამპენისეული ელემენტარულ ამონახსნთა სისტემა, სრული ჰელდერის სივრცისათვის. შეისწავლა ქვეარეებში ამონახსნთა ქვესიმრავლეების სისრულის და ორთოგონალობის თვისებანი. რის შედე-გად მან დააფუძნა ერთსიჩქარიანი გადატანის თეორიის მათემატიკური პრობლემების კვლევის ეფექტური მეთოდი. ეს მეთოდი ანალოგიურია კლასიკური ცვლადთა განცალების მეთოდისა, კერძო წარმოებულიან დიფე-რენციალურ განტოლებთა თეორიიდან. კეისის მეთოდის გამოყენებით მათემატიკური ფიზიკის მრავალი აქტუალური პრობლემა იქნა შესწავ-ლილი. მაგ.: ბგერის გავრცელების ამოცანა, პლაზმური ამოცანები, გაზში ელექტრული განმუხტვა, ვარსკვლავურ ატმოსფეროებში გამოსხივების გადატანა და სხვ. [19].

შემდგომში აღნიშნული მეთოდი თავის მხრივ კვლევის ობიექტიც გახდა [20-22]. გარდა ამისა, ამ მეთოდის გამოყენებით მოხდა ასევე ბაზი-სური განტოლების სპექტრალური რეფორმირება. სახელდობრ, მიღებულ იქნა ბაზისურის ექვივალენტური, სპექტრალური ინტეგრალის შემცველი განტოლება, რომლის დახმარებით ახალი ფორმულები და წარმოდგენები იქნა დადგენილი [23]. უკანასკნელ პერიოდში კეისის მეთოდის დახმა-რებით მრავალსიჩქარიანი და მრავალჯგუფური თეორიების ზოგიერთი სპეციფიკური ამოცანებიც არის შესწავლილი [24-26].

შევნიშნავთ, რომ კეისის მეთოდი არსებითად ეფუძნება ე.წ. კოშის გულის მქონე სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიას, რომელიც ნ. მუსხელიშვილის, ი. ვეკუას, მათი მოწაფეების და მიმდევრების მიერაა დაფუძნებული. როგორც ცნობილია [16] სქელ დამცავ ფენებში

ნეიტრონების ან γ სხივების დიფუზიური პროცესები ექვემდებარებიან გადატანის წრფივ განტოლებას. წრფივობა გამომდინარეობს იმ გარემოებიდან, რომ ხდება გამოსხივების ნაკადის და დამცავი მასალების ურთიერთქმედება, ამასთან გამოსხივების შედეგად ამ მასალების თვისებები არ განიცდიან რაიმე მნიშვნელოვან ცვლილებებს. მაგრამ ურთიერთქმედების ყოველი პროცესი ჩვეულებრივად დაკავშირებულია ნეიტრონის ან γ ქვანტის ენერგიის დაკარგვასთან. ეს „ენერგიის დეგრადაცია“ არსებითია გადატანის პროცესისათვის, რადგან ენერგიის დაკარგვის შესაძლებლობა გზის მცირე მონაკვეთზეც კი განმსაზღვრელ როლს თამაშობს სქელ ფენაში გამოსხივების გადატანისას. ამიტომ აქტუალურია გადატანის მრავალსიჩქარიანი ან მრავალჯგუფური თეორიების პრობლემების ზუსტი ანალიზური შესწავლა. ამასთან პირდაპირი რიცხვითი გათვლა რთულია და საგულდაგულო გამოკვლევის გარეშე შესაძლოა ძალზე არაზუსტი აღმოჩნდეს. გადატანის ერთსიჩქარიანი, მრავალსიჩქარიანი და მრავალჯგუფური თეორიების ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები გადაგვარების მქონე განსხვავებული განზომილების განტოლებებია. ისინი კვლევისათვის განსხვავებული ობიექტებია [16, 27]). როგორც ერთსიჩქარიანი ასევე მრავალსიჩქარიანი და მრავალჯგუფური თეორიის განტოლებებისათვის, განსაზღვრის მთელ არეში, გამოყენებულია ვან კამპენისეული ელემენტარული ამონახსენების სისტემების სისრულე ჰელდერის სივრცისათვის [28-33]. მათი საშუალებით ამ განტოლებებისთვის შესაძლებელია ამოხსნილი იქნას სპექტრალური ანალიზის შებრუნებული ამოცანები [34-35]. ასევე, გამოყენებულია ქვეარეებში მრავალსიჩქარიანი განტოლების ელემენტარულ ამონახსნთა ქვესიმრავლეების სისრულე [36-38], რის საფუძველზე მოხდა კლასიკურ ცვლადთა განცალების მეთოდის განზოგადება მრავალსიჩქარიანი განტოლებისათვის, მსგავსად კეისის მეთოდისა ერთსიჩქარიანი თეორიიდან. ასევე შესაძლებელია მრავალჯგუფური ბაზისური განტოლების სპექტრალური რეფორმირება. რაც ნიშნავს ბაზისურის ექვივალენტური, სპექტრალური ინტეგრალის შემცველი განტოლების მიღებას, რომლის

დახმარებით საკუთრივი რიცხვებისთვის და საკუთრივი ფუნქციებისთვის დადგენილი იქნა ახალი ფორმულები და წარმოდგენები [39]. ასევე შესაძლებელია შესწავლილ იქნას გადატანის თეორიაში წარმოქმნილი მესამე გვარის ინტეგრალური განტოლებანი [40-43] (რომლის კლასიკური აზრით ამოხსნის ზოგადი თეორია პრობლემად რჩება [44]). ეს შედეგები [35, 36, 40-42] ციტირებულია სამეცნიერო ნაშრომებში [24, 45-47]. საკვლევი პრობლემებია: მრავალსიჩქარიანი გადატანის წრფივი თეორიის განტოლებებისათვის ზოგიერთი სასზღვრო ამოცანების ამონახსნთა ანალიზური წარმოდგენა ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენებით, რომელიც სიახლეს შესძენს ამ თეორიას.

1.2. კვლევის მიზანი და ამოცანები

მიზანი, ელემენტარულ ნაწილაკთა დიფუზიის აღმწერი ლ. ბოლცმანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი გადატანის ინტეგრო-დიფერეციალურ განტოლებებისათვის დასმული ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსენის ანალიზური ხერხით წარმოდგენაა.

ამოცანები: წარმოდგენილი მეთოდის გამოყენებით განტოლების გრინის ფუნქციის აგება, როგორც უსასრულო ასევე ნახევრად უსასრულო გარემოსათვის, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა. სახელდობრ, ალბედოსა და მილნის კლასიკური პრობლემების და ზოგიერთი არასტაციონალური ამოცანების ამოხსნა.

მოსალოდნელი შედეგები: განსახილველი პრობლემების ამონახსენების ანალიზური წარმოდგენა.

ამჟამად ასტროფიზიკაში და ნეიტრონულ ფიზიკაში განვითარებულია ეფექტური მეთოდები გადატანის ამოცანების მკაცრი ანალიზური ამოხსნებისა. სპეციალურად ხაზი უნდა გაესვას იმას, რომ გადატანის პროცესების განსაკუთრებულებანი შეუძლებელს ხდიან, ზოგიერთ შემთხვევაში, სტანდარტული მიახლოებითი მეთოდების გამოყენებას.

საკმაოდ ფართო მათემატიკური ფორმულირება გადატანის თეორიის ამოცანებისა მოიცემა ბოლცმანის ლინეარიზებული კინეტიკური განტოლების საშუალებით. კინეტიკური განტოლებანი წარმოადგენენ მათემატიკური ფიზიკის მრავალ ცვლადიან ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა კლასს. თავიანთი სტრუქტურით ეს განტოლებები არსებითად განსხვავდებიან კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებისაგან და არიან უფრო რთული მათთან შედარებით. ფუნქციონალური ანალიზის, განზოგადებულ ფუნქციათა თეორიის და სასაზღვრო ამოცანათა განზოგადებულ ამოხსნათა თეორიის განვითარებას-თან დაკავშირებით ღრმა განვითარება ჰპოვა გადატანის თეორიის ამოცანების მათემატიკურმა კვლევამ. მიუხედავად ამისა, ამოცანათა კლასი, რომლებიც ამოიხსნებიან ჩაკეტილი ფორმით, არის ძალზე შეზღუდული. სინამდვილეში ჩაკეტილი ფორმით ამონახსნების მიღება შესაძლებელია მხოლოდ უმარტივეს სიტუაციებში. 1960 წელს კ. კეისის მიერ [1] ფორმუ-ლირებული იყო ახალი მიდგომა გადატანის თეორიის ამოცანების ამოხსნისა რომელიც ეფუძნებოდა გამოსხივების ფაზური სიმკვრივის გაშლას ერთგვაროვანი კინეტიკური განტოლების საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით. თვით ეს იდეა ახალი არ არის, ის საფუძვლად უდევს ფურიეს მეთოდს, რომელიც ფართოდ გამოიყენება მათემატიკური ფიზიკის სხვა-დასხვა სფეროში და რომელთანაც დაკავშირებულია ცვლადთა განცალების მეთოდი მათემატიკურ ფიზიკაში. ფურიეს მეთოდის რეალიზაციისათვის აუცილებელია, რომ მკლევარის განკარგულებაში იყოს საკმაოდ მძლავრი ფუქციათა სისტემა, რომლის მიხედვითაც ხდება გაშლა და რომლებიც განსაზღვრული სახით დაკავშირებული არიან განსახილველ ამოცანასთან. როგორც წესი, ასეთ როლს თამაშობს რაიმე ოპერატორის, რომელიც შედის ამოცანაში, საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა. და სწორედ ეს პირობა, ერთი შეხედვით არ სრულდება გამოსხივების გადატანის თეორიაში. მაგ., აღმოჩნდება, რომ კერძო შემთხვევაში ბრტყელ გეომეტრიაში, გონივრული დაშვებებში, გაბნევის ინდიკატრისისათვის, გადატანის ერთგვაროვან გან-

ტოლებას გააჩნია წრფივად დამოუკიდებელი საკუთრივ ფუნქციათა ერთობლიობის მხოლოდ სასრული რაოდენობა და რაც უფრო „უკეთესია“ ინდიკატრისა, მით უფრო ნაკლებია მათი რაოდენობა. ეს საკუთრივი ფუნქციები ძალზე მოხერხებულნი არიან მრავალი თვალსაზრისით: მათი სივრცული და საკუთხო ცვლადების განცალკევება შესაძლებელია, ისინი უწყვეტ ფუნქციებს წარმოადგენენ და ა.შ., მაგრამ ისინი ძალზე ცოტანი არიან. ანალოგიურ სატუაციას აქვს ადგილი, თუ თავიდანვე შემოვისაზღვრებით მხოლოდ ისეთი ამონახსნებით, რომლებიც აკმაყოფი-ლებენ უწყვეტობის ჩვეულებრივ პირობას. თუმცა მდგომარეობა მკვეთრად იცვლება, თუ კლასიკურ ამოხსნებთან ერთად განსახილველად შემოიტანება სინგულარული განზოგადებული ფუნქციები. ერთგვაროვანი კინეტიკური განტოლებების დასაშვებ ამონახსნთა სიმრავლის ასეთ გაფართოებას მივყავართ კლასამდე, რომელიც საკმარისად ფართოა, და რომელიც საშუა-ლებას იძლევა ფურიეს მეთოდის ანალოგის დაფუძნებისა კლასიკურ ანალიზში. როგორც ცნობილია გადატანის თეორიის წრფივი ლინეარიზი-რებული ერთგვაროვანი განტოლებისთვის შესაძლებელია ცვლადების განცალება. სახელდობრ, მისი ამონახსნი წარმოიდგინება როგორც ნამრავლი ორი ფუნქციისა, სადაც ერთი, სივრცულ ცვლადზე დამოკიდებული ექსპონენციალური ფუნქციაა, ხოლო მეორე თანამამრავლი კი, კუთხურ და ენერგეტიკულ ცვლადებზე დამოკიდებულ ფუნქციას წარმოადგენს, რომელიც აკმაყოფილებს წრფივ ინტეგრალურ განტოლებას და რომლის კოეფიციენტი შეიცავს ნულს. ამ უკანასკნელ განტოლებას მახასიათებელ განტოლებას უწოდებენ. კ. კეიზმა განიხილა გადატანის ერთსიჩქარიანი თეორიის ამოცანა

$$\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi(x,\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi(x,\mu')d\mu' \qquad (1)$$

$$x\in]-\infty,+\infty[,\ \mu\in]-1,+1[$$

სადაც μ - პარამეტრია.

ამ განტოლების ამოხსნა იძებნება შემდეგი სახით:

$$\Psi(x,\mu)=\varphi_\nu(\mu)\exp(-x/\nu) \qquad (2)$$

ამ უკანასკნელს თუ შევიტანთ ერთგვაროვან (1) განტოლებაში მივიღებთ:

$$(1-\frac{\mu}{\nu})\varphi_\nu(\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_\nu(\mu')d\mu' \qquad (3)$$

ჩანს, რომ ის პრინციპული სირთულე, რომელიც გააჩნდა გამოსავალ ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებას, უშუალოდ გადმოდის ამ განტოლებაზე. ამ უკანასკნელის გამოკვლევისათვის საჭირო ხდება არაკლასიკური, არატრადიციული მეთოდებისა და მიდგომების გამოყენება, ვინაიდან ისეთი ინტეგრალური განტოლებები, რომელთა კოეფიციენტი ნულის ტოლ მნიშვნელობას იღებს ,ლიტერატურაში უფრო ნაკლებად არის შესწავლილი ვიდრე სხვა ტიპის ინტეგრალური განტოლებები. მას მახასიათებელ განტოლებას უწოდებენ. ν პარამეტრის იმ მნიშვნელობას როცა ინტეგრალურ განტოლებას გააჩნია არა ნულოვანი უწყვეტი ამონახსნი რეგულარულ საკუთრივ რიცხვს ან დისკრეტული სპექტრის ელემენტს უწოდებენ, ხოლო მის შესაბამის უწყვეტ ამონახსნს საკუთრივი ფუნქცია ეწოდება. როცა ν პარამეტრის მნიშვნელობა აღებულია $[-1,+1]$ სეგმენტიდან, მაშინ მახასიათებელ განტოლებას განზოგადებულ ფუნქციათა კლასში (სობოლევ-შვარცის აზრით) გააჩნია საკუთრივი ფუნქციები განზოგადებუ-ლი აზრით. ამრიგად, გარდა დისკრეტული საკუთრივი რიცხვებისა გვაქვს კონტინუუმ რაოდენობის საკუთრივი მნიშვნელობა. ამასთან ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ დისკრეტული საკუთრივი რიცხვების შესაბამი-სი საკუთრივი ფუნქციები უწყვეტი არიან თავიანთი არგუმენტების მიმართ და წარმოადგენენ კლასიკური აზრით განმარტებულ ფუნქციებს. კონტინუ-უმ სიმრავლის რაოდენობის საკუთრივი მნიშვნელობათა შესაბამისი ფუნქციები წარმოადგენენ სობოლევ-შვარცის აზრით განმარტებულ განზო-გადებულ ფუნქციებს, რომელსაც სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციებს უწოდებენ. ე.ი. მახასიათებელი განტოლების უწყვეტ სპექტრს წარმოადგენს სეგმენტი. შემდგომში ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისათვის დასმული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი წარმოიდგინება რეგულარული

და სინგულარული საკუთრივი ფუნქციების წრფივი კომბინაციის საშუ-ალებით, სადაც კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის გამოიყენება ამოცანის ფიზიკური შინაარსიდან გამომდინარე სასაზღვრო პირობები. ჩვეულებრივი ტერმინოლოგიის ანალოგიურად $\varphi_\nu(\mu)$-ს არატრივიალურ მნიშვნელობას რომელიც აკმაყოფილებს (3) განტოლებას, უწოდებენ საკუთრივ ფუნქციას, ხოლო ν პარმეტრის შესაბამის მნიშვნელობას საკუთრივ რიცხვს. რადგანაც (3) განტოლება არის წრფივი და ერთგვაროვანი $\varphi_\nu(\mu)$-ს მიმართ მოხერ-ხებულობისათვის შემოაქვთ ნორმირება:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_\nu(\mu) d\mu = 1 \qquad (4)$$

ν-ზე გამრავლების შემდეგ ნორმირების პირობის გათვალისწინებით (3) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$(\nu-\mu)\varphi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2} \qquad (5)$$

თუ, ν არ მდებარეობს ნამდვილი ღერძის $[-1,+1]$ მონაკვეთზე მაშინ (5) ფორმულიდან მივიღებთ:

$$\varphi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2}\frac{1}{\nu-\mu}$$

ნორმირების (4) ფორმულიდან ვპოულობთ, რომ ეს ფესვები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\Lambda(\nu) = 0 \qquad (6)$$

სადაც,

$$\Lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{\nu-\mu}$$

ამრიგად, საკუთრივი რიცხვები წარმოადგენენ (6) განტოლების ამონახსნებს. მტკიცდება, რომ აღნიშნულ განტოლებას გააჩნია ორი ფესვი $\pm\nu_0$. როცა $c<1$ ეს ფესვები ნამდვილია. ხოლო, როცა $c>1$ მაშინ წმინდა წარმოსახვითი. იმ შემთხვევაში როცა $c \to 1$ მაშინ ფესვები მიისწრაფიან უსასრულობისაკენ. საკუთრივი რიცხვების მოძებნის შემდეგ შეგვიძლია

ვიპოვოთ საკუთრივი ფუნქციები. აღვნიშნოთ $\varphi_{0\pm}(\mu)$-ით საკუთრივი ფუნ-ქციები, რომლებიც შეესაბამებიან $\pm\nu_0$ საკუთრივ რიცხვებს, მაშინ ფუნქცია

$$\varphi_{0\pm}(\mu)=\pm\frac{c\nu_0}{2}\frac{1}{\pm\nu_0-\mu} \tag{7}$$

წარმოადგენს დისკრეტულ საკუთრივ ფუნქციას გადატანის (3) მახასი-ათებელი განტოლებისათვის. შევნიშნოთ, რომ ეს ფუნქციები მიღებულია იმ დაშვებებში როცა $\nu_0 \notin [-1,+1]$. როცა $\nu_0 \in [-1,+1]$ მაშინ, (5) განტოლებას უწყვეტ ფუნქციათა კლასში არ აქვს ამონახსნი. სამაგიეროდ გააჩნია განზო-გადებული ამონახსნი სობოლევ-შვარცის განზოგადებულ ფუნქციათა კლასში. (5) განტოლების ამონახსნს, როცა $\nu_0 \in [-1,+1]$ აქვს სახე, სადაც ნებისმიერი

$$\varphi_\nu(\mu)=\frac{c\nu}{2}\frac{1}{\nu-\mu}+\lambda(\nu)\delta(\nu-\mu)\ , \tag{8}$$

სადაც, $\lambda(\nu)$ ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქციაა, ხოლო $\delta(x)$ დირაკის განზო-გადებული დელტა ფუნქცია, რომელსაც შემდეგი თვისება გააჩნია

$$x\delta(x)\equiv 0\,.$$

ამაში შეიძლება დავრწმუნდეთ თუ შევიტანთ (8) ფუნქციას (5) განტო-ლებაში.

ნორმირების (4) პირობის გათვალისწინებით ვპოულობთ

$$\lambda(\nu)=1-\frac{c\nu}{2}P\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{\nu-\mu}, \tag{9}$$

სადაც, $$P\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{\nu-\mu}$$

ნიშნავს შესაბამის ინტეგრალს კოშის მთავარი მნიშვნელობის აზრით.

ამრიგად, გარდა ორი საკუთრივი რიცხვისა $\pm\nu_0$, არსებობს კონტინუმ რაოდენობის ν, [-1,+1] სეგმენტიდან, რომლის შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციები განისაზღვრება (8) ფორმულით, სადაც $\lambda(\nu)$-ს აქვს (9) სახე. ეს საკუთრივი ფუნქციები აკმაყოფილებენ შემდეგ ორთოგონალობის პირობას

$$\int_{-1}^{+1} \mu\varphi_{\nu}(\mu)\varphi_{\nu'}(\mu)d\mu = 0\,,\ \nu \neq \nu'\,,$$

სადაც, $\nu\,,\nu'$-ით აღნიშნულია საკუთრივი მნიშვნელობანი რომლებიც ეკუთვნიან, როგორც დისკრეტულ, ასევე უწყვეტ სპექტრს. უწყვეტი სპექტრის ფუნქციებისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$\int_{-1}^{+1} \mu\varphi_{\nu}(\mu)\varphi_{\nu'}(\mu)d\mu = N(\nu)\delta(\nu-\nu')\,,$$

სადაც,

$$N(\nu) = \frac{\Lambda^{+}(\nu)}{\Lambda^{-}(\nu)}\,,$$

ხოლო, $\Lambda^{\pm}(\nu)$-ით აღნიშნულია $\Lambda(\nu)$-ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $\mathrm{Im} \to 0^{\pm}$, $\mathrm{Re}\,\nu \in [-1,+1]$. იმისათვის რომ ეს საკუთრივი ფუნქციები გამოყენებულ იქნან ჩვეულებრივი სახით, აუცილებელია დამტკიცებულ იქნას, რომ ისინი წარმოადგენენ სრულ სისტემას იმ აზრით, რომ საკმარისად ფართო კლასის μ ცვლადის ნებისმიერი ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც $\varphi_{0\pm}(\mu)$ და $\varphi_{\nu}(\mu)$ ფუნქციების წრფივი კომბინაცია.

ვიტყვით, რომ $\varphi(t)$-ფუნქცია, რომელიც მოცემულია L-წირზე აკმაყოფილებს ჰელდერის H - პირობას თუ ნებისმიერი ორი t_2- და t_1-წერტილებისათვის L-დან გვაქვს

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leq A|t_2 - t_1|^{\alpha}\ .$$

სადაც, A - და α - დადებითი სიდიდეებია. ხოლო, თუ $\varphi(t)$ ფუნქცია რომელიც აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას (L)- წირის ყოველ ჩაკეტილ ნაწილში გარდა ბოლოებისა და ნებისმიერ ბოლო წერტილში ის წარმოდგინდება შემდეგი სახით:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^{*}(t)}{(t-c)^{\alpha}}\ ,\quad 0 \leq \alpha < 1$$

სადაც, $\varphi^*(t)$ ჰელდერის კლასის ფუნქციაა H^*. ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას $\varphi_{0\pm}(\mu)$ და $\varphi_\nu(\mu)$ ფუნქციები ქმნიან სრულ სისტემას $-1<\mu<+1$ შუალედში განსაზღვრული H^*კლასის $\psi(\mu)$ ფუნქციისათვის.

ამრიგად, მტკიცდება, რომ H^* კლასის ნებისმიერი $\psi(\mu)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით

$$\psi(\mu)=a_{+0}\varphi_{+0}(\mu)+a_{-0}\varphi_{-0}(\mu)+\int_{-1}^{+1}A(\nu)\varphi_\nu(\mu)d\nu\,,\ \mu\in(-1,+1)\,,$$

სადაც, $a_{\mp}$ და $A(\nu)$ განაშალის კოეფიციენტებია, $\psi(\mu)$ H^* კლასის ფუნქციაა. ამ თეორემის საფუძველზე იხსნება, ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის განაწილების ამოცანა. ამ ამოცანის ამოხსნას ზოგჯერ უწოდებენ გრინის ფუნქციას უსასრულო გარემოსთვის. ეს ამოცანა დაიყვანება შემდეგი განტოლების ამოხსნამდე

$$\mu\frac{\partial G}{\partial x}+G(x,\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{+1}G(x,\mu')d\mu' \tag{10}$$

$$x\in]-\infty,0[\cup]0+\infty[,\ \mu\in]-1,+1[$$

დამატებითი პირობებით

$$2\pi\mu(G(0^+,\mu)-G(0^-,\mu))=\delta(\mu-\mu_0)\,,\quad \mu,\mu_0\in]-1,+1[\,, \tag{11}$$

და

$$\lim_{x\to\infty}G(x,\mu)=0\,. \tag{12}$$

აქ იგულისხმება, რომ $c<1$. იმისათვის რომ (12) პირობა შესრულდეს (10) განტოლების ამონახსნი იძებნება შემდეგი სახით:

$$\begin{aligned}G(x,\mu)&=a_{+\nu_0}e^{-x/\nu_0}\varphi_{+0}(\mu)+\int_0^{+1}A(\nu)e^{-x}\varphi_\nu(\mu)d\nu\,,\quad x>0\\ G(x,\mu)&=-a_{-\nu_0}e^{x/\nu_0}\varphi_{-0}(\mu)-\int_{-1}^{0}A(\nu)e^{-x}\varphi_\nu(\mu)d\nu\,,\quad x<0\,.\end{aligned} \tag{13}$$

აქ, $a_{\pm\nu_0}$ უცნობი რიცხვებია, ხოლო $A(\nu)$ უცნობი ფუნქცია. ამოცანას წარმოადგენს ამ სიდიდეების პოვნა. როცა $x\to 0$ (13) ფორმულები გადადიან შესაბამისად შემდეგ ფორმულებში

$$G(0^+,\mu)=a_{+\nu_0}\varphi_{+0}(\mu)+\int_0^{+1}A(\nu)\varphi_\nu(\mu)d\nu\,,$$

(14)

$$G(0^-,\mu)=-a_{-\nu_0}\varphi_{-0}(\mu)-\int_{-1}^{0}A(\nu)\varphi_\nu(\mu)d\nu\,.$$

ნახტომის პირობა დადის შემდეგ ტოლობაზე

$$\frac{\delta(\mu-\mu_0)}{2\pi\mu}=a_{+0}\varphi_{+0}(\mu)+a_{-0}\varphi_{-0}(\mu)+\int_{-1}^{+1}A(\nu)\varphi_\nu(\mu)d\nu\,,\ \mu\in(-1,+1)\,, \quad (15)$$

მიღებული (16) ტოლობა არის

$$\psi(\mu)=\frac{\delta(\mu-\mu_0)}{2\pi\mu} \quad (16)$$

ფუნქციის წარმოდგენა საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით. განაშალის კოეფიციენტები მიიღებიან (16) წარმოდგენიდან, თუ მას გავამრავლებთ $\mu\varphi_\nu(\mu)$-ზე და ვაინტეგრებთ μ ცვლადით და ვისარგებლებთ ორთოგონალობის პირობით

$$a_{\pm\nu_0}=\frac{1}{N_{\pm\nu_0}}\int_{-1}^{+1}\frac{\mu\varphi_{\pm\nu_0}(\mu)\delta(\mu-\mu_0)}{2\pi\mu}d\mu=\frac{1}{2\pi}\frac{\varphi_{\pm\nu_0}(\mu_0)}{N_{\pm\nu_0}} \quad (17)$$

$$A(\nu)=\frac{1}{2\pi}\frac{\varphi_\nu(\mu_0)}{N(\nu)}\ ,\quad \nu\in(-1,+1)\,, \quad (18)$$

აქ,

$$N_{\pm\nu_0}=\int_{-1}^{+1}\mu\varphi_{\pm\nu_0}{}^2(\mu)d\mu\,,\ \text{ხოლო}\ N(\nu)=\frac{\Lambda^+(\nu)}{\Lambda^-(\nu)}.$$

მრავალ ამოცანაში, რომელშიც არსებობს ფიზიკური საზღვარი გაბნევად გარემოსა და ვაკუმს შორის, სასაზღვრო პირობა აღწერს გარედან დაცემული ნეიტრონების კუთხურ განაწილებას და მოიცემა ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრულია ნახევარ მონაკვეთზე. განვიხილოთ ე.წ. ალბედოს ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს ნახევარ სივრცეში, რომლებშიც არ არის წყაროები განაწილებული და რომლის საზღვარზე ეცემა ნეიტრონების ნაკადი, ფაზური სიმკვრივის განაწილების პოვნაში, აღნიშნული ამოცანა მიიყვანება გადატანის ერთგვაროვანი განტოლების ამოხსნამდე

$$\mu \frac{\partial \Psi_a}{\partial x} + \Psi_a(x,\mu) = \frac{c}{2}\int_{-1}^{+1} \Psi_a(x,\mu')d\mu'$$
$$x \in]0,+\infty[,\ \mu \in [-1,+1]$$

რომელიც აკმაყოფილებს პირობას:

$$\Psi_a(0,\mu) = \delta(\mu-\mu_0),\quad \mu > 0 \qquad (19)$$

როცა $x \to \infty$. ასეთი ამონახსნი წარმოდგინდება შემდეგნაირად:

$$\Psi_a(x,\mu) = a_{+\nu_0} e^{-x/\nu_0} \varphi_{+0}(\mu) + \int_0^{+1} A(\nu) e^{-x} \varphi_\nu(\mu) d\nu \qquad (20)$$

სადაც, $a_{+\nu_0}$ და $A(\nu)$ კოეფიციენტები, რომლებიც განსხვავებით წინა ამოცანისაგან, განისაზღვრებიან (19) პირობიდან. ამრიგად მივდივართ შემდეგ დამოკიდებულებამდე:

$$a_{+0}\varphi_{+0}(\mu) + \int_0^{+1} A(\nu)\varphi_\nu(\mu)d\nu = \delta(\mu-\mu_0),\ \mu \in (0,+1), \qquad (21)$$

რომელიც არსებითად განსხვავდება შესაბამისი (15) ტოლობისაგან, გრინის ფუნქციის ამოცანისაგან, რამდენადაც ამ შემთხვევაში დამატებით გვაქვს დადებითობის პირობა μ ცვლადისთვის. ამ შემთხვევაში გამოიყენება სის-რულის თეორემა ნახევარ მონაკვეთზე, რომელიც ყალიბდება შემდეგნაირად.

თეორემა. $0 < \mu < +1$ შუალედზე განსაზღვრული $\psi(\mu)$ ფუნქციებისა-თვის H^* კლასიდან $\varphi_{0+}(\mu)$ და $\varphi_\nu(\mu)$ ($0 < \nu < +1$) ფუნქციები ქმნიან სრულ სისტემას.

საკუთრივი ფუნქციები $0 < \mu < +1$ ნახევარ ინტერვალში არ წარმოადგე-ნენ ორთოგონალურ სისტემას μ წონით. შესაბამისი წონითი ფუნქციის მოსაძებნად საჭიროა ამოიხსნას მარტივი სინგულარული განტოლება. საკუთრივი ფუნქციების საშულებით გაშლის მეთოდი ანიზოტროპული გაბნევის შემთხვევაში განზოგადებული იყო ი. მიკას მიერ [2] იმ დაშვებე-ბით, როცა გაბნევის ინდიკატრისა საკმარისი სიზუსტით აპროქსიმირდება ლეჟანდრის პოლინომების სასრული ჯამებით. მაშინ, გადატანის განტო-ლება ღებულობს სახეს:

$$\mu \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi(x,\mu) = \frac{c}{2}\sum_{l=0}^{N}(2l+1) f_l P_l(\mu)\int_{-1}^{+1} P_l(\mu')\Psi(x,\mu')d\mu' \qquad (22)$$

$$x \in]-\infty,+\infty[,\ \mu \in (-1,+1)\,.$$

როგორც იზოტროპული გაბნევის შემთხვევაში, ამ განტოლების ამონახსნიც $\Psi(x,\mu)$ იძებნება შემდეგი სახით:

$$\Psi(x,\mu) = \varphi_\nu(\mu)\exp(-x/\nu). \qquad (23)$$

(22) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$(\nu-\mu)\varphi_\nu(\mu) = \frac{c\nu}{2}\sum_{l=0}^{N}(2l+1) f_l P_l(\mu)\int_{-1}^{+1} P_l(\mu')\varphi_\nu(\mu)d\mu'\,. \qquad (24)$$

ამ განტოლების ორივე მხარეს ვამრავლებთ $P_k(\mu)$-ზე და შემდგომში აინტეგრებენ μ ცვლადით. შემოგვაქვს აღნიშვნები

$$\int_{-1}^{+1} P_k(\mu)\varphi_\nu(\mu)d\mu \equiv \varphi_{\nu,k}\,.$$

იმის გათვალისწინებით, რომ

$$\int_{-1}^{+1} P_k(\mu)P_l(\mu)d\mu = \frac{2}{2l+1}\delta_{l\,k}$$

და

$$\mu P(\mu) = \frac{1}{2l+1}[(l+1)P_l(\mu) + lP_l(\mu)]\ ,$$

პოულობენ $\varphi_{\nu,k}$-სათვის შემდეგ რეკურენულ დამოკიდებულებას

$$\nu(1-cf_k)\varphi_{\nu,k} - \frac{k+1}{2k+1}\varphi_{\nu,k+1} - \frac{k}{2k+1}\varphi_{\nu,k-1} = 0. \qquad (25)$$

ამ ფორმულებიდან ჩანს, რომ ყველა $\varphi_{\nu,k}$ პროპორციულია $\varphi_{\nu,0}$-ის. ნორმირების პირობიდან გამომდინარე გვაქვს შემდეგი ტოლობა $\varphi_{\nu,0}=1$. ამ შემთხვევაში ყველა $\varphi_{\nu,k}$, როცა $k>1$, განსაზღვრულია და მოიცემა (25) რეკურენტული დამოკიდებულებიდან. (24) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$(\nu-\mu)\varphi_\nu(\mu) = \frac{c}{2}\sum_{l=0}^{N}(2l+1) f_l \varphi_{\nu,l} P_l(\mu)\,.$$

შემდგომი მსჯელობა ანალოგიურია მსჯელობისა იზოტროპული გაბნევის შემთხვევაში.

ზედნარჟმა და მიკამ [3] ეს მიდგომა გამოიყენეს გადატანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლებისათვის. მათ განიხილეს ბოლცმანის შემდეგი სახის განტოლება:

$$l(E)\mu\frac{\partial\tilde{\Psi}}{\partial x}+\tilde{\Psi}(x,\mu)=\int_{E_1}^{E_2}dE'\int_{-1}^{+1}d\mu'\,\tilde{K}(\mu,E;\mu'E')\tilde{\Psi}(x,\mu',E') \qquad (26)$$

$$x\in]-\infty,+\infty[,\ \mu\in(-1,+1),\ E\in[E_{1,}E_2].$$

ცვლადთა გარდაქმნის შედეგად

$$v=\mu\,l(E)\ ,\ \ v'=\mu\,l(E'),$$

(26) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$v\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi(x,\mu,E)=\int_{-1}^{+1}dv'\int_{M(v')}dE'\,K(\mu,E;\mu'E')\Psi(x,\mu',E') \qquad (27)$$

$$E\in M(v),\ v\in(-1,+1),$$

სადაც, $M(v)=\{E\in[E_1,E_2]:l(E)\geq v,v\in(-1,+1)\}$.

როგორც წინა შემთხვევაში, ამ განტოლების ამოხსნა $\Psi(x,\mu,E)$ იძებნება შემდეგი სახით

$$\Psi(x,v,E)=\varphi_t(v,E)\exp(-x/t).$$

(27) განტოლებიდან მივიღებთ:

$$(t-v)\varphi_t(v,E)=t\int_{-1}^{+1}dv'\int_{M(v')}dE'\,K(v,E;v'E')\varphi_t(v',E') \qquad (28)$$

α_i ამ განტოლების დისკრეტული საკუთრივი რიცხვებია, $\varphi_{\alpha_i}(v,E)$ კი - დისკრეტული საკუთრივი ფუნქციები. განზოგადებულ ამონახსნს აქვს სახე:

$$\varphi_t(v,E)=\frac{tH(t,v,E)}{t-v}+\lambda(t,E)\delta(t-v). \qquad (29)$$

ფუნქციები $H(t,\nu,E)$ და $\lambda(t,E)$ დაკავშირებული არიან შემდეგი თანაფარდობით:

$$H(t,\nu,E)+t\int_{-1}^{+1}\frac{d\nu'}{\nu'-t}\int_{m(\nu')}dE'\,K(\nu,E;\nu',E')H(t,\nu',E')=$$
$$=\int_{M(t)}dE'\,K(\nu,E,t,E')\lambda(t,E') \qquad (30)$$

განსახილველ შემთხვევისათვის სისრულის თეორემა მთელი ინტერ-ვალისათვის დაიყვანება იმის დასაბუთებაზე, რომ განსაზღვრული კლასის ნებისმიერ ფუნქციისათვის სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა:

$$\psi(\nu,E)=t\int_{-1}^{+1}\frac{sH(s,\nu,E)}{s-\nu}ds+\lambda(\nu,E)+\sum_i A_i\varphi_{\nu_i}(\nu,E) \qquad (31)$$

სადაც,

$$A_i=\int_{-1}^{+1}d\nu\int_{N(\nu)}dE\nu\,\psi(\nu,E)\varphi^{*}{}_{\alpha_i}(\nu,E)$$

ხოლო, $\varphi_{\alpha_i}{}^{*}(\nu,E)$ წარმოადგენს (28)-ის შეუღლებული განტოლების საკუთრივ ფუნქციას. მტკიცდება, რომ (30)-(31) სისტემას უწყვეტ ფუნქცია-თა კლასში გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი.

1960 წ. ლეონარდმა და ფერციგერმა [4] განიხილეს იზოტროპული გაბნევის შემთხვევა საკუთხო ცვლადის მიმართ. ბოლცმანის განტოლებას ჰქონდა სახე:

$$\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Sigma_t(E)\Psi(x,\mu,E)=\int_{-1}^{+1}d\mu'\int_0^{\infty}dE'\,\Sigma_s(E,E')\Psi(x,\mu',E')$$
$$x\in]-\infty,+\infty[,\ \mu\in(-1,+1),\ E\in[0,\infty[.$$

რომლის ინდიკატრისას $\Sigma_s(E',E)$ შემდეგი თვისება გააჩნია

$$M(E')\Sigma_s(E',E)=M(E)\Sigma_s(E,E')$$

სადაც, $M(E)=Ee^{-E}$. ამ შემთხვევაშიც ამონახსნი იძებნება შემდეგი სახით:

$$\Psi(x,\mu,E)=e^{-x/\nu}F(\nu,\mu,E).$$

$F(\nu,\mu,E)$-თვის ვღებულობთ შემდეგ განტოლებას:

$$(-\frac{\mu}{\nu}+\Sigma_t(E))F(\nu,\mu,E)=\int_{-1}^{+1}d\mu'\int_0^{\infty}dE'\Sigma_s(E,E')F(\nu,\mu',E') \qquad (32)$$

განსხვავებით ზედნარჟისა და მიკას ნაშრომისაგან, $F(\nu,\mu,E)$-ის საპოვნელად გამოყენებულია ახალი მიდგომა, რომელიც მდგომარეობს შემდეგში: $F(\nu,\mu,E)$- საკუთრივი ფუნქციის აპროქსიმირება ხდება ლაგერის პოლინომების საშუალებით:

$$F(\nu,\mu,E)=M(E)\sum_{j=1}^{N}f^{j}(\nu,\mu)L_j^{(1)}(E). \qquad (33)$$

თუ შევიტანთ (34)-ს (33)-ში მივიღებთ შემდეგ თანაფარდობას:

$$\sum_{j=1}^{N}(-\frac{\mu}{\nu}+\Sigma_t(E))M(E)L_j^{(1)}(E)f^{j}(\nu,\mu),$$

$$-f_0^{j}(\nu)\int_0^{\infty}dE'\Sigma_s(E,E')M(E')L_j^{(1)}(E')dE'=0. \qquad (34)$$

სადაც,

$$f_0^{j}(\nu)=\int_{-1}^{+1}f^{j}(\nu,\mu)d\mu.$$

გავამრავლოთ (35) განტოლება $L_k^{(1)}(E)$-ზე და ვაინტეგროთ E ცვლადით, მივიღებთ:

$$\sum_{j=1}^{N}((-\frac{\mu}{\nu}\delta_{j,k}+V_{j,k})f^{j}(\nu,\mu)-\alpha_{j,k}f_0^{j}(\nu))=0$$

სადაც,

$$V_{jk}=V_{kj}=\int_0^{\infty}M(E)L_j^{(1)}(E)\Sigma_t(E)L_k^{(1)}(E)dE$$

და

$$\alpha_{jk}=\int_0^{\infty}dEL_k^{(1)}(E)\int_0^{\infty}dE'\Sigma_s(E',E)M(E')L_j^{(1)}(E)\Sigma_t(E)L_{jk}^{(1)}(E')dE'$$

ან მატრიცული ფორმით

$$(-\frac{\mu}{\nu}I+V)f(\nu,\mu,)=\alpha f(\nu)$$

სადაც, I ერთეულოვანი მატრიცაა, V და α მატრიცებია ელემენტებით V_{jk} და α_{jk} შესაბამისად, ხოლო $f(\nu,\mu)$ და $f(\nu)$ ვექტორებია კომპონენტებით $f^j(\nu,\mu)$ და $f^j(\nu)$. შემდგომში მეთოდი ემთხვევა კეისის მეთოდს. მტკიცდება სისრულის თეორემები როგორც სრული ინტერვალისათვის ასევე ნახევარ ინტერვალისათვის.

1971 წელს ტომეჯირო იამაგიშის ნაშრომში [5] განხილული იყო გადატანის სპეციფიკური განტოლება:

$$\frac{\mu}{\Sigma(v)}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi(x,\mu,v)=\frac{\beta}{2}\Sigma_s(v)m(v)\int_{-1_1}^{+1}d\mu'\int_0^{\infty}dv'\frac{\Sigma_s(v')}{\Sigma(v')}\Psi(x,\mu',v')$$

$$x\in]-\infty,+\infty[,\ \mu\in(-1,+1),\ v\in[0,\infty[\ .$$

გარდაქმნის შემდეგ აღნიშნული განტოლება ღებულობს შემდეგ სახეს

$$\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi(x,\mu)=\frac{c(\mu)}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi(x,\mu')d\mu'$$

$$x\in]-\infty,+\infty[,\ \mu\in[-1,+1]$$

რომელიც, წარმოადგენს გადატანის ერთსიჩქარიან განტოლებას. მისთვის ნაპოვნია საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა და დამტკიცებულია სისრულის თეორემები, როგორც სრული ინტერვალისათვის, ასევე, ნახევარ ინტერვალისათვის.

მსგავსი შედეგი მიღებულია გადატანის მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლებისათვის დ. შულაიას მიერ [13,14]. განხილულ განტოლებას აქვს სახე:

$$l(E)\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi(x,\mu,E)=\int_{E_1}^{E_2}dE'\int_{-1}^{+1}d\mu'\,K(\mu,E;\mu'E')\Psi(x,\mu',E') \qquad (35)$$

$$x\in]-\infty,+\infty[,\ \mu\in(-1,+1),\ E\in[E_{1,}E_2].$$

განტოლება უშვებს ცვლადთა განცალებას

$$\Psi(x,\mu,E)=\varphi_\nu(\mu,E)\exp(-x/\nu)$$

რის შედეგად მიიღება შემდეგი მახასიათებელი განტოლება, რომელიც გამოისახება შემდეგნაირად:

$$(\nu - \mu l(E))\varphi(x,\mu,E) = \frac{c\nu}{2}\int_{E}^{E_2}\int_{-1}^{+1} K(\mu,E;\mu',E')\varphi_{\nu}(\mu',E'))d\mu' dE'$$

$$\mu \in (-1,+1), E \in [E_{1,} E_2]$$

აგებულ იქნა სინგულარული საკუთრივი ფუნქციათა კლასი შემდეგი სახით:

$$\varphi_{\nu,(\varsigma)}(\mu,E) = \frac{c\nu}{2}\frac{m(\nu,\varsigma;\mu,E)}{\nu - \mu l(E)} + (\delta(E-\varsigma) - \frac{c\nu}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu,\varsigma;\mu' E)}{\nu - \mu' l(E)}d\mu')\delta(\nu - \mu l(E)),$$

$$\mu,\nu \in (-1,+1), \quad E,\varsigma \in [E_1,E_2],$$

სადაც, $m(\nu,\varsigma;\mu,E)$ მეორე გვარის ფრედგოლმის ინტეგრალური განტოლე-ბის ამონახსნია

$$m(\nu,\varsigma;\mu,E) = K(\mu,E;\nu,\varsigma)\vartheta(\nu - l(\varsigma)) +$$

$$+\frac{c\nu}{2}\int_{E_1}^{E_2}\int_{-1}^{+1}\frac{K(\mu,E;\mu',E) - \vartheta(\nu - l(E'))K(\mu,E;\nu l(E'),E')}{\nu - \mu' l(E')}m(\nu,E;\mu',E')d\mu' dE'$$

$$\mu,\nu \in (-1,+1), \quad E,\varsigma \in [E_1,E_2].$$

ჩვენს მიერ ნაჩვენებია, რომ რეგულარულ და სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა, უწყვეტ ფუნქციათა კლასში, სრულ სისტემას წარმოადგენს. ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ ამოხსნის თვალსაზრისით არსებობს გარკვეული ხასიათის ანალოგია კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებსა და ჩვენს მიერ განსახილველი მოდელური განტოლებისათვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანებს შორის.

ამრიგად, რეგულარული და სინგულარული საკუთრივი ფუნქციები რომელთა საშუალებით შეიძლება ავაგოთ ე.წ. ელემენტარული ამონახსნები გადატანის განტოლებისთვის, დამოუკიდებელნი არიან სასაზღვრო ამოცანის დასმაზე. რეგულარულ და სინგულარულ საკუთრივი ფუნქციებს შეიძლება ვუწოდოთ როგორც ფუნდამენტალური ამონახსნი. აღნიშნული სისტემა სრული უნდა იყოს იმ აზრით, რომ მათი საშუალებით ჯამის და ინტეგრალის დახმარებით შესაძლებელი იყოს ნებისმიერი უწყვეტი

ფუნქციის წარმოდგენა. რაც შესაძლებელს გახდის გატარებულ იქნას კეისის მეთოდიკა უფრო რთული ხასიათის ამოცანებისათვის, როგორიცაა გაზურ გარემოში სინათლის მრავალჯერადი გაბნევის თეორიის ბოლცმანის ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისათვის დასმული ამოცანები. გამოსავალი: გადატანის განტოლებასთან ერთად განხილული უნდა იქნას შეუღლებული ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება. რომლისთვისაც ასევე უნდა აიგოს სრული ფუნდამენტალური სისტემა. აღნიშნული სისტემები ბიორთოგონალური იქნებიან. აღნიშნული თვისება ხშირად ეფექტურია და ხელს უწყობს ამონახსნის აგებას. კვლევის აპარატს წარმოადგენს სინგულარული ინტეგრალი. კვლევის მეთოდიკა დაფუძნებულია სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლების თეორიაზე. გამოყენებულია აგრეთვე განზოგადებულ ფუნქციათა თეორიის საფუძვლები. რაც საშუალებას მოგვცემს გადატანის თეორიის ე.წ. ელემენტარული ამონახსნები წარმოდგენილ იქნას ცხადად განზოგადებული ფუნქციების საშუალებით.

2. შედეგები და მათი განსჯა

2.1. უსასრულო გარემოში გადატანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის გადაგვარებული გულის მქონე განტოლებისათვის დასმული ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანა

2.1.1. არაერთგვაროვანი განტოლებისათვის დასმული ნახტომის ამოცანა

განვიხილოთ ნეიტრონების გადატანის წრფივი თეორიის ერთი არა-ერთგვაროვანი სტაციონალური განტოლება, რომელიც გვხვდება მათემა-ტიკური ფიზიკის მრავალი მნიშვნელოვანი ამოცანების კვლევისას [16,19]

$$\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\Psi(x,\mu,E)=$$

$$=\frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\alpha\,(E)\alpha(E')\Psi(x,\mu',E')d\mu'dE'+f(x,\mu,E), \qquad (36)$$

$$x\in(-\infty,+\infty),\quad \mu\in]-1,+1[,\quad E\in[E_0,E_1],$$

შემდეგი დამატებითი პირობებით:

i_1)

$$\Psi^+(x_0,\mu,E)-\Psi^-(x_0,\mu,E)=\psi(\mu,E)$$

$$x_0\in(-\infty,+\infty)\quad \mu\in]-1,+1[,\quad E\in[E_0,E_1].$$

i_2)

$$\lim_{|x|\to\infty}\Psi\,(x,\mu,E)=0$$

$$x\in(-\infty,+\infty),\quad \mu\in]-1,+1[,\quad E\in[E_0,E_1].$$

სადაც, $\alpha(E)$ არის უწყვეტი ფუნქცია და ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ჩავთვალოთ რომ

$$\int_{E_0}^{E_1}\alpha^2\,(E)dE=1$$

მოვითხოვთ, რომ ფუნქცია $f(x,\mu,E)$ არის ასევე უწყვეტი, ქრობადი უსასრუ-ლობაში, როცა $|x|\to\infty$, დიფერენცირებადი, ასევე x ცვლადის მიმართ, აკმაყოფილებს H^* პირობებს [1] μ ცვლადის მიმართ, ფუნქცია $\psi(\mu,E)$ არის უწყვეტი და აკმაყოფილებს H^* პირობებს μ ცვლადის მიმართ. ჩვენ გვინდა ვიპოვოთ უსასრულობაში ქრობადი x ცვლადის მიმართ უწყვეტი ამოხსნა

$|x| \to \infty$, (27) განტოლებისა, რომელიც აკმაყოფილებს H^* პირობებს μ ცვლადის მიმართ. ამასთან მოითხოვება დამატებით ორი i_1) და i_2) პირობის დაკმაყოფილება.

გავიხსენოთ, ვიტყვით, რომ ფუნქცია $\varphi(t)$ აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას (H პირობას) რაიმე გლუვ Γ კონტურზე თუ ყოველი ორი t_1 და t_2 წერტილისათვის Γ კონტურიდან ადგილი აქვს უტოლობას

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq A|t_1 - t_2|^\gamma$$

სადაც, A და γ ნებისმიერი დადებითი მუდმივი რიცხვებია. თუ ფუნქცია φ*(t), რომელიც მოცემულია Γ კონტურზე აკმაყოფილებს H პირობას ყოველ ჩაკეტილ ნაწილში Γ კონტურისა, რომელიც არ შეიცავს კონტურის ბოლოებს, ხოლო ბოლოებში წარმოიდგინება შემდეგი სახით

$$\varphi^*(t) = \frac{\varphi(t)}{|t-c|^\delta}, \qquad 0 \leq \delta < 1$$

სადაც, $\varphi(t)$ ჰელდერის კლასის ფუნქციაა, მაშინ ამბობენ, რომ $\varphi^*(t)$ ეკუთვნის H^* კლასს Γ კონტურზე. ხშირად მას მუსხელიშვილის კლასს უწოდებენ.

2.1.2. მახასიათებელი განტოლება

(36) განტოლებასთან ერთად განვიხილოთ შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$\mu \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + \Psi_0(x,\mu,E) =$$

$$= \frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} \alpha\,(E)\alpha(E')\Psi_0(x,\mu',E')d\mu' dE', \qquad (37)$$

$$x \in (-\infty, +\infty), \quad \mu \in]-1,+1[, \quad E \in [E_0, E_1].$$

ეს განტოლება უშვებს ცვლადთა განცალებას. მართლაც, ვეძებოთ ერთგვაროვანი (37) განტოლების ამონახსნი Ψ_0 (x,μ,E) შემდეგი სახით:

$$\Psi_0(x,\mu,E) = U_\nu(x)\varphi_\nu(\mu,E)$$

სადაც, ν პარამეტრია. თუ აღნიშნულს შევიტანთ (28) განტოლებაში, გვექნება:

$$\left(\mu\frac{\partial U_\nu(x)}{\partial x}+U_\nu(x)\right)\varphi_\nu(\mu,E)=\frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\alpha\,(E)\alpha(E')U_\nu(x)\varphi_\nu(\mu',E')d\mu'dE'.$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\mu\left(\frac{\partial U_\nu(x)}{\partial}x+\frac{1}{\nu}U_\nu(x)\right)\varphi_\nu(\mu,E)+\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)U_\nu(x)\varphi_\nu(\mu,E)-$$

$$-\frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\alpha\,(E)\alpha(E')U_\nu(x)\varphi_\nu(\mu',E')d\mu'dE'=0.$$

ამ უკანასკნელის საფუძველზე $U_\nu(x)$ და $\varphi_\nu(\mu,E)$ ფუნქციებისათვის შეგვიძლია დავადგინოთ შემდეგი ტოლობების სამართლიანობა

$$\frac{\partial U_\nu(x)}{\partial x}+\frac{1}{\nu}U_\nu(x)=0 \qquad (38)$$

და

$$\left(1-\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi_\nu(\mu,E)=$$

$$=\frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\alpha\,(E)\alpha(E')\varphi_\nu(\mu',E')d\mu'dE' \qquad (39)$$

როგორც ცნობილია (29)-ის სახის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$U_\nu(x)=\exp\left(-\frac{x}{\nu}\right).$$

(39) განტოლებას უწოდებენ (28) ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების მახასიათებელ განტოლებას.

2.1.3. საკუთრივი რიცხვები და საკუთრივი ფუნქციები

როცა პარამეტრი ν იმყოფება [-1,+1] შუალედს გარეთ, მაშინ (30) განტოლება წარმოადგენს ფრედგოლმის მეორე გვარის ინტეგრალურ განტოლებას და ცნობილია რომ მას, პარამეტრის ორი $\pm\nu_0$ განსხვავებული მნიშვნელობისათვის რომლებსაც რეგულარულ საკუთრივ რიცხვებს უწოდებენ, გააჩნია შესაბამისი უწყვეტი ამონახსნები, რომლებსაც რეგულა-

რულ საკუთრივ ფუნქციებს უწოდებენ. რეგულარული საკუთრივი რიცხვები წარმოადგენენ შემდეგი ტრანსცენდენტული განტოლების

$$1-\frac{c\nu}{2}\ln\frac{1+1/\nu}{1-1/\nu}=0$$

ამონახსენებს. ეს განტოლება ლიტერატურაში კარგად არის შესწავლილი. თუ c<1 მაშინ ამ განტოლებას გააჩნია მოპირდაპირე ნიშნის მქონე ნამდვილი ამონახსნი და საკუთრივი რიცხვები ნამდვილია, ხოლო როცა c>1 მაშინ ამონახსნი ანუ საკუთრივი რიცხვები წმინდა წარმოსახვითი კომპლექსური რიცხვებია, როცა c→1 მაშინ საკუთრივი რიცხები მიისწრაფიან უსასრულობისაკენ. შესაბამის საკუთრივ ფუნქციებს აქვთ სახე

$$\varphi_{\pm}(\mu,E)=\pm\frac{c}{2}\frac{\nu_0\alpha(E)}{\pm\nu_0-\mu}.$$

საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა ორთოგონალურ სისტემას წარმოადგენს, რადგან ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\varphi_{\nu}\,(\mu,E)\varphi_{\nu^{`}}(\mu,E)d\mu dE=0,\qquad \nu\neq\nu'.$$

მართლაც, ფუნქცია $\varphi_\nu(\mu,E)$ აკმაყოფილებს (49) განტოლებას ე.ი.

$$(\nu-\mu)\varphi_\nu(\mu,E)=\frac{c\nu}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\alpha\,(E)\alpha(E')\varphi_\nu(\mu',E')d\mu'dE'.$$

$\varphi_{\nu'}(\mu,E)$ ფუნქციისათვის კი შესაბამისად გვაქვს:

$$(\nu'-\mu)\varphi_\nu(\mu,E)=\frac{c\nu}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\alpha\,(E)\alpha(E')\varphi_{\nu'}(\mu',E')d\mu'dE'.$$

ამ ორი ტოლობიდან პირველი გავამრავლოთ $\varphi_{\nu'}(\mu,E)$-ზე, ხოლო მეორე კი შესაბამისად $\varphi_\nu(\mu,E)$-ზე. პირველს გამოვაკლოთ მეორე, რის შედეგად გვექნება

$$(\frac{1}{\nu'}-\frac{1}{\nu})\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\varphi_{\nu}\,(\mu,E)\varphi_{\nu'}(\mu,E)d\mu dE=0,$$

რაც ადასტურებს ორთოგონალობის თვისებას. მანორმირებელ ინტეგრალებს აქვთ სახე:

$$N_{\pm}=\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\mu\,\varphi_\nu^2(\mu,E)d\mu dE=(\frac{c\nu_0}{2})^2\int_{-1}^{+1}\frac{\mu d\mu}{(\pm\nu_0-\mu)^2}$$

რომლებიც გამოითვლებიან შემდეგი ფორმულებით:

$$N_{+} = \frac{c}{2}\nu_0^2\left(\frac{c}{\nu_0^2-1}-\frac{1}{\nu_0^2}\right),$$

$$N_{-} = -N_{+}.$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ν პარამეტრის მნიშვნელობა [-1,+1] სეგმენტიდანაა. ცნობილია რომ [28-31] ν პარამეტრის ყოველი მნიშვნელობისათვის ამ შუალედიდან

$$\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E) = \frac{c\nu}{2}\frac{\alpha(E)\alpha(\zeta)}{\nu-\mu} + \left(\delta(\zeta-E) - \frac{c\nu}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{\alpha(E)\alpha(\zeta)}{\nu-\mu'}d\mu'\right)\delta(\nu-\mu)$$

$$\nu,\mu \in [-1,+1], \quad \zeta, E \in [E_0, E_1]$$

წარმოადგენს (39) განტოლების სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციას. ეს შეიძლება შემოწმებულ იქნას ამ ფუნქციის უშუალო ჩასმით (49) განტოლებაში. მართლაც თუ ამ უკანასკნელს შევიტანთ (30) განტოლებაში და ვისარგებლებთ დირაკის ფუნქციის თვისებით, გვექნება:

$$\frac{c\nu}{2}\alpha(E)\alpha(\zeta) = \frac{c\nu}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\frac{\alpha(E)\alpha(E')}{\nu-\mu'}d\mu' dE' + \frac{c\nu}{2}\alpha(E)\alpha(\zeta)$$

$$-\frac{c\nu}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\frac{\alpha(E)\alpha(E')}{\nu-\mu'}d\mu' dE'$$

რაც ადასტურებს იმას რომ ეს გამოსახულება წარმოადგენს (39) განტოლების სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციას, რომელიც ნორმირებულია შემდეგი ტოლობით:

$$\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)d\mu dE = 1.$$

საკუთრივ ფუნქციათა აღნიშნული სისტემა წარმოადგენს სრულ სისტემას [36]. რაც იმას ნიშნავს, რომ ნებისმიერი უწყვეტი $\psi(\mu,E)$ ფუნქცია, რომელიც μ ცვლადის მიმართ აკმაყოფილებს H^* პირობებს შეიძლება წარმოდგენილი იქნას შემდეგი სახით:

$$\psi(\mu,E) = a_{-}\varphi_{-}(\mu,E) + a_{+}\varphi_{+}(\mu,E) + \int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)d\nu d\zeta. \quad (40)$$

$a_{\pm}$ კოეფიციენტები გამოითვლებიან შემდეგნაირად:

$$a_{\pm} = \frac{1}{N_{\pm}}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\mu\,\varphi_{\pm}(\mu,E)\psi(\mu,E)d\mu dE$$

სადაც,

$$N_{\pm} = \int_{E_0}^{E_1} \int_{-1}^{+1} \mu\, \varphi_{\pm}^2(\mu, E) d\mu dE.$$

ფუნქცია $u(\nu, \zeta)$ წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულის საშუალებით

$$u(\nu, \zeta) = \int_{E_0}^{E_1} \int_{-1}^{+1} \mu\, \tilde{\varphi}_{\nu,(\zeta)}(\mu, E) \psi(\mu, E) d\mu dE,$$

აქ:

$$\tilde{\varphi}_{\nu,(\zeta)}(\mu, E) = \varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu, E)$$

$$+\frac{\rho(\nu)}{1-\rho(\nu)} \int_{E_0}^{E_1} \alpha(\zeta)\alpha(\zeta')\varphi_{\nu,(\zeta')}(\mu, E) d\zeta'$$

და

$$\rho(\nu) = 1 - \lambda^2(\nu) - \frac{\pi^2 c^2 \nu^2}{4},$$

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{\nu - \mu}.$$

2.1.4. დასმული ამოცანის ამონახსნის აგება

საკუთრივ ფუნქციათა სისტემის სისრულის თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ (37) განტოლების ზოგადი ამონახსნი წარმოდგენილია შემდეგნაირად:

$$\Psi_0(x, \mu, E) = a_- \exp((x - x_0)/\nu_0)\varphi_{-\nu_0}(\mu, E)$$

$$+a_+ \exp((x - x_0)/ - \nu_0)\varphi_{\nu_0}(\mu, E) \qquad (41)$$

$$+ \int_{E_0}^{E_1} \int_{-1}^{+1} a(\nu, \zeta) \exp(x - x_0/ - \nu)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu, E) d\nu d\zeta.$$

სისრულის ფორმულის გამოყენებით $f(x,\mu,E)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$f(x,\mu,E) = b_-(x)\varphi_-(\mu,E) + b_+(x)\varphi_+(\mu,E)$$

$$+\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} b(x,\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)d\nu d\zeta.$$

სადაც, კოეფიციენტები $b_\pm(x)$ და $b_{\nu,\zeta}(x)$ განისაზღვრებიან მსგავსად $a_\pm$ და $u(\nu,\zeta)$ კოეფიციენტებისა.

$$b_\pm(x) = \frac{1}{N_\pm}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} \mu\varphi_\pm(\mu,E)f(x,\mu,E)d\mu dE$$

აქ:

$$N_\pm = \int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} \mu\varphi_\pm^2(\mu,E)d\mu dE$$

ფუნქცია $b(x,\nu,\zeta)$ წარმოდგება შემდეგი ფორმულის საშუალებით:

$$b(x,\nu,\zeta) = \int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} \mu\tilde{\varphi}_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)f(x,\mu,E)d\mu dE, \qquad (42)$$

სადაც აგრეთვე გვაქვს:

$$\tilde{\varphi}_{\nu,(\zeta)}(\mu,E) = \varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)$$

$$+\frac{\rho(\nu)}{1-\rho(\nu)}\int_{E_0}^{E_1} \alpha(\zeta)\alpha(\zeta')\varphi_{\nu,(\zeta')}(\mu,E)d\zeta'$$

და

$$\rho(\nu) = 1 - \lambda^2(\nu) - \frac{\pi^2 c^2 \nu^2}{4},$$

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2}\int_{-1}^{+1}\frac{d\mu}{\nu - \mu}.$$

უშუალო ჩასმით დგინდება რომ ფუნქცია

$$\Psi(x,\mu,E) = \Psi_0(x,\mu,E)$$

$$+\int_{x_0}^{x} b_-(s)\varphi_{-\nu_0}(\mu,E)\exp((x-x_0)/(-\nu_0)ds$$

$$+\int_{x_0}^{x} b_+(s)\varphi_{\nu_0}(\mu,E)\exp((x-x_0)/\nu_0)ds \tag{43}$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} b(s,\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)\exp((x-x_0)/(-\nu_0)d\nu d\zeta ds$$

აკმაყოფილებს (36) განტოლებას.

ცხადია, რომ როცა $x > x_0$ ფუნქცია

$$\Psi(x,\mu,E) = a_+\varphi_+(\mu,E)\exp((x-x_0)/(-\nu_0)$$

$$+\int_{E_0}^{E_1}\int_{0}^{+1} u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)\exp((x-x_0)/(-\nu)d\nu d\zeta$$

$$+\int_{x_0}^{x} b_-(s)\varphi_-(\mu,E)\exp((x-x_0)/(-\nu_0)ds \tag{44}$$

$$+\int_{x_0}^{x} b(s)_+\varphi_+(\mu,E)\exp((x-x_0)/\nu_0)s$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} b(s,\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)\exp\left(-(x-x_0)/\nu_0\right)d\nu d\zeta ds$$

არის (36) განტოლების ქრობადი ამონახსნი როცა $x \to \infty$. ასევე, როცა $x < x_0$ ფუნქცია

$$\Psi(x,\mu,E) = -a_-\varphi_+(\mu,E)\exp((x-x_0)/(-\nu_0)$$

$$-\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{0} u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)\exp((x-x_0)/(-\nu)d\nu d\zeta \tag{45}$$

$$+\int_{x_0}^{x} b_-(s)\varphi_-(\mu,E)\exp((x-x_0)/(-\nu_0)ds$$

$$+\int_{x_0}^{x} b_+(s)\varphi_+(\mu,E)\exp((x-x_0)/\nu_0)ds$$

არის ქრობადი ამონახსნი (36) განტოლების, როცა $x \to -\infty$.

ეხლა დარჩა i_1 პირობის შესრულება. ზემოთ მიღებული ფორმულებიდან ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Psi^+(x_0,\mu,E) - \Psi^-(x_0,\mu,E)$$

$$= \frac{\varphi_{\nu_0}(\mu,E)}{N_-}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\mu'\varphi_-(\mu',E')\psi(\mu',E')d\mu' dE'$$

$$+\frac{\varphi_+(\mu,E)}{N_+}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\mu'\varphi_+(\mu',E')\psi(\mu',E')d\mu' dE'$$

$$+\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\mu'\tilde{\varphi}_{\nu,(\zeta)}(\mu',E')\psi(\mu',E')d\mu dE\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)d\nu d\zeta$$

$$\mu \in]-1,+1[, \quad E \in [E_0,E_1] \ .$$

საკუთრივი ფუნქციების სისრულის თვისებიდან გამომდინარე, მიღებული გამოსახულების მარჯვენა მხარე ტოლია $\psi(\mu,E)$.

ამრიგად, დასმულ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი რომელიც მოიცემა ცხადი სახით ანალიზურად.

2.1.5. ალბედოს ამოცანა

ალბედოს ამოცანა - ეს არის ამოცანა ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის პოვნის $0 \leq x < \infty$ ნახევარსივრცეში, რომლის საზღვარზე ეცემა გამოსხივების პარალელური ნაკადი. ვთქვათ, $\Psi_a(x, E, \mu)$ არის ამ ამოცანის ამონახსნი, ე.ი. ამონახსნი გადატანის თეორიის ერთგვაროვანი განტოლებისა როცა $0 \leq x < \infty$ შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\Psi_a(0, E, \mu) = \delta(\mu - \mu_0)\delta(E - E^0)$$

$$E, E^0 \in [E_0, E_1] \quad \mu, \mu_0 \geq 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \Psi_a(x, E, \mu) = 0$$

$$x \in (\ 0\ , +\infty) \quad E, E^0 \in [E_0, E_1] \;\; \mu, \mu_0 \in]-1, +1[\ .$$

ზოგადი სახის ამონახსნი ერთგვაროვანი განტოლებისა, რომელიც აკმაყოფილებს უსასრულობაში ქრობადობის პირობას, წარმოიდგინება რეგულარული და სინგულარული საკუთრივი ფუნქციების წრფივი კომბინაციით. ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Psi_a(x, E, \mu) = a_+ \exp(-\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu, E)$$

$$+ \int_{E_0}^{E_1} \int_{-1}^{+1} u(\nu, \zeta) \exp(-\frac{x}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu, E) d\nu dE \qquad (46)$$

სადაც, a_+ და $u(\nu,\zeta)$ კოეფიციენტები ჩვეულებრივად უნდა განისაზღვროს სასაზღვრო პირობებიდან. ამრიგად, ამ უკანასკნელი ტოლობიდან გვაქვს:

$$\delta(\mu-\mu_0)\delta(E-E^0)=a_+\varphi_{\nu_0}(\mu,E)$$

$$+\int_{E_0}^{E_1}\int_0^{+1}u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)d\nu dE$$

ვინაიდან

$$\lim_{x\to\infty}\exp(-\frac{x}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)=\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E).$$

a_+ და $u(\nu,\zeta)$ კოეფიციენტები შეიძლება განისაზღვროს საკუთრივი ფუნქციების ბიორთოგონალურობის თვისებიდან ნახევარ ინტერვალში [37].

2.1.6. მილნის პრობლემა

მილნის პრობლემას უწოდებენ ნეიტრონების განაწილების ამოცანას წყაროდან თავისუფალ გარემოში, რომელიც მოიცავს ნახევარსივრცეს, ამასთან ნაკადი გარედან დაცემული დასხივებისა ნულის ტოლია. შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ნეიტრონების წყარო, განთავსებულია უსასრულობაში. ამრიგად თუ $\Psi_0(x,\mathrm{E},\mu)$-ით აღვნიშნავთ ამოცანის ამონახსნს, მაშინ დიდი x-ებისათვის უნდა იყოს:

$$\Psi_0(x,E,\mu)\to\exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu,E).$$

ამრიგად, ჩვენ ვეძებთ ერთგვაროვანი განტოლების ისეთ ამონახსნს, რომელიც აკმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობას უსასრულობაში, ხოლო როცა x=0, მაშინ შემდეგ პირობას

$$\Psi_0(0,E,\mu)=0,\qquad E\in[E_0,E_1]\quad\mu>0.$$

წინა მსჯელობებიდან გამომდინარე, ცხადია,რომ მილნის პრობლემის ამონახსნი შესაძლებელია ვეძებოთ, როგორც წრფივი კომბინაცია რეგულა-

რული და სინგულარული საკუთრივი ფუნქციებისა. ამასთან, საჭიროა აგრეთვე, გარკვეული სახის დამატებითი პირობების შესრულება. აქედან გამომდინარე შეიძლება დავწეროთ:

$$\Psi_0(x,E,\mu) = \exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu,E)$$

$$+a_+\exp(-\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu,E)$$

$$+\int_{E_0}^{E_1}\int_0^{+1}u(\nu,\zeta)\exp(-\frac{x}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)d\nu d\zeta$$

ეხლა გვჭირდება დაკმაყოფილება პირობისა, რომ გარედან დასხივება არ ხდება. ამას მივყავართ შემდეგ ტოლობამდე:

$$-\varphi_{-\nu_0}(\mu,E) = a_+\varphi_{\nu_0}(\mu,E)$$

$$+\int_{E_0}^{E_1}\int_0^{+1}u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)d\nu d\zeta.$$

ამრიგად, a_+ და $u(\nu,\zeta)$ არიან ნახევარ ინტერვალში განაშალის კოეფიციენტები და ისინი აიგება საკუთრივი ფუნქციების ბიორთოგონალობის თვისებიდან გამომდინარე. რაც საშუალებას იძლევა, ანალოგიურად ერთსიჩქარიანის შემთხვევისა, შესაძლებელი ხდება მოძებნილ იქნას ექსტრაპოლირებული სიგრძე, ე.ი. მანძილი ზედაპირიდან სადაც სიმკვრივის ასიმპტოტური მდგენელი

$$\rho_{as} = 2\pi(\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{-\nu_0}(\mu,E)$$

$$+a_+\exp(-\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu,E))d\mu dE$$

ნულის ტოლია. ვთქვათ, $x=-z_0$ არის წერტილი, სადაც $\rho_{as}=0$, რადგან

$$\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\varphi_{\nu_0}(\mu,E) = 1$$

ამიტომ

$$a_+ = -exp(-\frac{2z_0}{\nu_0}) = exp(-(\frac{2z_0}{\nu_0}) + \imath\pi)$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$z_0 = \frac{\nu_0}{2}(-lna_+ + \imath\pi). \tag{47}$$

2.1.7. გრინის ფუნქცია ნახევარ სივრცისათვის

გრინის ფუნქცია ნახევარ სივრცისათვის $\Psi(x, \mathrm{E}, \mu)$ განისაზღვრება როგორც გადატანის განტოლების ამონახსნი უსასრულო ნახევარსივრცეში როცა გარედან არ ხდება დასხივება და წყარო გამოსხივებისა მდებარეობს განსახილველ არეში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ვეძებთ ამოხსნას განტოლებისა

$$\mu\frac{\partial\Psi_g}{\partial x} + \Psi_g(x, \mu, E)$$

$$= \frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\alpha(E)\alpha(E')\Psi_g(x, \mu', E')d\mu' dE'$$

$$+\frac{1}{2\pi}\delta(x - x_0)\delta(E - E_0)\delta(\mu - \mu_0), \tag{48}$$

$$x \in (0, +\infty), \quad \mu \in]-1, +1[, \quad E \in [E_0, E_1]$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\Psi_g(0, \mu, E) = 0, \qquad \mu > 0$$

და

$$\lim_{x\to\infty}\Psi_g(x, \mu, E) = 0$$

$$x \in (0, +\infty), \quad \mu \in [-1, +1], \quad E \in [E_0, E_1]$$

იმისათვის, რომ დაკმაყოფილდეს განხილული განტოლება მის ამონახსნს ვეძებთ, როგორც ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს რომელიც დააკმაყოფილებს ნახტომის პირობას

$$\Psi_g^+(0, \mu, E) - \Psi_g^-(0, \mu, E) = \frac{1}{2\pi\mu}\delta(E - E_0)\delta(\mu - \mu_0)$$

გრინის ფუნქცია $G(x_0, E_0, \mu_0 \rightarrow x,\ E,\ \mu)$ უსასრელო გარემოს შემთხვევაში აკმაყოფილებს ამ პირობებს, ამიტომ გრინის ფუნქცია ნახევარ სივრცის შემთხვევისათვის შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$\Psi_g(x, \mu, E) = G(x_0, E_0, \mu_0 \rightarrow x, E, \mu)$$

$$-a_+ \exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{-\nu_0}(\mu, E)$$

$$-\int_{E_0}^{E_1}\int_0^{+1} u(\zeta, \nu)\exp(-\frac{x}{\nu_0})\varphi_{-\nu(\zeta)}(\mu, E)d\nu d\zeta.$$

$$x \in (-\infty, +\infty), \quad \mu \in [-1, +1], \quad E \in [E_0, E_1]$$

a_+ და $u(\nu, \zeta)$ კოეფიციენტები უნდა შერჩეულ იქნას ისე, რომ შესრულდეს პირობა

$$\Psi_g(0, \mu, E) = 0, \qquad \mu > 0$$

ე.ი.

$$G(0, E_0, \mu_0 \to 0, E, \mu) = a_+ \varphi_{\nu_0}(\mu, E)$$

$$+ \int_{E_0}^{E_1} \int_0^{+1} u(\zeta, \nu) \varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu, E) d\nu d\zeta.$$

$$\mu \in]-1, +1[, \quad E \in [E_0, E_1]$$

ამრიგად, აქ a_+ და $u(\nu, \zeta)$ კოეფიციენტები წარმოადგენენ G ფუნქციისათვის განაშალის კოეფიციენტებს ნახევარ ინტერვალში. მათი პოვნა ხდება საკუთრივი ფუნქციებისათვის ნახევარ ინტერვალში, ბიორთოგონალობის თვისების გამოყენებით.

2.2. წერტილოვანი წყაროდან წარმოქმნილი ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის ასიმპტოტური ყოფაქცევა

2.2.1. ამოცანის დასმა

ამჯერად, ჩვენი ინტერესების სფეროს წარმოადგენს ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის ასიმპტოტური ყოფაქცევის დადგენა. ამასთან განიხილება ის შემთხვევა როცა აღნიშნული ფაზური სიმკვრივე წარმოქმნილია ბრტყელი, ერთეულოვანი სიმძლავრის მქონე $\mu = \mu_0$ მიმართულებისა და $\lambda = \lambda_0$ ტალღის სიგრძის მქონე წყაროსაგან. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად გამოყენებულია საძებნი სიდიდის საკუთრივ ფუნქციათა საშუალებით გაშლის მეთოდი. ცნობილია, რომ [36,37] რეგულარული და სინგულარული საკუთრივ ფუნქციები აიგება შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებიდან. ეს განტოლება წარმოქმნილია გადატანის წრფივი თეორიის განტოლებიდან, რომელიც აღწერს ლითონში რადიაციის გაჭოლვის პროცესს. ამასთან ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ დისკრეტული საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციები, თავიანთი არგუმენტების მიმართ, წარმოადგენენ კლასიკური აზრით განმარტებულ ფუნქციებს. მათი

რაოდენობა სასრული ან თვლადია. სინგულარული საკუთრივი ფუნქციები კი, სობოლევ-შვარცის აზრით, წარმოადგენენ განმარტებულ განზოგადე-ბულ ფუნქციებს. მათი რაოდენობა კონტინუუმ სიმძლავრისაა. ამრიგად, მახასიათებელი განტოლების დისკრეტული სპექტრი სასრული ან თვლადია, ხოლო, უწყვეტ სპექტრს მონაკვეთი წარმოადგენს. შემდგომში განსახილველი განტოლებისთვის დასმული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს წარმოვადგენთ რეგულარული და სინგულარული საკუთრივ ფუნქციების დახმარებით, სადაც, შესაბამისი კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის გამოიყენება ამოცანის ფიზიკური შინაასიდან გამომდინარე სასაზღვრო პირობები. ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ არსებობს გარკვეული ხასიათის ანალოგია კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებსა და ჩვენს მიერ განხილული გადატანის თეორიის განტოლებებისთვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანებს შორის მისი ამოხსნის თვალსაზრისით.

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ისეთი ფორმულის მიღება რომლის საშუალებით შესაძლებელია ასიმპტოტური ყოფაქცევის დადგენა ბოლცმანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლების ამონახსნის-თვის. აღნიშნული ამონახსნით აღიწერება ნეიტრონების ნაკადის გაჭოლვის პროცესი უსასრულო ერთგვაროვან გარემოში. გეომეტრია, რომელიც განხილულია - ბრტყელია. წყარო – მონო მიმართული და მონო ქრომატული, გამოსახული დირაკის ფუნქციის საშუალებით.

ვთქვათ, $G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda)$ არის ფოტონების ან ნეიტრონების ნაკადი, რომელიც გამოსხივდება $x=x_0$ წერტილიდან $\mu=\mu_0$მიმართულებით და $\lambda=\lambda_0$შესაბამისი ენერგიით (ტალღის სიგრძით ფოტონების ან ნეიტრონების ლეტარგიით). ცნობილია რომ ყოველივე ამის აღწერა შესაძლებელია მოცემულ იქნას გადატანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის შემდეგი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებით [27,49]

$$\mu\frac{\partial G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda)}{\partial x}+G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda)=$$

$$=\int_a^b\int_{-1}^{+1}k\,(\mu,\lambda;\mu'\lambda')G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu',\lambda')d\mu'd\lambda'+S(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda), \qquad (49)$$

$$x, x_o \in (-\infty, +\infty), \quad \mu, \mu_0 \in (-1, +1), \quad \lambda, \lambda_0 \in [a, b],$$

სადაც, განტოლების გული $k(\mu, \lambda; \mu', \lambda')$, რომელიც ახასიათებს ელემენტა-რულ ნაწილაკთა გაბნევას, (მას ხშირად ფიზიკოსები გაბნევის ინდიკატ-რისას უწოდებენ), წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$k(\mu, \lambda; \mu', \lambda') = \sum_{s=0}^{n} (2S + 1) k_s(\lambda, \lambda') p_s(\mu) p_s(\mu'),$$

ამ გამოსახულებაში $p_s(\mu)$ გამოსახავს s რიგის ლეჟანდრის პოლინომს, $S(x - x_0, \mu - \mu_0, \lambda - \lambda_0)$ რომელიც ახასიათებს წყაროს განაწილებას

$$S(x - x_0, \mu - \mu_0, \lambda - \lambda_0) = \frac{1}{2\pi} \delta(x - x_0) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\lambda - \lambda_0).$$

შესაძლებელია (40) განტოლების დაყვანა ერთგვაროვან განტოლებამდე, თუ ჩვენ კოორდინატთა სათავეში მდებარე წყაროს ჩავანაცვლებთ ნახტომის პირობით. ამრიგად, (40) არაერთგვაროვანი განტოლების მაგივრად შეიძლ-ება განხილულ იქნას შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mu \frac{\partial G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu, \lambda)}{\partial x} + G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu, \lambda) =$$
$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \sum_{s=0}^{n} (2s + 1) k_s(\lambda, \lambda') p_s(\mu) p_s(\mu') G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu', \lambda') d\mu' d\lambda' \qquad (50)$$

რომლის ამონახსნი დააკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$2\pi\mu\big(G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x_0^+, \mu, \lambda) - G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x_0^-, \mu, \lambda)\big) =$$
$$= \delta(\mu - \mu_0) \delta(\lambda - \lambda_0), \qquad (51)$$
$$x, x_o \in (-\infty, +\infty), \quad \mu, \mu_0 \in (-1, +1), \quad \lambda, \lambda_0 \in [a, b].$$

ამასთან ერთად მოითხოვება ამონახსნისათვის უსასრულობაში დამატე-ბითი პირობების დაკმაყოფილება

$$\lim_{|x| \to \infty} G\,(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu, \lambda) = 0 \qquad (52)$$

$$\mu, \mu_0 \in (-1, +1), \ \lambda, \lambda_0 \in [a, b].$$

2.2.2. სინგულარული საკუთრივი ფუნქციები

როგორც (41) გამოსახულებიდან ჩანს, განტოლების სტრუქტურა ისეთია რომ მისი ამონახსნი შესაძლებელია ვეძებოთ ორი სხვადასხვა ცვლადებზე დამოკიდებული ფუნქციების ნამრავლის სახით. სახელდობრ,

$$G(x,\mu,\lambda) = \exp\left(\frac{x_0 - x}{\nu}\right)\varphi_\nu(\mu,\lambda)$$

ამ გამოსახულების (41) განტოლებაში უშუალო შეტანით, მარტივი გარდაქმნების გამოყენების შედეგად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$$-\frac{\mu}{\nu}\exp\left(\frac{x - x_0}{\nu}\right)\varphi_\nu(\mu,\lambda) + \exp\left(\frac{x_0 - x}{\nu}\right)\varphi_\nu(\mu,\lambda)$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} \sum_{s=0}^{n} (2s+1)k_s(\lambda,\lambda')p_s(\mu)p_s(\mu')\exp\left(\frac{x_0 - x}{\nu}\right)\varphi_\nu(\mu',\lambda')d\mu' d\lambda'$$

საიდანაც ვღებულობთ განტოლებას, რომელსაც უწოდებენ გადატანის მრავალსიჩქარიანი თეორიის მახასიათებელ განტოლებას:

$$(\nu - \mu)\varphi_\nu(\mu,\lambda) = \nu \int_a^b \int_{-1}^{+1} k\,(\mu,\lambda;\mu'\lambda')\varphi_\nu(\mu',\lambda')d\mu' d\lambda' \qquad (53)$$

სადაც, ν პარამეტრია.

ν პარამეტრის იმ მნიშვნელობას, როდესაც (53) განტოლებას გააჩნია არანულოვანი უწყვეტი ამონახსნი, უწოდებენ დისკრეტულ საკუთრივ რიცხვს, რომელიც შეესაბამება (53) განტოლების ოპერატორს. ამ განტოლებას ზოგიერთი ტიპის გულის შემთხვევისათვის, ν პარამეტრის არცერთი მნიშვნელობისათვის შესაბამის ოპერატორს დისკრეტულ საკუთრივი რიცხვი არ გააჩნია. მაგ., როცა ინტეგრალური ოპერატორი არის ვოლტერას ტიპის ოპერატორი ცვლადის მიმართ, მაშინ ν პარამეტრის არცერთი მნიშვნელობისათვის (53) მახასიათებელ განტოლებას უწყვეტი ამონახსნი არ გააჩნია. ე.ი. დისკრეტული საკუთრივი რიცხვი (53) მახასიათებელი განტოლების შესაბამის ოპერატორს არ გააჩნია. შემდგომში ჩვენ შემოვიფარგლებით ამ შემთხვევით. ე.ი. ჩვენ ვიხილავთ იმ შემთხვევას როცა $k(\lambda,\lambda') = 0$ როცა $\lambda > \lambda'$. სამაგიეროდ ამ ოპერატორს გააჩნია კონტინუუმ სიმრავლის

მნიშვნელობა პარამეტრისა $\nu \in [-1,+1]$ როცა მას გააჩნია საკუთრივი ფუნქციები განზოგადებული აზრით [13].

$$\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda) = \frac{\nu m(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu} + (\delta(\zeta-\lambda) - \nu\int_{-1}^{+1}\frac{\nu m(\nu,\zeta;\mu',\lambda)}{\nu-\mu'}d\mu')\delta(\nu-\mu)$$

(54)

$\nu \in (-1,+1)$, $\zeta \in [a,b]$, სადაც $m(\nu,\zeta;\mu,\lambda)$ არის შემდეგი ინტეგრალური განტოლების ერთადერთი უწყვეტი ამონახსნი

$$m(\nu,\zeta;\mu,\lambda) = k(\mu,\lambda;\nu,\zeta) + \nu\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{k(\mu,\lambda;\mu',\lambda') - k(\mu,\lambda;\nu,\lambda')}{\nu-\mu'}m(\nu,\zeta;\mu',\lambda')d\mu'd\lambda'$$

$$\nu,\mu \in [-1,+1] \quad \zeta,\lambda \in [a,b].$$

აქ, $\nu \in (-1,+1)$და $\zeta \in [a,b]$ პარამეტრებს წარმოადგენენ. ამ განტოლების ერთადერთი უწყვეტი ამონახსნი შესაძლებელია წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით

$$m(\nu,\zeta;\mu,\lambda) = \sum_{s=0}^{n} k_s\,(\lambda,\lambda')p_s(\mu)h_s(\nu,\zeta,\lambda)$$

სადაც, $h_s(\nu,\zeta,\lambda)$ განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობიდან

$$\nu h_s(\nu,\zeta,\lambda) - \frac{s+1}{2s+1}h_{s+1}(\nu,\zeta,\lambda) - \frac{s}{2s+1}h_{s-1}(\nu,\zeta,\lambda)$$

$$= \nu\int_a^b k_s\,(\lambda,\lambda')h_s(\nu,\zeta,\lambda')d\lambda' + k_s(\lambda,\zeta)p_s(\nu).$$

აქ:

$$s = \overline{0,n}, \qquad h_0(\nu,\zeta,\lambda) = 0.$$

(54) განტოლებასთან ერთად ჩვენ განვიხილავთ შემდეგ მახასიათებელ განტოლებას

$$(\nu-\mu)\varphi_\nu^*(\mu,\lambda) = \nu\int_a^b\int_{-1}^{+1}\sum_{s=0}^{n}(2s+1)k_s(\lambda',\lambda)p_s(\mu)p_s(\mu')\varphi_\nu^*(\mu',\lambda')d\mu'd\lambda' \qquad (55)$$

(45) განტოლების სინგულარულ საკუთრივ ფურქციებს აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda) = \frac{\nu m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}$$

$$+(\delta(\zeta-\lambda) - \nu\int_{-1}^{+1}\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu',\lambda)}{\nu-\mu'}d\mu')\delta(\nu-\mu)$$

სადაც, $m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)$ არის შემდეგი ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი

$$m^*(\nu,\zeta;\mu,E) = k(\nu,\zeta;\mu,\lambda) +$$

$$\nu\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{k(\mu',\lambda';\mu,\lambda) - k(\nu,\lambda';\mu,\lambda)}{\nu-\mu'}m^*(\nu,\zeta;\mu',\lambda')d\mu' d\lambda',$$

$$\mu \in [-1,+1], \quad \lambda \in [a,b].$$

აქაც, $\nu \in (-1,+1)$ და $\zeta \in [a,b]$ პარამეტრებს წარმოადგენენ. ამ განტოლებას ასევე გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც შესაძლებელია წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი სახით:

$$m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda) = \sum_{s=0}^{n} k_s\,(\lambda',\lambda)p_s(\mu)h^*_s(\nu,\zeta,\lambda)$$

სადაც, $h^*_s(\nu,\zeta,\lambda)$ განისაზღვრება შემდეგი რეკურენტული თანაფარდობიდან

$$\nu h^*_s(\nu,\zeta,\lambda) - \frac{s+1}{2s+1}h^*_{s+1}(\nu,\zeta,\lambda) - \frac{s}{2s+1}h^*_{s-1}(\nu,\zeta,\lambda)$$

$$= \nu\int_a^b k_s\,(\lambda',\lambda)h^*_s(\nu,\zeta,\lambda')d\lambda' + k_s(\zeta,\lambda)p_s(\nu),$$

აქ, $\quad s = \overline{0,n}, \qquad h^*_0(\nu,\zeta,\lambda) = 0.$

2.2.3. სინგულარული საკუთრივი ფუნქციების ზოგიერთი თვისება

განხილული მახასიათებელი განტოლებიდან გამომდინარე სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციებს გააჩნიათ თვისებები, რომლებიც საშუალებას იძლევიან უცნობი სიდიდეების განსაზღვრაში მნიშვნელოვანი როლი შეასრულონ. ერთ-ერთი ასეთია ნორმირების საკითხი, რომელსაც ერთგვაროვან განტოლებაში მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს. დირაკის ფუნქციის თვისებიდან გამომდინარე ადვილი საჩვენებელია შემდეგი ტოლობების სამართლიამობა:

$$\int_{-1}^{+1} \varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\mu = \delta(\zeta-\lambda)$$

და

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\mu d\lambda = 1.$$

შეუღლებული განტოლების სინგულარული საკუთრივი ფუნქციებისთვის $\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)$ ანალოგიური ხასიათის ტოლობებს ასევე აქვს ადგილი

$$\int_{-1}^{+1} \varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\mu = \delta(\zeta-\lambda)$$

და

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\mu d\lambda = 1.$$

საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა ბიორთოგონალურ სისტემას წარმოადგენს. სამართლიანია

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \mu\, \varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu,\lambda)d\mu d\lambda = 0, \quad \nu \neq \nu'$$

შემდეგი ტოლობა.

მართლაც, ჩანს რომ ფუნქცია $\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$(\nu-\mu)\varphi_{\nu(\zeta)}(\mu,\lambda)$$
$$=\nu\int_a^b\int_{-1}^{+1}k\,(\mu,\lambda;\mu'\lambda')\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu',\lambda')d\mu'd\lambda'. \tag{56}$$

ასევე შეუღლებული მახასიათებელი განტოლების $\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)$ საკუთრივი ფუნქციებისთვის ჩვენ გვაქვს:

$$(\nu-\mu)\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)$$
$$=\nu\int_a^b\int_{-1}^{+1}k\,(\mu',\lambda';\mu,\lambda)\varphi^*_{\nu',(\zeta')}(\mu',\lambda')d\mu'd\lambda'. \tag{57}$$

გავამრავლოთ (56) განტოლება $\varphi^*_{\nu'}(\mu,\lambda)$-ზე, (57) განტოლება კი - $\varphi_\nu(\mu,\lambda)$-ზე და გამოვაკლოთ მეორე ტოლობას პირველი. მარტივი ალგებრა საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა, რომელიც ფაქტიურად გამოსახავს საკუთრივ ფუნქციათა (როგორც რეგულარულის ასევე, სინგულარულის), ბიორთოგონალობის თვისებას:

$$\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu'}\right)\int_a^b\int_{-1}^{+1}\mu\,\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu,\lambda)d\mu d\lambda=0.$$

ასევე, სამართლიანია მეტად მნიშვნელოვანი ტოლობა სინგულარული საკუთრივი ფუნქციებისთვის. სახელდობრ, საქმე ეხება საკუთრივი ფუნქციების ნორმირების საკითხს. როცა წრფივ ერთგვაროვან განტოლებას გააჩნია არატრივიალური ამონახსნი, მაშინ ეს ამონახსნი შეიცავს ნებისმიერ მუდმივს და ნორმირების პირობით განისაზღვრება ეს მუდმივი. ჩვენს მიერ განხილული სინგულარული საკუთრივი ფუნქციები ნორმირებულია

$$\int_a^b\int_{-1}^{+1}\mu\,\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu,\lambda)d\mu d\lambda$$

$$=\nu\delta(\nu-\nu')\int_a^b\left(\delta(\zeta-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}d\mu\right)$$

$$\times(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu',\zeta';\mu,\lambda)}{\nu'-\mu}d\mu)d\lambda.$$

მართლაც, ჩვენ გვაქვს:

$$\int_a^b\int_{-1}^{+1}\mu\,\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu,\lambda)d\mu d\lambda=$$

$$\int_a^b\int_{-1}^{+1}\mu\,(\frac{\nu m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}$$

$$+(\delta(\zeta-\lambda)-\int_{-1}^{+1}\frac{\nu m^*(\nu,\zeta;\mu',\lambda)}{\nu-\mu'}d\mu')\delta(\nu-\mu))$$

$$\times(\frac{\nu' m(\nu',\zeta';\mu,\lambda)}{\nu'-\mu}$$

$$+(\delta(\zeta'-\lambda)-\int_{-1}^{+1}\frac{\nu' m(\nu',\zeta';\mu',\lambda)}{\nu'-\mu'}d\mu')\delta(\nu'-\mu))d\mu d\lambda$$

$$=\int_a^b\int_{-1}^{+1}\mu\frac{\nu m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}\frac{\nu' m(\nu',\zeta';\mu,\lambda)}{\nu'-\mu}d\mu d\lambda$$

$$+\frac{\nu m^*(\nu,\zeta;\nu',\lambda)}{\nu-\nu'}(\delta(\zeta-\lambda)-\int_{-1}^{+1}\frac{\nu m^*(\nu,\zeta;\mu',\lambda)}{\nu-\mu'}d\mu')d\lambda$$

$$+\int_a^b\frac{\nu' m(\nu',\zeta';\nu',\lambda)}{\nu-\nu'}(\delta(\zeta-\lambda)-\int_{-1}^{+1}\frac{\nu' m(\nu',\zeta';\mu',\lambda)}{\nu-\mu'}d\mu')d\lambda$$

$$+\nu\delta(\nu-\nu')\int_a^b(\,\delta(\zeta-\lambda)-\int_{-1}^{+1}\frac{\nu m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}d\mu)$$

$$\times \left(\delta(\zeta' - \lambda) - \int_{-1}^{+1} \frac{\nu' m(\nu', \zeta'; \mu, \lambda)}{\nu' - \mu} d\mu\right) d\lambda.$$

შემდეგი ტოლობის გამოყენებით

$$\frac{\mu}{(\nu - \mu)(\nu' - \mu)} = \left(\frac{\nu}{\nu - \mu} - \frac{\nu'}{\nu' - \mu}\right) \frac{1}{\nu' - \nu},$$

ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \mu \frac{\nu m^*(\nu, \zeta; \mu, \lambda)}{\nu - \mu} \frac{\nu' m(\nu', \zeta'; \mu, \lambda)}{\nu' - \mu} d\mu d\lambda$$

$$= \frac{\nu^2 \nu'}{\nu' - \nu} \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{\nu m^*(\nu, \zeta; \mu, \lambda) m(\nu' \zeta'; \mu, E)}{\nu - \mu} d\mu d\lambda$$

$$- \frac{\nu \nu'^2}{\nu' - \nu} \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{m^*(\nu, \zeta; \mu, \lambda) m(\nu' \zeta'; \mu, \lambda)}{\nu' - \mu} d\mu d\lambda.$$

როგორც აღნიშნული გვქონდა, სინგულარული საკუთრივი ფუნქციები $\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu, \lambda)$ და $\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu, \lambda)$ წარმოადგენენ შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებების ამონახსნებს. მათი უშუალოდ ჩასმის შედეგად, დირაკის ფუნქციის თვისებიდან გამოყენების შედეგად დავადგენთ, რომ ადგილი აქვს ქვემოთ მოყვანილ შემდეგ ტოლობების

$$m(\nu', \zeta'; \mu, \lambda) = \int_a^b \int_{-1}^{+1} k(\mu, \lambda; \mu' \lambda') \varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu', \lambda') d\mu' d\lambda'$$

და

$$m^*(\nu, \zeta; \mu, \lambda) = \int_a^b \int_{-1}^{+1} k(\mu', E'; \mu' E') \varphi^*_{\nu}(\mu', \lambda') d\mu' d\lambda'.$$

მიღებული ტოლობები გადავამრავლოთ შესაბამისად $\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu, \lambda)$ და $\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu, \lambda)$ საკუთრივ ფუნქციებზე, მიღებული გამოსახულებები გამოვაკ-

ლოთ ერთმანეთს და შემდეგ ვაინტეგროთ ისინი μ და λ ცვლადებით, გვექნება:

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} m(\nu', \zeta'; \mu, \lambda) \varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu, \lambda) d\mu d\lambda$$

$$- \int_a^b \int_{-1}^{+1} m^*(\nu, \zeta; \mu, \lambda) \varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu, \lambda) d\mu d\lambda$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} \varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu, \lambda) \int_a^b \int_{-1}^{+1} k(\mu, \lambda; \mu'\lambda') \varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu', \lambda') d\mu' d\lambda' d\mu d\lambda$$

$$- \int_a^b \int_{-1}^{+1} \varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu, \lambda) \int_a^b \int_{-1}^{+1} k(\mu', \lambda'; \mu, \lambda) \varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu', \lambda') d\mu' d\lambda' d\mu d\lambda = 0.$$

აქედან გამომდინარე

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} m(\nu', \zeta'; \mu, \lambda) \varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu, \lambda) d\mu d\lambda$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} m^*(\nu, \zeta; \mu, \lambda) \varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu, \lambda) d\mu d\lambda .$$

მიღებულ ტოლობაში შევიტანოთ საკუთრივი ფუნქციების გამოსახულე-ბანი, მარტივი გარდაქმნების შედეგად გვექნება:

$$\nu \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{m^*(\nu, \zeta; \mu, \lambda) m(\nu'\zeta'; \mu, \lambda)}{\nu - \mu} d\mu d\lambda$$

$$+ \int_a^b m(\nu', \zeta'; \nu, \lambda) \Big(\delta(\zeta - \lambda) - \nu \int_{-1}^{+1} \frac{m^*(\nu, \zeta; \mu', \lambda)}{\nu - \mu'} d\mu' \Big) d\lambda$$

$$= \nu \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{m^*(\nu, \zeta; \mu, \lambda) m(\nu'\zeta'; \mu, \lambda)}{\nu' - \mu} d\mu d\lambda$$

$$+\int_a^b m^*(\nu,\zeta;\nu',\lambda)\Big(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu',\zeta';\mu',\lambda)}{\nu'-\mu'}d\mu'\Big)d\lambda$$

ამ ტოლობიდან გვაქვს:

$$\nu\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)m(\nu'\zeta';\mu,\lambda)}{\nu-\mu}d\mu d\lambda$$

$$-\nu'\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)m(\nu'\zeta';\mu,\lambda)}{\nu'-\mu}d\mu d\lambda$$

$$=\int_a^b m^*(\nu,\zeta;\nu',\lambda)\Big(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu',\zeta';\mu',\lambda)}{\nu'-\mu'}d\mu'\Big)d\lambda$$

$$-\int_a^b m(\nu',\zeta';\nu,\lambda)(\delta(\zeta-\lambda)-\nu'\int_{-1}^{+1}\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu',\lambda)}{\nu-\mu'}d\mu')d\lambda.$$

ამ ტოლობიდან ჩვენ ვღებულობთ

$$\nu\nu'\int_a^b\int_{-1}^{+1}\mu\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}\frac{m(\nu',\zeta';\mu,\lambda)}{\nu'-\mu}d\mu d\lambda$$

$$=\frac{\nu\nu'}{\nu-\nu'}\Big(\int_a^b m^*(\nu,\zeta;\nu',\lambda)(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu',\zeta';\mu',\lambda)}{\nu'-\mu'}d\mu')d\lambda$$

$$-\int_a^b m(\nu',\zeta';\nu,\lambda)(\delta(\zeta-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu',\lambda)}{\nu-\mu'}d\mu')d\lambda\Big).$$

ამიტომ ჩვენ გვაქვს:

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \mu\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu,\lambda)d\mu d\lambda =$$

$$\frac{\nu\nu'}{\nu-\nu'}\int_a^b m^*(\nu,\zeta;\nu',\lambda)(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu'\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu',\zeta';\mu',\lambda)}{\nu'-\mu'}d\mu')d\lambda$$

$$-\frac{\nu\nu'}{\nu-\nu'}\int_a^b m(\nu',\zeta';\nu',\lambda)(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m*(\nu,\zeta;\mu',\lambda)}{\nu'-\mu'}d\mu')d\lambda$$

$$-\frac{\nu\nu'}{\nu-\nu'}\int_a^b m(\nu',\zeta';\nu',\lambda)(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m*(\nu,\zeta;\mu',\lambda)}{\nu'-\mu'}d\mu')d\lambda$$

$$-\frac{\nu\nu'}{\nu-\nu'}\int_a^b m^*(\nu,\zeta;\nu',\lambda)(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu'\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu',\zeta';\mu',\lambda)}{\nu'-\mu'}d\mu')d\lambda$$

$$+\nu\delta(\nu-\nu')\int_a^b\left(\delta(\zeta-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}d\mu\right)$$

$$\times\left(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu'\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu',\zeta';\mu,\lambda)}{\nu'-\mu}d\mu\right)d\lambda.$$

აქედან გამომდინარე ვღებულობთ:

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \mu\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu,\lambda)d\mu d\lambda$$

$$=\nu\delta(\nu-\nu')\int_a^b\left(\delta(\zeta-\lambda)-\nu\int_{-1}^{+1}\frac{m^*(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}d\mu\right) \tag{58}$$

$$\times\left(\delta(\zeta'-\lambda)-\nu'\int_{-1}^{+1}\frac{m(\nu',\zeta';\mu,\lambda)}{\nu'-\mu}d\mu\right)d\lambda.$$

სამართლიანია, რომ ფუნქცია

$$\tilde{\varphi}^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda) = \varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda) + \int_a^b g(\nu,\zeta_0,\zeta')\varphi^*_{\nu,(\zeta')}(\mu,\lambda)d\zeta'$$

სადაც, $g(\nu,\zeta_0,\zeta)$ არის ნებისმიერი უწყვეტი ფუნქცია, არის აგრეთვე, სინგულარული საკუთრივი ფუნქცია (47) მახასიათებელი განტოლებისა, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\delta(\mu-\mu_0)\delta(\lambda-\lambda_0) = \mu\int_a^b\int_{-1}^{+1}\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)\tilde{\varphi}^*_{\nu,(\zeta)}(\mu_0,\lambda_0)d\nu d\zeta$$

$$\mu,\mu_0 \in (-1,+1), \quad \lambda,\lambda_0 \in [a,b]$$

სადაც, $g(\nu,\zeta_0,\zeta)$ არის ინტეგრალური განტოლების ერთადერთი ამონახსნი

$$g(\nu,\zeta_0,\zeta) - \int_a^b S(\nu,\zeta',\zeta)g(\nu,\zeta_0,\zeta')d\zeta' = S(\nu,\zeta_0,\zeta)$$

და

$$S(\nu,\zeta_0,\zeta) = \int_{-1}^{+1}\frac{\nu m(\nu,\zeta;\mu,\zeta_0)}{\nu-\mu}d\mu + \int_{-1}^{+1}\frac{\nu m^*(\nu,\zeta_0;\mu,\zeta)}{\nu-\mu}d\mu$$

$$-\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{\nu m(\nu,\zeta;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}d\mu\int_{-1}^{+1}\frac{\nu m^*(\nu,\zeta_0;\mu,\lambda)}{\nu-\mu}d\mu d\lambda$$

$$-\pi^2\nu^2\int_a^b m(\nu,\zeta;\nu,\lambda)m^*(\nu,\zeta_0;\nu,\lambda)d\lambda$$

$$\nu \in (-1,+1), \quad \zeta,\zeta_0 \in [a,b].$$

2.2.4. გრინის ფუნქცია უსასრულო გარემოსთვის წერტილოვანი წყაროს შემთხვევაში

იმისათვის რომ (32) პირობა შესრულდეს, ამოხსნას ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$G = \int_a^b \int_0^1 u(\nu,\zeta)\exp(-\frac{x-x_0}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta, \quad x > x_0$$

$$G = -\int_a^b \int_{-1}^0 u(\nu,\zeta)\exp(-\frac{x-x_0}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta, \quad x < x_0$$

სადაც $\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)$, $\nu \in (-1,+1)$, $\zeta \in [a,b]$ არის (49) განტოლების სანგულა-რული საკუთრივი ფუნქცია, რომელიც ნორმირებულია და წარმოიდგინება (50)-ს სახით [2], $u(\nu,\zeta)$ არის უცნობი ფუნქცია. ჩვენი მიზანია ასეთი ფუნქციის აგება

$$G^+(x_0,\mu_0,\lambda_0;x_0,\mu,\lambda) = \int_a^b \int_0^1 u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta$$

და

$$G^-(x_0,\mu_0,\lambda_0;x_0,\mu,\lambda) = -\int_a^b \int_{-1}^0 u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta\,.$$

ამრიგად, (52) ნახტომის პირობა დაიყვანება შემდეგ პირობაზე

$$\delta(\mu-\mu_0)\delta(\lambda-\lambda_0) = \mu\int_a^b \int_{-1}^{+1} u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta\,,$$

$$u(\nu,\zeta;\mu_0,\lambda_0) = \tilde{\varphi}^*_{\nu,(\zeta)}(\mu_0,\lambda_0)$$

ამიტომ, ჩვენ კვლავ შეგვიძლია დავწეროთ:

$$G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda)$$

$$= \int_a^b \int_0^1 \exp(-\frac{x-x_0}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)\tilde{\varphi}^*_{\nu,(\zeta)}(\mu_0,\lambda_0)d\nu d\zeta\,, \quad x > x_0$$

და

$$G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu, \lambda)$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^0 \exp(-\frac{x - x_0}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu, \lambda)\tilde{\varphi}^*_{\nu,(\zeta)}(\mu_0, \lambda_0)d\nu d\zeta, \quad x < x_0$$

თუ ჩვენ ვისარგებლებთ ნორმირების პირობით $\varphi_{\nu',(\zeta')}(\mu, \lambda)$ და $\varphi^*_{\nu,(\zeta)}(\mu, \lambda)$ ფუნქციებისთვის, მაშინ ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივისათვის ჩვენ მივიღებთ შემდეგ ფორმულებს, ამრიგად:

$$G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \lambda) = \int_0^1 \tilde{\varphi}^*_{\nu,(\lambda)}(\mu_0, \lambda_0), \quad x > x_0$$

და

$$G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \lambda) = \int_{-1}^0 \tilde{\varphi}^*_{\nu,(\lambda)}(\mu_0, \lambda_0), \quad x < x_0$$

ნაკადის სიმკვრივის განსაზღვრისათვის ჩვენ გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$\rho(x_0; x) = \int_a^b \int_{-1}^1 \int_a^b \int_{-1}^1 G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu, \lambda)d\mu_0 d\lambda_0 d\mu d\lambda$$

ბოლოს შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\rho(x_0; x) = \int_0^1 \exp(- \mid x - x_0 \mid /\nu)R(\nu)d\nu$$

სადაც,

$$R(\nu) = 1 + \int_a^b \int_a^b g(\nu, \zeta, \zeta')d\zeta' d\zeta.$$

ამრიგად, მიღებულია ფორმულები რომლებიც საშუალებას იძლევიან ასიმპტოტური ყოფაქცევის კვლევისა ერთეულოვანი სიმძლავრის წყაროდან წარმოქმნილი ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივისათვის, გადატანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის შემთხვევაში. როგორც ჩანს, მიღებული ფორმულები ფაქტიურად ანალოგიურია ცნობილი ფორმულებისა ერთსიჩქარიანი თეორიის შემთხვევისათვის. ასეთი ფუნქციების ანალიზი მოცემულია [3]-ში.

2.2.5. ალბედოს ამოცანა

ალბედოს ამოცანა – ეს არის ამოცანა ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის პოვნისა $0 \leq x < \infty$ ნახევარსივრცეში, რომლის საზღვარზე ეცემა გამოსხივების პარალელური ნაკადი. ვთქვათ, $\Psi_a(x, E, \mu)$ არის ამ ამოცანის ამონახსნი, ე.ი. ამონახსნი გადატანის თეორიის ერთგვაროვანი განტოლებისა

$$\mu \frac{\partial \Psi_a(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu, \lambda)}{\partial x} + \Psi_a(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu, \lambda)$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} k(\mu, \lambda; \mu' \lambda') \Psi_a(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu', \lambda') d\mu' d\lambda'$$

როცა $0 \leq x < \infty$ შემდეგი სასაზღვრო პირობებით

$$\Psi_a(0, \lambda, \mu) = \delta(\mu - \mu_0)\delta(\lambda - \lambda^0)$$

$$\lambda, \lambda^0 \in [a, b] \quad \mu, \mu_0 \geq 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \Psi_a(x, \lambda, \mu) = 0$$

$$x \in (0, +\infty) \quad \lambda, \lambda^0 \in [a, b] \quad \mu, \mu_0 \in [-1, +1].$$

ერთგვაროვანი განტოლების ზოგადი სახის ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს უსასრულობაში ქრობადობის პირობას, წარმოიდგინება რეგულარული და სინგულარული საკუთრივი ფუნქციების წრფივი კომბინაციით. ამონახსნი წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\Psi_a(x,\lambda,\mu) = \sum_k a_{+\nu_k} \exp(-\frac{x}{+\nu_k})\varphi_{+\nu_k}(\mu,\lambda)$$

$$+\int_{E_0}^{E_1}\int_0^{+1} u(\nu,\zeta)\exp(-\frac{x}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E)d\nu d\zeta$$

სადაც, $a_{+\nu_k}$ და $u(\nu,\zeta)$ კოეფიციენტები ჩვეულებრივად უნდა განისაზღვროს სასაზღვრო პირობებიდან. ამრიგად, ამ უკანასკნელი ტოლობიდან ვინაიდან გვაქვს:

$$\lim_{x\to 0}\exp(-\frac{x}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda) = \varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,E).$$

$$\delta(\mu-\mu_0)\delta(\lambda-\lambda^0) = \sum_k a_{+\nu_k}\varphi_{+\nu_k}(\mu,\lambda)$$

$$+\int_a^b\int_0^{+1} u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta.$$

a_+ და $u(\nu,\zeta)$ კოეფიციენტები განისაზღვრება საკუთრივი ფუნქციების ბიორთოგონალურობის თვისებიდან ნახევარ ინტერვალში [37].

იმ შემთხვევაში, როცა გამოსავალი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების გული ვოლტერას ტიპისაა, ე.ი. $k_i(\lambda,\lambda')=0$, როცა $\lambda'>\lambda$, მაშინ როგორც ვიცით, მახასიათებელ განტოლებას დისკრეტული საკუთრივი ფუნქციები არ გააჩნია და განტოლების ამონახსნს აქვს სახე:

$$\Psi_a(x,\mu,\lambda) = \int_a^b\int_0^{+1} u(\nu,\zeta)\exp(-\frac{x}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta.$$

ამრიგად, თუ ამ უკანასკნელ გამოსახულებაში ჩავსვამთ $x=0$ და ვისარ-გებლებთ დასმული სასაზღვრო პირობით გვექნება:

$$\delta(\mu-\mu_0)\delta(\lambda-\lambda^0) = \int_a^b\int_0^{+1} u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta$$

2.2.6. მილნის პრობლემა

მილნის პრობლემას უწოდებენ ნეიტრონების განაწილების ამოცანას წყაროდან თავისუფალ გარემოში, რომელიც მოიცავს ნახევარსივრცეს, ამასთან ნაკადი გარედან დაცემული დასხივებისა ნულის ტოლია. შეიძლება ჩაითვალოს, რომ ნეიტრონების წყარო განთავსებულია უსასრულობაში. ამრიგად, თუ $\Psi_0(x,\lambda,\mu)$-ით აღვნიშნავთ ამოცანის ამონახსნს, მაშინ დიდი x-ებისათვის უნდა იყოს:

$$\Psi_0(x,\lambda,\mu) \to \exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu,\lambda).$$

ამრიგად, ჩვენ ვეძებთ ერთგვაროვანი განტოლების ისეთ ამონახსნს, რომელიც კმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობას უსასრულობაში, ხოლო როცა x=0, მაშინ შემდეგ პირობას

$$\Psi_0(0,\lambda,\mu) = 0, \qquad \lambda \in [a,b] \quad \mu > 0.$$

წინა მსჯელობებიდან გამომდინარე, ცხადია, რომ მილნის პრობლემის ამონახსნი შესაძლებელია ვეძებოთ, როგორც წრფივი კომბინაცია რეგულა-რული და სინგულარული საკუთრივი ფუნქციების. ამასთან, საჭიროა აგრეთვე, გარკვეული სახის დამატებითი პირობების შესრულება. აქედან გამომდინარე შეიძლება დავწეროთ:

$$\Psi_0(x,\lambda,\mu) = \exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu,\lambda)$$

$$+\sum_{k\neq 0} a_{+\nu_k}\exp(-\frac{x}{\nu_0}\varphi_{+\nu_k}(\mu,\lambda)$$

$$+\int_a^b\int_0^{+1} u(\nu,\zeta)\exp(-\frac{x}{\nu})\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta.$$

ეხლა გვჭირდება დაკმაყოფილება პირობისა, რომ გარედან დასხივება არ ხდება. ამას მივყავართ შემდეგ ტოლობამდე:

$$-\varphi_{-\nu_0}(\mu,\lambda) = \sum_{k\neq 0} a_{+\nu_k}\varphi_{+\nu_k}(\mu,\lambda)$$

$$+\int_a^b \int_0^{+1} u(\nu,\zeta)\varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta.$$

ამრიგად, a_+ და $u(\upsilon,\zeta)$ არიან ნახევარ ინტერვალში განაშალის კოეფიციენ-ტებისა. ისინი აიგება საკუთრივი ფუნქციების ბიორთოგონალობის თვისებიდან გამომდინარე. ანალოგიურად ერთსიჩქარიანის შემთხვევისა, მოძებნილ იქნას ექსტრაპოლირებული სიგრძე, ე.ი. მანძილი ზედაპირიდან სადაც სიმკვრივის ასიმპტოტური მდგენელი

$$\rho_{as} = 2\pi(\int_a^b \int_{-1}^{+1} \exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{-\nu_0}(\mu,\lambda)$$

$$+a_+ \exp(-\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu,\lambda)\, d\mu dE$$

ნულის ტოლია. ვთქვათ, $x = -z_0$ არის წერტილი, სადაც $\rho_{as} = 0$, რადგან

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \varphi_{\nu_0}(\mu,\lambda) = 1$$

ამიტომ

$$a_+ = -exp(-\frac{2z_0}{\nu_0}) = exp(-(\frac{2z_0}{\nu_0}) + \imath\pi)$$

საიდანაც მივიღებთ:

$$z_0 = \frac{\nu_0}{2}(-lna_+ + \imath\pi). \qquad (59)$$

2.2.7. გრინის ფუნქცია ნახევარ სივრცისათვის

გრინის ფუნქცია ნახევარ სივრცისათვის $\Psi_g(x,\lambda,\mu)$ განისაზღვრება როგორც გადატანის განტოლების ამონახსნი უსასრულო ნახევარსივრცეში, როცა გარედან არ ხდება დასხივება და გამოსხივების წყარო მდებარეობს განსახილველ არეში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ვეძებთ განტოლების ამოხსნას

$$\mu\frac{\partial\Psi_g}{\partial x}+\Psi_g(x,\mu,\lambda)$$

$$=\frac{c}{2}\int_a^b\int_{-1}^{+1}k(\mu,\lambda,\mu'\lambda')\Psi_g(x,\mu',\lambda')d\mu'd\lambda' \tag{60}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\delta(x-x_0)\delta(\lambda-\lambda_0)\delta(\mu-\mu_0),$$

$$x\in(0,+\infty),\quad \mu\in]-1,+1[\ \ \lambda\in[a,b]$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\Psi_g(0,\mu,\lambda)=0,\qquad \mu>0$$

და

$$\lim_{x\to\infty}\Psi(x,\mu,\lambda)=0$$

$$x\in(0,+\infty),\quad \mu\in]-1,+1[,\quad \lambda\in[a,b]$$

იმისათვის, რომ დაკმაყოფილდეს განხილული განტოლება, მის ამონახსნს ვეძებთ, როგორც ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს, და რომელიც დააკმაყოფილებს ნახტომის პირობას

$$\Psi_g^+(0,\mu,\lambda)-\Psi_g^-(0,\mu,\lambda)=\frac{1}{2\pi\mu}\delta(\lambda-\lambda_0)\delta(\mu-\mu_0)$$

გრინის ფუნქცია $G(x_0,\lambda_0,\mu_0 \to x,\lambda,\mu)$ უსასრელო გარემოს შემთხვევაში აკმაყოფილებს ამ პირობებს, ამიტომ გრინის ფუნქცია ნახევარ სივრცის შემთხვევისათვის შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით:

$$\Psi_g(x,\mu,\lambda) = G(x_0,\lambda_0,\mu_0 \to x,\lambda,\mu)$$

$$-a_+ \exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{-\nu_0}(\mu,\lambda)$$

$$-\int_a^b \int_0^{+1} u(\zeta,\nu)\exp(-\frac{x}{\nu_0})\varphi_{-\nu(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta.$$

$$x \in (0\ ,+\infty),\quad \mu \in]-1,+1[,\quad \lambda \in [a,b]$$

a_{ν_k} და $u(\nu,\zeta)$ კოეფიციენტები უნდა შერჩეულ იქნას ისე, რომ შესრულდეს პირობა

$$\Psi_g(0,\mu,\lambda) = 0,\qquad \mu > 0$$

ე.ი.

$$G(0,\lambda_0,\mu_0 \to 0,\lambda,\mu) =$$

$$-\int_a^b \int_0^{+1} u(\zeta,\nu)\varphi_{\nu(\zeta)}(\mu,\lambda)d\nu d\zeta.$$

$$\mu \in]-1,+1[,\quad \lambda \in [a,b]$$

ამრიგად, აქ $u(\nu,\zeta)$ კოეფიციენტები წარმოადგენენ G ფუნქციისათვის ნახევარ ინტერვალში განაშალის კოეფიციენტებს. მათი პოვნა ხდება საკუთრივი ფუნქციებისათვის ნახევარ ინტერვალში, ბიორთოგონალობის თვისების გამოყენებით.

2.2.8. ამოცანა კრიტიკულობაზე

მოცემულია $2h$ სისქის ფირფიტა, რომლის ცენტრში მდებარეობს კოორდინატთა სათავე, და განიხილება გადატანის ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mu \frac{\partial \Psi(x,\mu,\lambda)}{\partial x} + \Psi(x,\mu,\lambda)$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} \sum_{s=0}^{n} (2s+1) k_s(\lambda,\lambda') p_s(\mu) p_s(\mu') \Psi(x,\mu',\lambda') d\mu' d\lambda'$$

$$x \in (-h,h), \quad \mu \in]-1,+1[, \quad \lambda, \lambda \in [a,b].$$

ამ განტოლებისთვის ამონახსნისათვის სამართლიაიანია ტოლობა

$$\Psi(x,\mu,\lambda) = \Psi(-x,-\mu,\lambda)$$

ამიტომ, სასაზღვრო პირობა შეიძლება ჩაწერილ იქნას შემდეგნაირად:

$$\Psi(-b,\mu,\lambda) = 0, \quad \mu \geq 0 \quad \lambda \in [a,b].$$

განტოლების ამონახსნი წარმოვადგინოთ მოცემული სახით:

$$\Psi(x,\mu,\lambda) = \int_a^b \int_{-1}^{+1} u(\nu,\zeta) \psi_{\nu,(\zeta)}(x,\mu,\lambda) d\nu d\zeta$$

სადაც,

$$\psi_{\nu,(\zeta)}(x,\mu,\lambda) = \exp(-x/\nu) \varphi_{\nu,(\zeta)}(\mu,\lambda).$$

რადგან ადგილი აქვს ტოლობას

$$\psi_{\nu,(\zeta)}(x,\mu,\lambda) = \psi_{-\nu,(\zeta)}(-x,-\mu,\lambda)$$

ამიტომ, სასაზღვრო პირობიდან გამომდინარე გვაქვს შემდეგი ტოლობა

$$u(\nu,\zeta) = u(-\nu,\zeta).$$

აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\Psi(x,\mu,\lambda) = \int_a^b \int_0^{+1} u(\nu,\zeta)(\psi_{\nu,(\zeta)}(x,\mu,\lambda) + \psi_{-\nu,(\zeta)}(x,\mu,\lambda)$$

$$x \in (-h,h), \quad \mu \in]-1,+1[, \quad \lambda, \lambda \in [a,b].$$

$u(\nu,\zeta)$ სიდიდის მოსაძებნად უნდა ამოიხსნას შემდეგი განტოლება

$$\int_a^b \int_0^{+1} u(\nu,\zeta)(\psi_{\nu,(\zeta)}(-h,\mu,\lambda) + \psi_{-\nu,(\zeta)}(-h,\mu,\lambda))d\nu d\zeta = 0.$$

$$\mu \in]-1,+1[, \quad \lambda, \lambda \in [a,b].$$

ამ განტოლებისათვის ამონახსნის პოვნა პრობლემას წარმოადგენს. საჭირო ხდება მისი რედუცირება ფრედგოლმის ინტეგრალურ განტოლებაზე.

2.2.9. არასტაციონალური ამოცანა

შესაძლებელია ანალოგიური მიდგომის გამოყენება გადატანის თეორიის არასტაციონალური ამოცანის ამოხსნისთვის. სახელდობრ, შესაძლებელია არასტაციონალური ამოცანის ამონახსნის ე.წ. ნორმალური მოდებით გაშლა სივრცული ცვლადის მიმართ. რისთვისაც გამოვიყენოთ ლაპლასის გარდაქმნა არასტაციონალური განტოლების საძებნი ამონახსნისათვის

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} + \psi \ (x,\mu,\lambda,t)$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} \sum_{s=0}^{n} (2s+1) k_s(\lambda,\lambda') p_s(\mu) p_s(\mu') \psi(x,\mu',\lambda',t)) d\mu' d\lambda'$$

$$t > 0, \quad x \in (-\infty,+\infty), \mu \in]-1,+1[, \quad \lambda, \lambda \in [a,b].$$

ლაპლასის გარდაქმნა $\psi_s(x,\mu,\lambda)$ ფუნქციისა $\psi(x,\mu,\lambda,t)$ აკმაყოფილებს ერთგვაროვან განტოლებას

$$\mu \frac{\partial \psi_s}{\partial x} + \psi_s(x,\mu,\lambda)$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} \sum_{s=0}^{n} (2s+1) k_s(\lambda, \lambda') p_s(\mu) p_s(\mu') \psi_s(x, \mu', \lambda')\, d\mu' d\lambda'.$$

მიღებული განტოლება ფაქტიურად ემთხვევა სტაციონალურ განტოლებას. იმ განსხვავებით, რომ განტოლებაში შემოდის ახალი დამატებითი s ცვლადი. სტაციონალური ამოცანის კვლევის შესაბამისად ამ განტოლების ამონახსნი წარმოიდგინება განცალებული ცვლადებით შემდეგი სახით:

$$\psi_s(x, \mu, \lambda) = \exp(-sx/\nu) \varphi_{\nu,s}(\mu, \lambda).$$

მაშინ, ფუნქცია $\psi_{\nu,s}(\mu, \lambda)$ იქნება შემდეგი ინტეგრალური განტოლების ამონახსნი

$$(\nu - \mu) \varphi_{\nu,s}(\mu, \lambda)$$
$$= \frac{c\nu}{2s} \int_a^b \int_{-1}^{+1} \sum_{s=0}^{n} (2s+1) k_s(\lambda, \lambda') p_s(\mu) p_s(\mu') \psi(x, \mu', \lambda', t) d\mu' d\lambda'$$
$$\mu \in]-1, +1[, \quad \lambda, \lambda' \in [a, b],$$

რომელსაც უწოდებენ მახასიათებელ განტოლებას. რაც ფაქტიურად გარკვეული აზრით მსგავსი სახის განტოლებაა რომელიც განხილულია ამ პარაგრაფში.

2.3. ნეიტრონების გადატანის თეორიიდან წარმოქმნილი ერთი სინგულარულ ინტეგრალური განტოლების შესახებ

ჰელდერის ფუნქციათა კლასში მოიცემა ამოხსნადობის პირობები საძებნი ფუნქციის მიმართ ერთი ორცვლადიანი ინტეგრალური განტოლებისათვის, რომელსაც ერთი ცვლადის მიმართ გააჩნია სინგულარობა. ასეთი სახის განტოლებები გვხვდებიან მათემატიკური ფიზიკის ნეიტრონების გადატანის თეორიაში. ამონახსნის მოძებნა მიიყვანება ფრედგოლმის მეორე გვარის ერთცვლადიანი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნამდე. აღნიშნულ განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$(Lu)(x,t) \coloneqq \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)}{s-t} u(y,s)dsdy + u(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y)}{s-t} u(y,t)dsdy = f(x,t), \quad (61)$$

$$x \in [a,b], \qquad t \in]-1,+1[$$

სადაც, $k(x,y)$ არის ნამდვილი ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია, მარჯვენა მხარე $f(x,t)$ არის ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს t ცვლადის მიმართ H^* პირობებს. შემდგომში ასეთ ფუნქციათა კლასი აღნიშნული იქნება D^*-თი. ჩვენ ვეძებთ ამონახსნს $u \in D^*$. ჩვენის აზრით, ეს კლასი ბუნებრივია და პოულობს პრაქრიკულ გამოყენებას. შემოვიტანოთ წრფივი ინტეგრალური ოპერატორი რომელიც განისაზღვრება ფორმულით

$$(\Omega_z g_z)(x,t) := g_z(x,t) + z \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{k(x,y)}{s-z} g_z(y,s)dsdy \quad (62)$$

$$x \in [a,b], t \in]-1,+1[$$

სადაც: z პარამეტრი სიბრტყის წერტილს წარმოადგენს. L ოპერატორის კვლევისათვის დიდი მნიშვნელობა გააჩნია ამ შემოტანილ ოპერატორს. Ω_z ოპერატორი ოპერირებს $g_z(x,t)$ ფუნქციაზე, რომელიც z ცვლადის მიმართ უბაბ-უბან ჰოლომორფულია კომპლექსურ სიბრტყეზე $[-1,+1]$, ჭრილით, ხოლო t ცვლადით აკმყოფილებს H^* პირობებს. პლემელ-სოხოსკის ფორმულების საშუალებით შეიძლება გამოთვლილ იქნეს Ω_z ოპერატორის სასაზღვრო მნიშვნელობები:

$$(\Omega_t^+ g_t^+)(x,t) := g_t^+(x,t) + t \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{k(x,y)}{s-t} g_t^+(y,s)dsdy + \imath\pi \int_a^b k\,(x,y) g_t^+(y,t)dy \quad (63)$$

$$t \in]-1,+1[, x \in [a,b]$$

და

$$(\Omega_t^- g_t^-)(x,t) \coloneqq g_t^-(x,t) + t \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{k(x,y)}{s-t} g_t^-(y,s)dsdy - i\pi \int_a^b k\,(x,y) g_t^-(y,t)dy \quad (64)$$

$$t \in]-1,+1[, x \in [a,b].$$

$\aleph$ აღვნიშნოთ სიმრავლე z-ის იმ მნიშვნელობისა, როცა ერთგვაროვანი განტოლება

$$g_z(x,t) + z\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{k(x,y)}{s-z} g_z(y,s)dsdy = 0$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

უშვებს არატრივიალურ ამონახსნს. z-ის ასეთ მნიშვნელობებს უწოდებენ Ω_z ოპერატორის საკუთრივ მნიშვნელობებს. ვინაიდან Ω_z ოპერატორის გული წარმოადგენს უბან-უბან ჰოლომორფულ ფუნქციას z კომპლექსური ცვლადის მიმართ, აკმაყოფილებს H პირობას მეორე ცვლადის მიმართ და უსასრულობაში ქრობადია, ამიტომ ტამარკინის თეორემის თანახმად რეგულარულ საკუთრივ რიცხვთა სიმრავლე კომპლექსურ სიბრტყეზე ჭრილით [-1,+1] არაუმეტეს თვლადია. შესაძლებელია რომ ვაჩვენოთ: (i_1). თუ g_{z_k} არის (64) განტოლების ამოხსნა, მაშინ ფუნქცია

$$\tau_{z_k}(x,t) = \frac{z_k g_{z_k}(x,t)}{z_k - t}$$

სადაც, $z_k \in \aleph$, არის შემდეგი განტოლების ამოხსნა

$$(z-t)\tau_z(x,t) - z\int_a^b \int_{-1}^{+1} k\,(x,y)\tau_z(y,s)dsdy = 0 \; t \in]-1,+1[$$

$$x \in [a,b],\; t \in]-1,+1[$$

როცა $z = z_k$ და პირიქით.

(i_2). თუ, z არის Ω_z ოპერატორის საკუთრივი მნიშვნელობა r ჯერადობის, მაშინ ის აგრეთვე, იქნება საკუთრივი მნიშვნელობა r ჯერადობის შემდეგი ოპერატორისათვის

$$(\Omega_z^* q_z)(z,x) := q(z,x) + z\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{k(y,x)}{s-z} q(z,y)dsdy$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

და პირიქით.

(i_3). შემდგომში ჩვენ განვიხილავთ იმ შემთხვევას როცა $\aleph$ სიმრავლე სასრულია.

(i_4). თუ $z \neq z'$, მაშინ

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} t\,\tau_z^*(x,t)\tau_{z'}(x,t)dtdx = 0$$

სადაც, $\tau_z^*(x,t)$ არის შემდეგი განტოლების ამოხსნა

$$(z-t)\tau_z^*(x) = z\int_a^b \int_{-1}^{+1} k\,(y,x)\tau_z^*(y,s)dsdy = 0$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

მართლაც, $\tau_z(x,t)$ აკმაყოფილებს განტოლებას

$$(1-\frac{t}{z})\tau_z(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} k\,(y,x)\tau_z(y,s)dsdy = 0$$

ხოლო, $\tau_z^*(x,t)$ კი შესაბამისად შემდეგ განტოლებას

$$(1-\frac{t}{z'})\tau_z{'}^*(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} k\,(y,x)\tau_z{'}^*(y,s)dsdy = 0.$$

ეს გამოსახულებები გადავამრავლოთ შესაბამისად $\tau_{z'}^*(x,t)$ და $\tau_z(x,t)$-ზე, გამოვაკლოთ პირველს მეორე, მივიღებთ:

$$(\frac{1}{z'}-\frac{1}{z})\int_a^b \int_{-1}^{+1} t\,\tau_{z'}^*(y,t)\tau_z(y,t) = 0.$$

$\tau_{z_k}(x,t)$ და $\tau_{z_k}^*(x,t)$, $z_k \in \Re$, ფუნქციებს უწოდებენ $k(x,y)$ და $k(y,x)$ გულების შესაბამის საკუთრივ ფუნქციებს.

L ოპერატორისათვის სამართლიანია შემდეგი თეორემა

ვთქვათ $f(x.t) \in D^*$. სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას

$$(Lu)(x,t) = \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)}{s-t} u(y,s)dsdy + u(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y)}{s-t} u(y,t)dsdy = f(x,t), \tag{65}$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

რომ გააჩნდეს ამონახსნი D^*კლასში, აუცილებელი და საკმარისია, რომ f აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} t\,\tau_{z_k}^*(x,t)f(x.t)dtdx = 0, \quad z_k \in \aleph. \tag{66}$$

აუცილებლობის დამტკიცება: განვიხილოთ შემდეგი უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია

$$\psi_z(x,t)=\frac{1}{2\imath\pi}\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{sk(x,y)}{s-z}u(y,s)dsdy$$

სადაც, z სიბრტყეზე მდებარე წერტილია. ამ ფუნქციას გააჩნია შემდეგი თვისებები:

(P_1). საბრტყეზე ჭრილით [-1,+1], ის არის z-ის მიმართ უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქცია.

(P_2). როცა $z\to\infty$, ის ხდება ნულის ტოლი თანაბრად x -ის მიმართ.

(P_3). პლემელ-სოხოცკის ფორმულების გამო გვაქვს

$$\psi_t^+(x,t)=\frac{1}{2\imath\pi}\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{sk(x,y)}{s-t}u(y,t)dtdy+\frac{t}{2}\int_a^b k(x,y)u(y,t)dy$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[$$

და

$$\psi_t^-(x,t)=\frac{1}{2\imath\pi}\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{sk(x,y)}{s-t}u(y,t)dtdy-\frac{t}{2}\int_a^b k(x,y)u(y,t)dy$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[$$

ამ ტოლობების (44) და (45)-თან კომბინირების შედეგად, (42)-დან მივიღებთ, რომ $\psi_z(x,t)$ ფუნქცია არის ამონახსნი შემდეგი სასაზღვრო ამოცანის

$$(\Omega_t^+\psi_t^+)(x,t)-(\Omega_t^-\psi_t^-)(x,t)=t\int_a^b k(x,y)f(y,t)dy.$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[.$$

აქედან გამომდინარე პლემელ-სოხოცკის ფორმულების გათვალისწინებით ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$(\Omega_z\psi_z)(x,t)=\frac{1}{2\pi\imath}\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{sk(x,y)f(y,t)}{s-z}dsdy$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[,$$

იმისათვის რომ, ამ ინტეგრალით განისაზღვროს ანალიზური ფუნქცია $\Psi_z(x,t)$ სიბრტყეზე ჭრილით [-1,+1], აუცილებელი და საკმარისია მისი მარჯვენა მხარე აკმაყოფილებდეს პირობას:

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \tau_{z_k}^{*}(x,t) \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)f(y,s)}{s-z} ds dy dt dx = 0$$
(67)

მარტივი გარდაქმნის შედეგად მივიღებთ (56) ტოლობას. აუცილებლობა დამტკიცებულია.

საკმარისობის დამტკიცება: ვთქვათ, $f(x,t)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს (56) პირობას. ტამარკინის თეორემის თანახმად [5] გამომდინარეობს რომ ამონახსნს გააჩნია შემდეგი თვისებები:

(R1). z ცვლადის მიმართ ის უბან-უბან ჰოლომორფულია

(R2). როცა $z \to \infty$ ის მიისწრაფის ნულისაკენ თანაბრად x ცვლადის მიმართ

(R3). ის შეიძლება წარმოდგენილ იქნას შემდეგი სახით

$$\psi_z(x,t) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{-1}^{+1} \frac{s m_s(x,t)}{s-z} ds$$

$$z \bar{\in}]-1,+1[, \quad t \in]-1,+1[\quad x \in [a,b]$$

სადაც, $m_s(x,t)$ არის ცალსახად განსაზღვრული ფუნქცია. პლემელ-სოხოცკ-ის ფორმულების გათვალისწინებით ზღვრული მნიშვნელობებისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\psi_t^{+}(x,t) + \psi_t^{-}(x,t) = \frac{1}{\imath\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\psi_s^{+}(x,t) - \psi_s^{-}(x,t)}{s-t} ds$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$
(68)

(54) გამოყენებით (57) დან ჩვენ შეგვიძლია დავწეროთ

$$\bar{\psi_t}(x,t) - t \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)}{t-s} \bar{\psi_t}(y,s) ds dy$$
(69)

$$+\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)}{s-t} \bar{\psi}_s(y,t) ds dy = \int_a^b k(x,y) f(y,t) dy,$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

სადაც,

$$\bar{\psi}_t(x,t) = \psi_t^+(x,t) - \psi_t^-(x,t)$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

განვიხილოთ ამჯერად შემდეგი განტოლება:

$$u(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y)}{t-s} ds u(y,t) dy$$

(70)

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{s\bar{\Psi}_t(x,s)}{t-s} ds + f(x,t)$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

რომელსაც აქვს ერთადერთი ამონახსნი. შემოვიტანოთ აღნიშვნა

$$p(x,t) = \bar{\psi}_t(x,t) - \int_a^b k(x,y) u(y,t) dy$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

(68) დახმარებით (69)-დან გამომდინარეობს:

$$p(x,t)+\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(x,y)}{s-t}p(y,t)dsdy=0.$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[$$

მაგრამ, Ω_z, ოპერატორს [-1, +1] სეგმენტზე არ აქვს დისკრეტული საკუთრივი რიცხვები, ამიტომ

$$\bar{\psi}_t(x.t)=\int_a^b k(x,y)u(y,t)dy$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[$$

ამ უკანასკნელის გათვალისწინებით (70)-დან მივიღებთ:

$$u(x,t)+\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(x,y)}{s-t}dsu(y,t)dy$$

$$=\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{sk(x,y)}{t-s}u(y,s)dsdy+f(x,t)$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[$$

რაც იმას ნიშნავს რომ (67) ტოლობა სამართლიანია და ამრიგად თეორემა დამტკიცებულია.

ამჯერად, ჩვენს მიზანს წარმოადგენს, რომ L ოპერატორი უფრო ღრმად შევისწავლოთ. გვსურს ვიპოვოთ ოპერატორი, რომელიც მოახდენს L ოპერატორის რეგულარიზაციას და აქედან გამომდინარე განსახილველი

განტოლება დავიყვანოთ რეგულარულ განტოლებაზე. ამ მიზნით შემოვიტანოთ შემდეგი სინგულარული ოპერატორი:

$$(\mathbf{S}u)(x,t) := \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{t-s} u(y,s)dsdy$$

$$+u(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{s-t} dsu(y,t)dy,$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[.$$

შევნიშნავთ, რომ აღნიშნული ოპერატორი შესაძლებელია სხვა ფორმითაც იქნას ჩაწერილი. აღნიშნული ფორმა ზოგჯერ მოხერხებულია კვლევისას

$$(\mathbf{S}u)(x,t) := u(x,t)$$
$$+ \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{u(y,s)-u(y,t)}{t-s} k(y,x)dsdy$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[.$$

ჩვენ აღვნიშნავთ შემოყვანილი ოპერატორის შემდეგ თვისებებს:

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$(\mathbf{S}k(\cdot,y)(x,t) = k(x,y)$$

მართლაც,

$$(\mathbf{S}k(\cdot,y))(x,t) := \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y')}{t-s} k(x,y')dsdy'$$

$$+k(x,y) - \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y')}{t-s} k(x,y')dsdy' = k(x,y)$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[.$$

ანალოგიური მოქმედებების შედეგად გვექნება:

$$(\mathbf{S}^* k(y,\cdot))(x,t) := \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y',x)}{t-s} k(y',x)dsdy'$$

$$+k(y,x) - \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y',x)}{t-s} k(x,y')dsdy' = k(y,x)$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$(S^* k(.,y)(x,t) = k(y,x))$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

ნებისმიერი ორი u და v ფუნქციისათვის D* სიმრავლიდან ადგილი აქვს ტოლობას

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} u(x,t)(\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{t-s} v(y,s)dsdy$$

$$+v(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{s-t} dsv(y,t)dy)$$

$$=v(x,t)\int_a^b\int_{-1}^{+1}u(x,t)(\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(y,x)}{t-s}v(y,s)dsdy$$

$$+v(x,t)+\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(y,x)}{s-t}dsu(y,t)dy)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$\int_a^b\int_{-1}^{+1}u\mathbf{S}vdtdx=\int_a^b\int_{-1}^{+1}v\mathbf{L}udtdx.$$

ამრიგად, თუ (1) განტოლებას გააჩნია ამონახსნი , მაშინ აუცილებლად

$$\int_a^b\int_{-1}^{+1}vfdtdx=0,$$

სადაც, v არის ამონახსნი შემდეგი განტოლების

$$\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(y,x)}{t-s}v(y,s)dsdy$$

$$+v(x,t)+\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(y,x)}{s-t}dsv(y,t)dy=0$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[$$

ე.ი.

$$\mathbf{S}v=0.$$

ადგილი აქვს აგრეთვე შემდეგ ტოლობას

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{t-s} \tau_{z_k}^{*}(y,s) ds dy$$

$$+\tau_{z_k}^{*}(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{s-t} ds \tau_{z_k}^{*}(y,t) dy = 0$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$S\tau_{zk}^{*} = 0$$

ანალოგიურად შეიძლება ჩვენება შემდეგი ტოლობისა

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y)}{t-s} \tau_{z_k}(y,s) ds dy$$

$$+\tau_{z_k}(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{s-t} ds \tau_{z_k}(y,t) dy = 0$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ აგრეთვე

$$S\tau_{zk}^{*} = 0$$

შემდგომი განხილვისათვის ჩვენ გვჭირდება შემდეგი იგივეობა

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)}{t-s} \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{s'k(y,y')}{s'-s} u(y',s')ds'dy'dsdy$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{u(y',s')}{s'-t} \Big(\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)s'k(y,y')}{t-s} dsdy$$

$$- \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)s'k(y,y')}{s'-s} dsdy \Big) ds'dy'$$

$$+\pi^2 t^2 \int_a^b \int_a^b k(x,y')k(y,y')u(y',t)dydy'.$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

ეს ფორმულა შეიძლება მიღებულ იქნას ბერტრან-პუანკარეს ფორმულის გამოყენებით [3]. ქვემოთ მოყვანილი თეორემა ადგენს S ოპერატორის მნიშვნელოვან თვისებას.

ვთქვათ,

$$(\mathbf{K}u)(x,t) = u(x,t) + \int_a^b r(x,y,t)u(y,t)dy$$

სადაც

$$r(x,y,t) = \pi^2 t^2 \int_a^b k(x,y')k(y',y)dy' - \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y)}{t-s} ds$$

$$- \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{t-s} ds + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y')}{t-s} ds \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y',y)}{t-s'} ds'dy'.$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

ჩანს რომ, როცა $k(x,y) = k(y,x)$ მაშინ შემდეგი დეკომპოზიცია არის სამართლიანი

$$\mathbf{K}u = (\mathbf{B} + \imath\pi\mathbf{C})(\mathbf{B} - \imath\pi\mathbf{C})u$$

სადაც,

$$(\mathbf{B}u)(x,t) \equiv u(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y)}{t-s} u(y,t)dsdy$$

$$(\mathbf{C}u)(x,t) \equiv t\int_a^b k(x,y)u(y,t)dy.$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

ზოგად შემთხვევაში ანალოგიური დეკომპოზიცია სამართლიანია. ახლა განვსაზღვროთ შემდეგი ინტეგრალური ოპერატორი

$$(\mathbf{T}u)(x,t) = (\mathbf{S}\dot{u})(x,t) + \int_a^b g(x,y,t)(\mathbf{S}\dot{u})(y,t)dy$$

რაც ნიშნავს:

$$\mathbf{T}u(x,t) = \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{t-s} su(y,s)dsdy$$

$$+tu(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{s-t} dstf(y,t)dy$$

$$+\int_a^b g(x,y,t)(\int_{-1}^{+1} \frac{tk(y',y)}{t-s} su(y,s)dsdy$$
$$+tu(y,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y',y)}{s-t} dsu(y,t))dy$$

აქ:

$$\dot{u}(x,t) = tu(x,t)$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

სადაც, $g(x,y,t)$ არის ერთადერთი ამონახსნი შემდეგი ერთცვლადიანი ფრედგოლმის ინტეგრალური განტოლების

$$g(x,y,t)+\int_a^b r(y',y,t)g(x,y',t)dy'=r(x,y,t),$$

$$x,y\in[a,b],\ \ t\in]-1,+1[.$$

ლემა. ტოლობა

$$\mathbf{TL}u(x,t)=\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(y,x)}{t-s}s(Lu)(y,s)dsdy$$

$$+t(Lu)(x,t)+\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(y,x)}{s-t}dst(Lu)(y,t)dy$$

$$+\int_a^b g(x,y,t)(\int_{-1}^{+1}\frac{tk(y',y)}{t-s}s(Lu)(y,s)dsdy$$
$$+t(Lu)(y,t)+\int_a^b\int_{-1}^{+1}\frac{tk(y',y)}{s-t}dst(Lu)(y,t))dy=u(x,t)$$

$$x\in[a,b],\quad t\in]-1,+1[$$

სამართლიანია,

რაც იმას ნიშნავს, რომ

$$(\mathbf{TL}u)(x,t)=u(x,t)$$

წინა მსჯელობებიდან გამომდინარე არის სამართლიანი

ძირითადი თეორემა. ვთქვათ $f\in D^*$ სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას:

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)}{s-t} u(y,s) ds dy$$

$$+u(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y)}{s-t} u(y,t) ds dy = f(x,t),$$

(71)

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[$$

რომ გააჩნდეს ამონახსნი D^* კლასში აუცილებელი და საკმარისია: $f(x.t) \in D^*$ აკმაყოფილებდეს პირობებს

$$\int_a^b \int_{-1}^{+1} f(x.t) \tau^*_{z_k}(x,t) dt dx = 0, \quad z_k \in \aleph.$$

როცა ეს პირობები შესრულებულია მაშინ მისი ერთადერთი ამონახსნი მოიცემა ფორმულით:

$$u(x,t) = (\mathbf{T}f)(x,t).$$

რაც ნიშნავს:

$$u(x,t) = \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{t-s} s f(y,s) ds dy$$

$$+tf(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y,x)}{s-t} ds t f(y,t) dy$$

$$+ \int_a^b g(x,y,t) (\int_{-1}^{+1} \frac{tk(y',y)}{t-s} s f(y,s) ds dy$$

$$+tf(y,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(y',y)}{s-t} ds t f(y,t)) dy$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[.$$

2.4. ნეიტრონებით დასხივების გავლენა პროფილირებული ნამზადების სიმტკიცესა და მდგრადობაზე

როგორც ცნობილია ბირთვული რეაქტორების ძირითად კონსტრუქციულ ნაწილს წარმოადგენენ ლითონის წრიული ფირფიტები და კონუსური გარსები. მათი სიმტკიცის მარაგის დადგენა რეაქტორის მუშაობის პროცესში ერთ-ერთ აქტუალურ პრობლემადაა და მიჩნეული.

მყარი სხეულები რადიოაქტიური დასხივების შედეგად იცვლიან როგორც ფიზიკურ, ასევე მექანიკურ თვისებებს. აღმოჩნდა, რომ დასხივების შედეგად ზოგიერთი მასალის დენადობის ზღვარი იზრდება 10-ჯერ და მეტჯერ. რაც შეეხება მასალის დრეკად მახასიათებლებს, მათი ცვლილება უფრო უმნიშვნელოა (10%-მდე).

ის თვისება, რომ დასხივების შედეგად იზრდება დენადობის ზღვარი და რომ ეს პროცესი საკმაოდ მდგრადია, შეიძლება გამოყენებულ იქნეს მტკიცე და ამავე დროს მსუბუქი კონსტრუქციების შესაქმნელად.

წრიულ ფირფიტებს გამოყენება აქვს ასევე ტექნიკაში. ძალიან ხშირად, სხვადასხვა მოსაზრების გამო მათი გეომეტრიული მახასიათებლები და დატვირთვის სახე წინასწარ შეზღუდულია. ბუნებრივია, ასეთი ფირფიტები წინასწარ მოვათავსოთ ნეიტრონული დასხივების ქვეშ. დასხივების დოზად მიღებულია ნეიტრონების რიცხვი, რომელიც გადის სხეულის 1სმ^2 ზედაპირში, მთელი გამოცდის პროცესში და იზომება nVt ერთეულებში, სადაც n ნეიტრონების რიცხვია 1სმ^3 ნაკადში, V - ნაკადის საშუალო სიჩქარე, ხოლო t - დასხივების დროის ინტენსივობა ნეიტრონების ნაკადით.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ ნეიტრონული დასხივების შედეგად მცირედ, მაგრამ მაინც იცვლება იუნგის მოდული, მაშინ წრიული რგოლური ფირფიტა, რომელიც განიცდის ღერძსიმეტრიული $q_z = \lambda q(r)$, განაწილებული დატვირთვისა და შიდა ($z=a$) კონტურის გასწვრივ მოქმედი განივი Q_a ძალების მოქმედებას, გაანგარიშდება შემდეგი დიფერენციალური განტოლებების დახმარებით :

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}+\frac{d\ln E_N}{dr}\right)\frac{d\varphi}{dr}-\left(\frac{1}{r}-\frac{v}{r}\frac{d\ln E_N}{dr}\right)\varphi=\frac{12(1-v^2)}{E_N h^3}\frac{a}{r}Q_a-\frac{12(1-v^2)}{E_N h^3}\frac{\lambda}{r}\int_a^r q(r)dr \quad (72)$$

სადაც φ ფირფიტის კვეთის მობრუნების კუთხეა.

(72) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნის გამარტივების მიზნით შემოვიღოთ უგანზომილებო სიდიდეები შემდეგი სახით:

$$\frac{r}{a}=x\ , \quad \frac{E_N}{E}=y\ , \quad -\frac{12(1-v^2)a^2Q_a}{Eh^3}=A, \quad \frac{6(1-v^2)a^3\lambda}{Eh^3}=P \qquad (73)$$

სადაც, E დასხივებამდე მასალის იუნგის მოდულია, ხოლო E_N - დასხივების შედეგად მიღებული იუნგის მოდული (E_N ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ დასხივების დოზის წრფივი კანონის სახით).

(73)-ის გათვალისწინებით (71) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{d\ln y}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dx}-\left(\frac{1}{x^2}-\frac{v}{x}\frac{d\ln y}{dx}\right)\varphi=\frac{A}{xy}-\frac{2P}{xy}\int q(ax)xdx, \qquad (74)$$

დავუშვათ, რომ $q(r)=-\left[8+\frac{45}{2}a_1\left(\frac{r}{a}\right)+48a_2\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{175}{2}a_3\left(\frac{r}{a}\right)^3\right],$

მაშინ, $q(ar)=-\left[8+\frac{45}{2}a_1x+48a_2x^1+\frac{175}{2}a_3x^3\right]$ და მაშასადამე, განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{d\ln y}{dx}\right)\frac{d\varphi}{dx}-\left(\frac{1}{x}-\frac{v}{x}\frac{d\ln y}{dx}\right)\varphi=\frac{A}{xy}+\frac{1}{y}(8x+15a_1x^2+24a_2x^3+35a_3x^4)P \qquad (75)$$

საკითხის შესწავლა დავიწყოთ მთლიანი ფირფიტის შესწავლით. თავდაპირველად უგულვებელვყოთ დრეკადობის მოდულის ცვლილება. ამ შემთხვევაში განტოლება (75) მიიღებს შემდეგ სახეს ($A=0, y=1$):

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx}-\frac{1}{x^2}\varphi=(8x+15a_1x^2+24a_2x^3+35a_3x^4)P \qquad (76)$$

განტოლება (76)-ის ამოხსნას აქვს შემდეგი სახე:

$$\varphi(x)=c_1x+(x^3+x^4+a_2x^5+a_3x^6)P \qquad (77)$$

წარმოებულისათვის კი გვექნება:

$$\varphi(x)=c_1+(3x^2+4a_1x^3+5a_2x^4+6a^3x^5)P. \qquad (78)$$

რაც შეეხება მომენტებს, რომლებიც გამოითვლებიან ფორმულებით:

$$M_r = -D\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{\nu}{r}\varphi\right)$$

$$M_\theta = -D\left(\nu\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{r}\varphi\right)$$

მათთვის მივიღებთ:

$$M_r = \frac{a^2\lambda}{2}\left[(1+\nu)c_1 + (3+\nu)x^2 + a_1(4+\nu)x^2 + a_2(5+\nu)x^4 + a_3(6+\nu)x^5\right]$$

$$M_\theta = \frac{a^2\lambda}{2}\left[(1+\nu)c_1 + (3\nu+1)x^2 + a_1(4\nu+1)x^3 + a_2(5\nu+1)x^4 + a_3(6\nu+1)x^5\right]$$

სადაც c_1 საინტეგრო მუდმივია და განისაზღრება სათანადო სასაზღვრო პირობიდან.

იმ შემთხვევაში, როცა ფირფიტა თავისუფლადაა დაყრდნობილი გვექნება:

$$(1+\nu)c_1 = -[(3+\nu)+a_1(4+\nu)+a_2(5+\nu)+a_3(6+\nu)]$$

მაშასადამე,

$$M_r = \frac{a^2\lambda}{2}\left[(3+\nu)(x^2-1) + a_1(4+\nu)(x^3-1) + a_2(5+\nu)(x^4-1) + a_3(6+\nu)(x^5-1)\right]$$

$$M_\theta = \frac{a^2\lambda}{2}\left[(3\nu+1)x^2 + a_1(4\nu+1)x^3 + a_2(5\nu+1)x^4 + a_3(6\nu+1)x^5 - (3+\nu) - \right.$$
$$\left. - a_1(4+\nu) - a_2(5+\nu) - a_3(6+\nu)\right] \qquad (79)$$

შევადგინოთ პლასტიკურობის პირობა: $M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_s h^2}{6}\right)^2$

x	$-M_r / \frac{a^2\lambda}{2}$	$-M_\theta / \frac{a^2\lambda}{2}$
0	$3{,}3+4{,}3a_1+5{,}3a_2+6{,}3a_3$	$3{,}3+4{,}3a_1+5{,}3a_2+6{,}3a_3$
0,2	$3{,}168+4{,}2656a_1+5{,}29152a_2+6{,}29798a_3$	$3{,}224+4{,}2824a_1+5{,}296a_2+6{,}2991a_3$
0,4	$2{,}772+4{,}0248a_1+5{,}16432a_2+6{,}23549a_3$	$2{,}996+4{,}1592a_1+5{,}236a_2+6{,}27133a_3$
0,6	$2{,}112+3{,}3712a_1+4{,}61312a_2+5{,}81011a_3$	$2{,}616+3{,}8248a_1+4{,}976a_2+6{,}08227a_3$
0,8	$1{,}188+2{,}0984a_1+3{,}12912a_2+4{,}23562a_3$	$2{,}084+3{,}1736a_1+4{,}276a_2+5{,}3825a_3$
1,0	0	$1{,}4+2{,}1a_1+2{,}8a_2+3{,}5a_3$

როცა $x = 0$, $(3{,}3 + 4{,}3a_1 + 5{,}3a_2 + 6{,}3a_3)\dfrac{a^2\lambda}{2} = \dfrac{\sigma_s h^2}{6}$,

როცა $x = 1$, $(1{,}4 + 2{,}1a_1 + 2{,}8a_2 + 3{,}5a_3)\dfrac{a^2\lambda}{2} = \dfrac{\sigma_s h^2}{6}$,

$$\begin{cases} 9{,}9 + 12{,}9a_1 + 15{,}9a_2 + 18{,}9a_3 = \dfrac{\sigma_2 h^2}{a^2\lambda} \\ 4{,}2 + 6{,}3a_1 + 8{,}4a_2 + 10{,}5a_3 = \dfrac{\sigma_2 h^2}{a^2\lambda} \end{cases}$$

განტოლება (63)-ის ამოხსნის მიზნით შემოვიღოთ ახალი ცვლადი:

$$\varphi = Z \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x} + \frac{d\ln y}{dx}\right)dx\right\} = \frac{1}{\sqrt{xy}}Z,$$

მაშინ მივიღებთ:

$$Z'' - F_1(x)Z = AF_2(x) + PF_3 \qquad (80)$$

სადაც:

$$F_1(x) = \frac{0{,}75}{x^2} + \frac{0{,}5 - v}{xy}\frac{dy}{dx} + \frac{0{,}5}{y}\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{0{,}25}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{xy}},\ F_3(x) = -\frac{2}{\sqrt{xy}}\int^x q(ax)xdx. \qquad (81)$$

დავიყვანოთ (90) განტოლება შესაბამის ინტეგრალურ განტოლებაზე:

$$Z''(x) = AF_2(x) + PF_3(x) + F_2(x)\left[Z_1(1) + (x-1)Z''(1) + \int_1^x (x-t)Z''(t)dt\right],$$

$$Z''(x) = Z_1(x)A + Z_2(x)P + Z_3(x)Z(1) + Z_4(x)Z(1),$$

სადაც:

$$Z_1(x) = F_2(x) + F_1(x)\int_1^x (x-t)Z_1(t)dt,$$

$$Z_2(x) = F_3(x) + F_1(x)\int_1^x (x-t)Z_2(t)dt,$$

$$Z_3(x) = F_1(x) + F_1(x)\int_1^x (x-t)Z_3(t)dt,$$

$$Z_4(x) = (x-1)F_1(x) + F_1(x).\int_1^x (x-t)Z_3(t)dt. \qquad (82)$$

ვიგულისხმოთ, რომ $y = \frac{E_N}{E} = e^{\alpha N}$, მაშინ გვექნება ($v =$ 0,3):

$$F_1(x) = \frac{0{,}75}{x^2} + \frac{0{,}2\alpha}{x}\frac{dN}{dx} + 0{,}25\alpha^2\left(\frac{dN}{dx}\right)^2 + 0{,}5\alpha\left(\frac{d^2N}{dx^2}\right),$$

$$F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\alpha}{2}N}, \quad F_3(x) = -\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\alpha}{2}N}.$$

თავდაპირველად ვიგულისხმოთ, რომ $E_N = E$, რაც იმის ტოლფასია, რომ $y = 1$ და $N = 0$, მაშინ გვექნება:

$$F_1(x) = \frac{0{,}75}{x^2}, \quad F_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad F_3(x) = -\frac{x^2-1}{\sqrt{x}},$$

განტოლებები (92) მიიღებს შესაბამის სახეს:

$$Z_1(x) = \sqrt{x}\left[\frac{8}{dx}\ln x + \frac{13}{16x} + \frac{3}{16x^3}\right];$$

$$Z_2(x) = -\frac{x^2-1}{\sqrt{x}} + \frac{0{,}75}{x^2}\int_1^x (x-t)Z_2(t)dt;$$

$$Z_2(x) = -\sqrt{x}\left[\frac{35x}{32} - \frac{8}{3x}\ln x - \frac{1}{x} - \frac{3}{32x^3}\right];$$

$$Z_3(x) = -\frac{0{,}75}{x^2} + \frac{0{,}75}{x^2}\int_1^x (x-t)Z_3(t)dt;$$

$$Z_3(x) = \sqrt{x\left(\frac{3}{16x} + \frac{9}{16x^3}\right)};$$

$$Z_4(x) = -\frac{3(x-1)}{4x^2} + \frac{0{,}75}{x^2}\int_1^x (x-t)Z_4(t)dt;$$

$$Z_4(x) = \sqrt{x\left(\frac{3}{8x} - \frac{3}{8x^3}\right)}.$$

მაშასადამე, ამოხსნას ექნება:

$$Z''(x) = \sqrt{x}\left[\left(\frac{3}{16x} + \frac{9}{16x^3}\right)Z(1) + \left(\frac{3}{8x} + \frac{3}{8x^3}\right)Z'(1) + \left(\frac{3}{8x}\ln x + \frac{13}{16x} + \frac{3}{16x^3}\right)A - \right.$$

$$-\left(\frac{35x}{32}-\frac{3}{8x}\ln x-\frac{1}{x}-\frac{3}{32x^3}\right)P;\Bigg]$$

Z'(x) და $Z(x)$-თვის შესაბამისად გვექნება:

$$Z'(x)=\sqrt{x}\left[\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{8x^2}\right)Z(1)+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4x^2}\right)Z'(1)+\left(\frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{8}-\frac{1}{8x^2}\right)A-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{17x^2}{16}-\frac{3}{4}\ln x+\frac{1}{16x^2}-\frac{1}{2}\right)P\right];$$

$$Z(x)=\sqrt{x}\left[\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{4x}\right)Z(1)+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)Z'(1)+\left(\frac{x}{2}\ln x-\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}\right)A-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{x^3}{8}-\frac{x}{2}\ln x-\frac{1}{8x}\right)P\right].$$

შევადგინოთ მომენტების გამოსახულებები:

$$M_r=\frac{a^2\lambda}{2P}\frac{y}{\sqrt{xy}}\left[\frac{dZ}{dx}-\left(\frac{0,5-\nu}{x}+\frac{0,5}{y}\frac{dy}{dx}\right)Z\right],$$

$$M_\theta=\frac{a^2\lambda\nu}{2P}\frac{y}{\sqrt{xy}}\left[\frac{dZ}{dx}+\left(\frac{1/\nu-0,5}{x}-\frac{0,5}{y}\frac{dy}{dx}\right)Z\right],\quad 1/\nu\ -\ 0,5\ =\ 2,83333.$$

ვინაიდან ჩვენს შემთხვევაში $y=1$, ამიტომ გვექნება:

$$M_r=\frac{a^2\lambda}{2P}\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{dZ}{dx}-\frac{0,2}{x}Z\right],$$

$$M_\theta=\frac{a^2\lambda\nu}{2P}\frac{1}{\sqrt{x}}\left[\frac{dZ}{dx}-\frac{2,8333}{x}Z\right].$$

გაშლილი სახით მივიღებთ:

$$M_r=\left\{\left(\frac{1+\nu}{4}-\frac{3(1-\nu)}{4x^2}\right)Z(1)+\left(\frac{1+\nu}{2}+\frac{1-\nu}{2x^2}\right)Z'(1)+\left[\frac{1+\nu}{2}\ln x+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1-\nu}{4}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right]A-\left[\frac{3+\nu}{8}x^2-\frac{1+\nu}{2}\ln x+\frac{1-\nu}{8x^2}-\frac{1}{2}\right]P\right\}\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta=\left\{\left(\frac{1+\nu}{4}-\frac{3(1-\nu)}{4x^2}\right)Z(1)+\left(\frac{1+\nu}{2}+\frac{1-\nu}{2x^2}\right)Z'(1)+\left[\frac{1+\nu}{2}\ln x-\right.\right.$$

$$-\frac{1-\nu}{4}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\Bigg]A-\left[\frac{3\nu+1}{8}x^2-\frac{1+\nu}{2}\ln x-\frac{1-\nu}{8x^2}-\frac{\nu}{2}\right]P\Bigg\}\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$W=-a\left\{\left(\frac{x^2}{8}-\frac{3}{4x^2}\right)Z(1)+\left(\frac{x^2}{4}+\frac{1}{2x^2}\right)Z'(1)+\left[\frac{x^2}{4}(\ln x-1)-\frac{1}{4x^2}\right]A-\right.$$

$$\left.-\left[\frac{x^4}{32}-\frac{x^2}{8}(2\ln x-1)+\frac{1}{8x^2}\right]P\right\}+C,$$

$$\varphi(x)=\left(\frac{x}{4}+\frac{3}{4x}\right)Z(1)+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)Z'(1)+\left(\frac{x}{2}\ln x-\frac{x}{4}+\frac{1}{4x}\right)A-$$

$$-\left(\frac{x^3}{8}-\frac{x}{2}\ln x-\frac{1}{8x}\right)P,$$

$$Q_r=\frac{1}{x}Q_a+\frac{a\lambda}{2}\frac{x^2-1}{x}=-\frac{1}{x}\frac{a\lambda}{2P}A+\frac{x^2-1}{x}\frac{a\lambda}{2},$$

$$M_\theta(1{,}0)=[0{,}850Z(1)+0{,}300Z'(1)-0{,}135P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta(1{,}5)=[0{,}558Z(1)+0{,}495Z'(1)+0{,}166A-0{,}217P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta(2{,}0)=[0{,}456Z(1)+0{,}563Z'(1)+0{,}319A-0{,}537P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta(2{,}5)=[0{,}409Z(1)+0{,}594Z'(1)+0{,}449A-0{,}859P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta(3{,}0)=[0{,}383Z(1)+0{,}611Z'(1)+0{,}558A-1{,}399P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta(3{,}5)=[0{,}368Z(1)+0{,}621Z'(1)+0{,}653A-2{,}073P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta(4{,}0)=[0{,}357Z(1)+0{,}628Z'(1)+0{,}737A-2{,}878P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta(4{,}5)=[0{,}351Z(1)+0{,}633Z'(1)+0{,}811A-3{,}812P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_\theta(5{,}0)=[0{,}346Z(1)+0{,}636Z'(1)+0{,}878A-4{,}873P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(1{,}0)=[-0{,}200Z(1)+Z'(1)]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(1{,}5) = [0{,}092Z(1) + 0{,}805Z'(1) + 0{,}360A - 0{,}204P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(2{,}0) = [0{,}194Z(1) + 0{,}737Z'(1) + 0{,}581A - 0{,}722P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(2{,}5) = [0{,}241Z(1) + 0{,}706Z'(1) + 0{,}743A - 1{,}496P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(3{,}0) = [0{,}272Z(1) + 0{,}689Z'(1) + 0{,}870A - 2{,}506P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(3{,}5) = [0{,}282Z(1) + 0{,}679Z'(1) + 0{,}975A - 3{,}746P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(4{,}0) = [0{,}293Z(1) + 0{,}672Z'(1) + 1{,}065A - 5{,}204P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(4{,}5) = [0{,}299Z(1) + 0{,}667Z'(1) + 1{,}145A - 6{,}879P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

$$M_r(5{,}0) = [0{,}304Z(1) + 0{,}664Z'(1) + 1{,}214A - 8{,}769P]\frac{a^2\lambda}{2P},$$

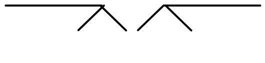
$$W(1{,}0) = 6{,}25Z(1) - 7{,}5Z'(1) + 5A + 2{,}8125P + C,$$

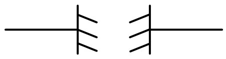
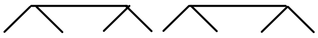
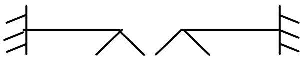
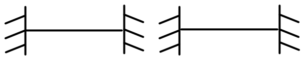
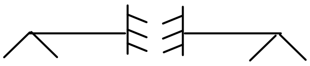
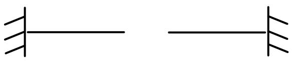
$$W(5{,}0) = -30{,}95Z(1) - 62{,}3Z'(1) - 37{,}9875A + 49{,}7563P + C,$$

$$\varphi(1{,}0) = Z(1),$$

$$\varphi(5{,}0) = 1{,}4Z(1) + 2{,}4Z'(1) + 2{,}8253A - 11{,}5765\boldsymbol{P},$$

$$Q_r(1{,}0) = -\frac{a\lambda}{2P}A, \quad Q_r(5{,}0) = \lambda\left(24 - \frac{A}{P}\right).$$

ჩამაგრების სახე	პირობა შიგა კონტურზე	პირობა შიგა კონტურზე	პარამეტრების მნიშვნელობები
	$W=0$ $M_r=0$	$Q_r=0$ $M_r=0$	C = -94,0175P Z(1) = 46,6277P Z'(1) = -9,3255P A = 24P

	W=0 φ=0	Q_r=0 M_r=0	C = -353,514P Z'(1) = -30,762P
	W=0 M_r=0	W=0 M_r=0	Z(1) = 8,0618P A = 10,1239P Z'(1) = -1,6124P
	W=0 M_r=0	W=0 φ=0	Z'(1) = -2,1038P Z(1) = -7,0192P A = 8,9557P
	W=0 φ=0	W=0 φ=0	Z(1) = 0 Z'(1) = -7,0812P A = 10,1196P
	W=0 φ=0	W=0 M_r=0	Z(1)=0 Z'(1)= -8,4231P A =11,8303P
	Q_r=0 M_r=0	W=0 M_r=0	Z(1)=20,0755P Z'(1)=4,0151P A=0
	Q_r=0 M_r=0	W=0 φ=0	Z(1)=6,1577P Z'(1)=1,2315P A=0

x	$M_r/\frac{a^2\lambda}{4}$	$M_\theta/\frac{a^2\lambda}{4}$	$\left(M_r/\frac{a^2\lambda}{4}\right)^2$	$-(M_rM_\theta)1/\frac{a^4\lambda^2}{4}$	$(M_\theta/a^2\lambda)^2$	$\left(\frac{\sigma_s a^2h^2\lambda}{24}\right)^2$	σ_2 ვ∂/∂∂^{2}	N/ 10^{17}
1,0	0	-21,283	0	0	$(21,283)^2$	$(21,283)^2$	42,566	
1,5	-1,680	-13,433	2,822	-22,567	180,445	160,700	25,354	
2,0	-1,348	-9,696	1,817	-13,070	94,012	82,759	18,197	678
2,5	-0,742	-7,346	0,551	-5,451	53,964	49,064	14,008	204
3,0	-0,367	-5,781	0,135	-2,122	33,420	31,433	11,214	80
3,5	-0,123	-4,675	0,015	-0,575	21,856	21,296	9,270	62
4,0	-0,097	-3,846	0,009	-0,373	14,792	14,428	7,596	48
4,5	-0,036	-3,308	0,001	-0,119	10,943	10,825	6,850	35
5,0	0	-2,932	0	0	$(2,932)^2$	$(2,932)^2$	5,864	16

x	$M_r/a^2\lambda$	$M_\theta/a^2\lambda$	$(M_r/a^2\lambda)^2$	$-(M_r,M_\theta)1/a^4\lambda^2$	$(M_\theta/a^2\lambda)^2$	$\left(\frac{\sigma_s a^2 h^2 \lambda}{24}\right)$	σ_2 კმ/მმ²	N/ 10^{17}
1,0	0	9,066	0	0	$(9{,}066)^2$	$(9{,}066)^2$	18,132	678
1,5	2,437	6,486	5,939	-15,806	42,068	32,201	11,350	81
2,0	3,066	5,438	9,400	-16,673	29,572	22,299	9,444	64
2,5	3,088	4,868	9,536	-15,032	23,697	18,201	8,532	46
3,0	2,860	4,371	8,179	-12,501	19,106	14, 784	7,690	44
3,5	2,320	3,904	5,382	-9,057	15,241	11,566	6,802	38
4,0	1,688	3,405	2,489	-5,748	11,594	8,695	5,898	18
4,5	0,901	2,887	0,812	-2,601	8,335	6,546	5,118	4
5,0	0	2,313	0	0	$(2{,}313)^2$	$(2{,}313)^2$	4,626	0

შევადგინოთ დენადობის გამოსახულება:

$$M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2 = \left(\frac{\sigma_s h^2}{6}\right)^2, \quad \left(\frac{\sigma_s a^2 h^2 \lambda}{6}\right) \text{კმ/სმ}^2 = \frac{\sigma_s h^2 \lambda}{6} \text{ კმ/სმ}^2$$

ვიგულისხმოთ, რომ $\frac{h^2\lambda}{12}=1.$

დავუშვათ, რომ იუნგის მოდული დასხივების შედეგად იცვლება დაახლოებით 10%-ით, ე.ი. ადგილი აქვს ტოლობას: $E_N = 1{,}1E$, რაც იგივეა: $e^{\alpha N} = 1{,}1$.

შევარჩიოთ α დასხივება მაქსიმალური დოზის მიხედვით:

$$\alpha N = \ln 1{,}1, \ \alpha = \frac{\ln 1{,}1}{N} = \frac{0{,}0956}{0{,}678 \cdot 10^{20}} = 0{,}14 \cdot 10^{-20}.$$

შევადგინოთ $F_1(x)$, $F_2(x)$ და $F_3(x)$ კოეფიციენტების მნიშვნელობათა გამოთვლები. ამ მიზნით წარმოვადგინოთ N, როგორც x-ის ფუნქცია შემდეგი სახით:

$$N=K_0+K_1x+K_2x^2+K_3x^3+K_4x^4,$$

სადაც, K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 განისაზღვრება შემდეგი პირობებიდან:

როცა $x = 1$, მაშინ $N = 678 \cdot 10^{17}$;

$x = 2$, მაშინ $N = 64 \cdot 10^{17}$;

$x = 3$, მაშინ $N = 44 \cdot 10^{17}$;

$x = 4$, მაშინ $N = 18 \cdot 10^{17}$;

$x = 5$, მაშინ $N = 0$.

$$\begin{cases} K_0 + K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 678 \cdot 10^{17} \\ K_0 + 2K_1 + 4K_2 + 8K_3 + 16K_4 = 64 \cdot 10^{17} \\ K_0 + 3K_1 + 9K_2 + 27K_3 + 81K_4 = 44 \cdot 10^{17} \\ K_0 + 4K_1 + 16K_2 + 64K_3 + 256K_4 = 18 \cdot 10^{17} \\ K_0 + 5K_1 + 25K_2 + 125K_3 + 625K_4 = 0. \end{cases}$$

ამოხსნის შედეგად მივიღებთ შემდეგ მნიშვნელობებს:

$K_0=3{,}100010\cdot10^{20}$, $K_1=-3{,}88434\cdot10^{20}$, $K_2=1{,}79251\cdot10^{20}$, $K_3=-0{,}35585\cdot10^{20}$, $K_4=0{,}02558\cdot10^{20}$.

$N/10^{20}=(3{,}10010-3{,}88434\cdot x+1{,}79251\cdot x^2-0{,}35585\cdot x^3+0{,}02558\cdot x^4)$,

$N=(3{,}10010-3{,}88434\cdot x+1{,}79251\cdot x^2-0{,}35585\cdot x^3+0{,}02558\cdot x^4)\cdot10^{20}$,

$\frac{dN}{dx}=(-3{,}88434+3{,}58502\cdot x-1{,}06755\cdot x^2+0{,}10232\cdot x^3+0{,}02558\cdot x^4)\cdot10^{20}$,

$\frac{d^2N}{dx^2}=(3{,}58502-2{,}13510\cdot x+0{,}30696\cdot x^2)\cdot10^{20}$.

x	N	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7
1,0	678	-597						
1,5	81	-17	580	-581				
2,0	64	-18	-1	17	598	-635		
2,5	46	-2	16	-20	-37	-47	588	
3,0	44	-6	-4	-10	10	20	67	-521
3,5	38	-20	-14	20	30	-46	-66	-133
4,0	18	-14	6	4	-16			
4,5	4	-4	10					
5,0	0							

$$y'_0 = \frac{1}{h}\left[\Delta_0 - \frac{1}{2}\Delta_0^2 + \frac{1}{3}\Delta_0^3 - \frac{1}{4}\Delta_0^4 + \frac{1}{5}\Delta_0^5 - \frac{1}{6}\Delta_0^6 + \dots\right],$$

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}\left[\Delta_0^2 - \Delta_0^3 + \frac{11}{12}\Delta_0^4 - \frac{5}{6}\Delta_0^5 + \frac{137}{180\Delta_0^6} - \dots\right].$$

შევადგინოთ $F_1(x)$, $F_2(x)$ და $F_3(x)$ ფუნქციების მნიშვნელობათა ცხრილი დანაყოფის თითოეული წერტილისათვის:

$$F_1(x) = \frac{0{,}75}{x^2} + \frac{0{,}2}{x}\left(\alpha\frac{dN}{dx}\right) + 0{,}25\left(\alpha\frac{dN}{dx}\right)^2 + 0{,}25\left(\alpha\frac{d^2N}{dx^2}\right),$$

$$F_2(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\alpha}{2}N},\ F_3(x)=-\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{\alpha}{2}N}.$$

x	$1-x^2$	$1-x^3$	$1-x^4$	$1-x^5$
0	1	1	1	1
0,2	0,96	0,992	0,9984	0,99968
0,4	0,84	0,936	0,9744	0,98976
0,6	0,64	0,784	0,8704	0,92224
0,8	0,36	0,488	0,5904	0,67232
1,0	0	0	0	0

x	$1{,}9x^2$	$2{,}2a_1x^3$	$2{,}5a_2x^4$	$2{,}8a_3x^5$
0	0	0	0	0
0,2	0,076	0,0176	0,00400	0,00090
0,4	0,304	0,1408	0,06400	0,02867
0,6	0,684	0,4752	0,32400	0,21773
0,8	1,216	1,1264	1,02400	0,9175
1,0	1,9	$2{,}2a_1$	$2{,}5a_2$	$2{,}8a_3$
	3,3	$4{,}3a_1$	$5{,}3a_2$	$6{,}3a_3$

x	x^2	x^3	x^4	x^5
0	0,00	0	0	0
0,2	0,04	0,008	0,0016	0,00032
0,4	0,16	0,064	0,0256	0,01024
0,6	0,36	0,216	0,1296	0,07776
0,8	0,64	0,512	0,4096	0,32768
1	1	1	1	1

$$M_r=\frac{2H^2Eh_0}{(1-\nu^2)b}\left[-\frac{Px^2}{8}(3+\nu)-\frac{C_1}{2}(1+\nu)+\frac{C_2}{x^2}(1-\nu)\right],$$

$$M_\theta=\frac{2H^2Eh_0}{(1-\nu^2)b}\left[-\frac{Px^2}{8}(3\nu+1)-\frac{C_1}{2}(1+\nu)-\frac{C_2}{x^2}(1-\nu)\right],$$

ν = 0,3, C_1 = -0,79327P, C_2 = -0,14732P,

$$M_r = \frac{2{,}19780 H^2 E h_o P}{b}\left[-0{,}41250x^2 + 0{,}51563 - \frac{0{,}10312}{x^2}\right],$$

$$M_\theta = \frac{2{,}19780 H^2 E h_o P}{b}\left[-0{,}23750x^2 + 0{,}51563 - \frac{0{,}10312}{x^2}\right].$$

x	x^2	$1/x^2$	$0{,}41250x^2$	$0{,}23750x^2$	$0{,}10312/x^2$	M_r/K	M_θ/K
0,5	0,25	4,0	0,10312	0,05937	0,41248	0	0,86874
0,6	0,36	2,77778	0,14850	0,08550	0,28644	0,08069	0,71657
0,7	0,49	2,04082	0,20212	0,11637	0,21045	0,10306	0,60971
0,8	0,64	1,56250	0,26400	0,15200	0,16112	0,10051	0,52475
0,9	0,81	1,23457	0,33412	0,19237	0,12731	0,05420	0,45057
1,0	1,0	1,0	0,41250	0,23700	0,10312	0	0,38175

$$(3{,}3+4{,}3a_1+5{,}3a_2+6{,}3a_3)\frac{a^2\lambda}{2P} = \frac{\sigma_s h^2}{6},$$

$$(1{,}4+2{,}1a_1+2{,}8a_2+3{,}5a_3)\ \frac{a^2\lambda}{2P} = \frac{\sigma_s h^2}{6},$$

$$1{,}9+2{,}2a_1+2{,}5a_2+2{,}8a_3=0,\ 2\mathrm{P}=\frac{12(1-\nu^2)a^3\lambda}{Eh^3},$$

$$\sigma_r = \frac{6M}{h^2},\ \frac{a^2\lambda}{\frac{12(1-\nu^2)a^3\lambda}{Eh^3}} = \frac{\sigma_s h^2}{6},\ \frac{Eh}{12(1-\nu^2)a} = \sigma_s,$$

$$(3{,}3+4{,}3a_1+5{,}3a_2+6{,}3a_3)a_2\lambda=\frac{\sigma_s h^2}{3},$$

$$(9{,}9+12{,}9a_1+15{,}9a_2+18{,}9a_3)\frac{a_2}{h^2}\lambda = \sigma_s,$$

$$(4{,}2+6{,}3\mathrm{a}_1+8{,}4\mathrm{a}_2+10{,}5\mathrm{a}_3)\ \frac{\mathrm{a}_2}{\mathrm{h}^2}\lambda = \sigma_\mathrm{s},$$

$$\begin{cases}12{,}9a_1 + 15{,}9a_2 = a - 9{,}9\\ 6{,}3a_1 + 8{,}4a_2 = a - 4{,}2\end{cases}\quad \begin{cases}a_1 + 1{,}232a_2 = 0{,}077a - 0{,}767\\ a_1 + 1{,}333a_2 = 0{,}159a - 0{,}667\end{cases},$$

$$0{,}1a_2=0{,}082a+0{,}1,$$

$$a_1=-0{,}93a-2,\ a_2=0{,}82a+1.$$

$$y=8-65{,}9x+87{,}4x^2,$$

$$y=8-66x+87x^2.$$

$$a^4(1+\nu)^2-a^2r^2(2-2\nu-4\nu^2)+r^4(9+7\nu^2-4\nu)=\left(\frac{32\sqrt{3}\sigma_s}{qh^2}\right)^2,$$

მაშინ:

$$a^4(1+\nu)=\frac{32\sqrt{3}\sigma_s}{qh^2}, \quad \sigma_s=\frac{a^2(1+\nu)qh^2}{32\sqrt{3}}.$$

$$r=a$$

$$a^4(1+2\nu+\nu^2-2+2\nu+4\nu^2+9+7\nu^2-4\nu)=\left(\frac{32\sqrt{3}\sigma_s}{qh^2}\right)^2,$$

$$a^4(8+12\nu^2)=\frac{32\sqrt{3}\sigma_s}{qh^2},$$

$$2a^2\sqrt{2+3\nu^2}\,\frac{32\sqrt{3}\sigma_s}{qh^2}, \quad \sigma_s=\frac{a^2qh^2}{32\sqrt{3}}2\sqrt{2+3\nu^2}.$$

როცა $r = 1/2a$

$$a^4\left(1+2\nu+\nu^2-0{,}5+0{,}5\nu+\nu^2+\frac{9}{16}+\frac{7}{16}\nu^2-\frac{1}{4}\nu\right)=\left(\frac{32\sqrt{3}\sigma_s}{qh^2}\right)^2,$$

$$x^2\varphi''(x)+x\varphi'(x)-\varphi(x)=(x^3+a_1x^4+a_2x^5+a_3x^6)P,$$

$$\varphi(x)=C_1x+\frac{3}{8}x^2+\frac{a_1}{15}x^4+\frac{a_2}{24}x^5+\frac{a_3}{35}x^6,$$

$$\varphi'(x)=C_1+\frac{3}{8}x^2+\frac{4a_1}{15}x^3+\frac{5a_2}{24}x^4+\frac{6a_3}{35}x^5,$$

$$M_r=\frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\nu}{x}\varphi\right]=\frac{a^2\lambda}{2P}\left[\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\nu}{x}\varphi\right],$$

$$M_r=\frac{a^2\lambda}{2P}\left[(1+\nu)C_1+\frac{1}{8}(3+\nu)x^2+\frac{a_1}{15}(4+\nu)x^3+\frac{a_2}{24}(5+\nu)x^4+\frac{a_3}{35}(6+\nu)x^5\right],$$

$$M_\theta=\frac{a^2\lambda}{2P}\left[(1+\nu)C_1+\frac{1}{8}(3\nu+1)x^2+\frac{a_1}{15}(4\nu+1)x^3+\frac{a_2}{24}(5\nu+1)x^4+\frac{a_3}{35}(6\nu+1)x^5\right].$$

3. დასკვნები:

დისერტაციაში ჩატარებული ძირითადი კვლევები და შედეგები მოკლედ შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად:

- ბირთვული რეაქტორების კონსტრუქციაში გამოყენებული ნეიტრონებით დასხივებული წრიული ფორმის ფირფიტების მექანიკური მახასიათებლების განსაზღვრა.
- მრავალსიჩქარიანი გადატანის წრფივი თეორიის ზოგიერთი განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსენთა ანალიზური სახე.
- წარმოდგენილი მეთოდის გამოყენებით განხილული განტოლებებისათვის გრინის ფუნქციის აგება, როგორც უსასრულო, აგრეთვე ნახევრად უსასრულო გარემოსა და პროფილირებული ნამზადებისათვის.
- ზოგიერთი განტოლებებისათვის დასმული ალბედოსა და მილნის ამოცანების ამოხსნა ანალიზური სახით.
- გადატანის ზოგიერთი არასტაციონარული ამოცანების ამოხსნა.

სამეცნიერო შრომები:

1. Булия Н.Г., Бибилури М. Интерпретация Пластических Деформаций. Тезисы дакладов юбилейной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава посвященной 80-летию ГТУ. Тбилиси 2002 г. Ст. 16;
2. Булия Н.Г., Бибилури М. Некоторые Плоские задачи Вязкоупругости. Тезисы дакладов юбилейной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава посвященной 80-летию ГТУ. Тбилиси, 2002. ст. 17.
3. Булия Н.Г., Бибилури М. Пластический Анализ слоистых конструкцийю. Тезисы дакладов юбилейной научно-технической конференции профессорско-преподавательского состава посвященной 80-летию ГТУ. Тбилиси, 2002. ст. 17.
4. ბიბილური მ. „გეგმაში მართკუთხა ფორმის წრიული და ელიფსური ხვრეტებიანი ორმაგი სიმრუდის მქონე დამრეცი გარსის დინამიკური მდგრადობა“. სტუ-ს გამომც. „შრომები“, თბილისი, 2005. №3, 457. გვ. 49-51.
5. მაჩაიძე ე., გოგსაძე ლ. ბიბილური მ. „წყვეტილი დატვირთვების მოქმედება ფირფიტებზე და გარსებზე“. სტუ-ს გამომც. „მშენებლობა და 21-ე საუკუნე“. თბილისი 2005. გვ. 57-58;
6. Бибилури М. «Расчет пологой оболочки двоякой кривизны с отверстиями». Международный журнал «Проблемы механики». №3 (20), 2005, Тбилиси, ст. 94-102.
7. Бибилури М. Гоголадзе Р.В., Барбакадзе С.Ш., Гоголадзе Л.П. Принцип определения контактной линии сопряженных поверхностей пространственной передачи зубчатых зацеплений. Международный журнал «Проблемы механики». №4 (21), 2005, Тбилиси, ст. 45-48.
8. გოგალაძე რ., ბიბილური მ. კიდეების გასწვრივ განაწილებული მომენტებით დატვირთული კონცერზე თავისუფლად დამრეცი ცილინდრული გარსის გაანგარიშება. მეცნიერება და ტექნოლოგიები, თბილისი, 2006. N1 (3), გვ. 74-77.
9. Бибилури М. Колебание пологой оболочки двоякой кривизны. „ინტელექტი“ 1. (24). თბილისი, 2006. გვ. 37-40.
10. Бибилури М. Свободнооперетная по контуру пологая оболочка двоякой кривизны под действием радиальных нагрузок. GEN №16 2006, pp. 73-77.
11. ბიბილური მ. გეგმაში მართკუთხედის ფორმის ორმაგი სიმრუდის დამრეცი გარსის გაანგარიშება ი. ღუდუშაურის მეთოდით. ჟურ: მშენებლობა-1, 2006. გვ.73-77.

12. Чачхиани З.Б., Бибилури М. Расчет металлических конструкции на прочность применением радиоактивного облучения. Проблемы металлургии, сварки и материаловедения. №3 (13)6 сентябрь, 2006, ст. 15-18.
13. ბიბილური მ. მასალათა ფიზიკურ-მექანიკური თვისებების გამოყენება ნაკეთობათა საიმედოობის უზრუნველყოფის მიზნით. სამეცნიერო-ტექნიკური ჟურნალი „ენერგია"№2 (46). თბილისი, 2008, გვ. 136-138.
14. ბიბილური მ. დასხივების შედეგად ნიკელისა და მისიშენადნობების მექანიკური და ფიზიკური თვისებების ცვლილება. პერიოდული სამეცნიერო ჟურნალი „ინტელექტი" №2 (31). თბილისი 2008. გვ. 41-42.
15. ბიბილური მ. ხსნარები. საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ჟურნალ „მოამბის"დამატება შრომები - №2(17), თბილისი, 2010. გვ. 175-178.
16. ბიბილური მ., მამისაშვილი ნ., დარჩიაშვილი ლ., ჩაჩხიანი ზ., ჩაგელიშვილი ლ., დეფორმირებულ uFe2 ნაერთის არათხევადი თვისებები. სტუ შრომები. მართვის ავტომატიზირებული სისტემები. შრომები №2(9), თბილისი, 2010. გვ. 141-144.
17. Бибилури М., Кварацхелия А., Сопромадзе З., Мачаидзе М. Иследвание собственных нели неиных калебаий опертой по контуру многослойной пластины. სამეცნიერო ტექნიკური ჟურნალი „მშენებლობა". შრომების კრებული N2 (17), თბილისი, 2010. გვ. 230-232.
18. Iavich M., Bibiluri M. Preparation and implementation of computer classes for preliminary school. Azerbaycan dovlet pedaqoji universiteti Tehsilde Ikt Elmi-metodik Jurnal N3 Baki-2011, Pg. 68-72.
19. ბიბილური მ., დარჩიაშვილი ლ. თერმოელექტური მოვლენები. სტუ, განათლება N1 (4) თბილისი, 2012, გვ. 237-240.
20. ბიბილური მ. კონტაქტური მოვლენები. სტუ, განათლება, თბილისი 2012, გვ. 261-266.
21. ჩუბინიძე გ., ყურაშვილი ი., ჩაჩხიანი ზ., ბიბილური მ. ბორით ლეგირებისა და თერმული დამუშავების გავლენა მონოკრისტალური გერმანიუმის ფიზიკურ-მექანიკურ თვისებებზე. სტუ, განათლება N2(5), თბილისი 2012, გვ.293-297.
22. ჩაჩხიანი ზ., ბიბილური მ., დარჩიაშვილი ლ. კრისტალის ენერგიის რხევითი მდგენელი. სტუ, შრომები №1(14) თბილისი 2013. გვ.253-256.
23. ბიბილური მ., ბოჭორიშვილი მ., მამისაიშვილი ნ. „ენტროპიის ზრდის პრინციპი". სტუ, შრომები N 2 (18). თბილისი 2014, გვ. 131-137.
24. გულუა დ., შულაია დ., ბიბილური მ. გამოსხივების გადატანის თეორიიდან წარმოქმნილი ერთი სინგულარული განტოლების შესახებ.

საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ჟურნალი „მოამბე“ ტ. 9 #1 თბილისი 2015. გვ. 24-30.
25. Bibiluri M., Gulua D., Shulaia D. About asymptotical behavior of the neutrons phase density in the case of isotropic point source. The State University of I.Vekua Applied Mathematics edition. (Appl. Math. Inform. March), printed.
26. Bibiluri M. The boundary value problem posed in an infinite domain for one equation of transfer theory The State University of I.Vekua Applied Mathematics edition. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua of Applied Mathematics, printed.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. Case K.M. Elementary solutions of the transport equations. Ann. Phys. 9, 1960,1;
2. Mika J. Nucl. Sci. Eng 11, 1961, p.415;
3. Bednarz R. Mika J. J. Math. Phys. 4,1963, p.1285;
4. Ferziger J. Leonard A. Ann. Phys. 22, 1963, p.192;
5. Tomejiro Yamagishi J. Nuclear Sc. And Tech. 8[3] pp.153-161;
6. Bal G. And Madai Y. Mathematical Modelimg and Numerical Analisis, v.36, N1 2002, pp.69-86;
7. Ganapol B. Transport Theory and Statistical Phydics 21(1&2), 1992, pp.1-37;
8. Osterbrock D. Astrophys J.135, 195, 162;
9. Tidzizi M. Journal of Statistical Physics v. 104, N 112, 2001, pp.291-325;
10. Smith M. Proc. Cambridge Phil. Soc. 60, 105, 1964;
11. Hopf E. Cambrege Univ. Press., Cambrege, 1934;
12. Capriotti E. Astrophys. J. 142, 1101, 1965;
13. Thomas R. Univ. Of Colorado Press. Boulder, Colorado, 1965;
14. Hummer D. J. Quantit. Spectrosc. Am\nd Radiat. Transfer 3, 101. 1963;
15. Antosik P. Mikusinski J., Sikorski R., Theory of Distributions Amsterdam 1973;
16. Cercignani C. Theory and Application of the Boltzmann Equation, Scottish Academic Press, Edinburgh and London, 1975;
17. Van Kampen N.G. On the theory of stationary waves in plasmas. Physica, 21; 1955, pp. 949-963;
18. Case K.M. Elementary solutions of the transport equation and their applications. Annals of Physics vol. 9, 1960, pp.1-23;
19. Case, K.M., Zweifel, P.F. Linear Transport Equations. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company. 1967;
20. Larsen E.W. and Habetler G.J. A Functional-Analytic Derivation of Case's Full and Half-range Formulas. Communication on Pure and Applied Mathematics vol. 26, 1973, pp.525-537;
21. Klinc T. On Completeness of Eigenfunctions of the One-Speed Transport Equation. Communication in Mathematical. Physics 41, 1975, pp. 273 -279;
22. Hangelbroek R. Linear Analysis and Solution of Neutron Transport Problems Transport Theory and Statistical Physics v.5 N1,1976, pp.1-85;
23. Kanal M. and Davies J. A spectral representation of the linear transport problem. Transport Theory and Statistical Physics, vol. 10, 1-2, 1981, pp.29-74;
24. Ellision J.A., Sobol A.V. and Vogt M. A new model for the collective beam-beam interaction. New J. Phys. 9, 2007, p.32 doi:10.1088/1367-2630/9/2/032 PII:S1367-2630(07)27777-8.
25. Pettersson R. On Solutions to the linear Boltzmann Equation for Granular Gases. Transport Theory and Statistical Physics, vol. 33, 5-7, 2004, pp.527-543.
26. Latyshev A.V., Moiseev A.V. The boundary-value problems for the equations of radiation transfer of polarized light. Fundamentalnaia i prikladnaya matematika, vol.8 , no.1, 2002, pp.97-115.

27. Duderstadt J.J., Martin W.R. Transport Theory JohnWiley&Sons 1979;
28. Shulaia D.A. To Finding of the Elementary Solution of the Multivelocity Transport Theory. Bulletin of the Academy of Science of the Georgian SSR, 70, N3, 1973, pp.545-548. Communicated by Academician I.Vekua.
29. Shulaia D.A. The Elementary Solutions of Neutron Transport Equation. Bulletin of the Academy of Science of the Georgian SSR, 73, 1974, N3, 533-536. Communicated by Academician I.Vekua.
30. Shulaia, D.A. On the Algorithm of Finding Fundamental Solutions of Gamma-Ray Ttansport Equation Bulletin of the Academy of Science of the Georgian SSR, 74, N1, 1974, pp.17-20. Communicated by Academician I.Vekua.
31. Shulaia, D.A A Linear Equation of Light Scattering. Bulletin of the Academy of Science of the Georgian SSR, 108, N1, 29-32, 1982 Communicated by Academician A.Bicadze.
32. Shulaia, D.A. The General Representation Solutions of the Linear Boltzmann Equation. DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR 312, (3):604-606. 1990 Communicated by Academician A.N. Tichonov.
33. Shulaia D.A. and Tskadaia O.T. General representation solutions of equation of linear multigroup neutron transport theory, Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Reports, vol. 23, 37- 50, 1997, Tbilisi University, Press.
34. Shulaia, D.A. Inverse Problem of the Linear Multivelocity Transport Theory. DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR 270(1): 1983 pp.82-87, Communicated by Academician A.A. Samarskii.
35. Shulaia DA, Gugushvili EI. Inverse problem of spectral analysis of linear multigroup neutron transport theoty in plane geometry. TRANSPORT THEORY AND STATISTICAL PHYSICS 29 (6): 711-721 2000 ISI Web Of Science Times Cited: 2;
36. Shulaia D.A. Completeness Theorems in the Linear Multivelocity Transport Theory DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR 259 (2): 332-335 1981 Communicated by Academician A.A. Samarskii. ISI Web Of Science Times Cited: 2;
37. Shulaia, D.A. Linear Equation of the Multivelocity Transport Theory. Journal Vichislitelnoi Mathematiki i Matematicheskoi Physiki 23(5): 1983,125-11140;
38. Shulaia D.A.. On the Expansion of Solutions of Equations of the Linear Multivelocity Transport Theory by Eigenfunctions of the Characteristic Equation. DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR 310(4): 1990, pp.844-849, Communicated by Academician L.D. Faddeev.
39. Shulaia D.A. and Sharashidze N. A spectral representation of the linear transport problem. Transport Theory and Statistical Physics, vol. 33, 2, 2004, pp.183-202;
40. GERMOGENOVA TA, SHULAIA DA Characteristic Equation of Radiation Transfer Theory DOKLADY AKADEMII NAUK SSSR 231 (4): 1976, pp.841-844. Communicated by Academician A.N. Tichonov. ISI Web Of Science Times Cited: 3.
41. Shulaia D. On One Fredholm Integral Equation of Third Kind. Georgian Mathematical Journal. 4, No.5, 1997, 461-476. Times Cited:1;

42. Shulaia, D. Solution of a Linear Integral Equation of Third Kind. Georgian Mathematical Journal. 9, No.1, 2002, pp.179 -196. Times Cited:1;
43. Shulaia, D. Linear integral equations of the third kind arising from neutron transport theory. Mathematical Methods in the Applied Sciences (Article online in advance of print) Published Online: 26 Apr 2007 DOI: 10.1002 mma. 882 Full Text: PDF (Size: 187K);
44. Integral Equations, in Mathematical Eencyclopedia v.2 D-KOO, p.590, pub. "Sovetskaia Enciklopedia", 1974, (rus.).
45. Belleni-Morante A, Mugelli F. Identification of the boundary surface of an interstellar cloud from a measurement of the photon far-field MATHEMATICAL METHODS IN THE APPLIED SCIENCES 27 (6): 2004, pp.627-642 APR.
46. ROGOVTSOV NN, BOROVIK FN On the Solution in the Radiative Transfer Equation for an Infinite Homogeneous Plane-Medium DOKLADY AKADEMII NAUK BELARUSI 37 (6): 1993, pp. 39-44.
47. MARTYNENKO OG Heat and Mass Transfer Bibliography-Soviet Works INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER 21 1):1978
48. U. Fano, L. Spenser and M. Berger Penetretion and diffusion of X Rays Berlin. 1959.