საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

მალხაზ ბიბილური

სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა გამოყენება ნეიტრონული დასხივების თეორიიდან წარმოქმნილ ზოგიერთ მათემატიკურ ამოცანაში

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა „მათემატიკა“, შიფრი 0501

თბილისი

2015 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტში
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი

სამეცნიერო ხელმძღვანელები: პროფ. დ. შულაია
ასოც. პროფ. დ. გულუა

რეცენზენტები: პროფ. ჯ. როგავა
პროფ. თ. ჯანგველაძე

დაცვა შედგება ---------- წლის "------" ----------------, --------- საათზე
საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის
სხდომაზე, კორპუსი ----------------, აუდიტორია ------------
მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა - სტუ-ს ვებგვერდზე

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

თემის აქტუალობა:

ელემენტარულ ნაწილაკთა გამოსხივების გადატანის თეორია წარმოადგენს თანამედრივე მეცნიერების ერთ-ერთ ძირითად მიმართულებას, რომელიც სწრაფად ვითარდება მათემატიკისა და თეორიული ფიზიკის მიღწევების საფუძველზე და ღრმად აღწევს საბუნებისმეტყველო და ტექნიკური დარგების განსხვავებულ სფეროებში. ამ თეორიის ერთ-ერთ ძირითადი ამოცანაა კვლევა საკითხისა, რომელიც მდგომარეობს ნამზადთა საიმედობის გაზრდის მიზნით ნეიტრონული დასხივების გავლენა ლითონების ფიზიკო-მექანიკურ თვისებებზე. ამოცანები, რომელთანაც გვექნება საქმე, წარმოადგენს ორმხრივ ხასიათის დამახასიათებელ ნიშანს გამოსხივებასა და ნივთიერების ურთიერთქმედებას შორის. ერთის მხრივ, გამოსხივების ველი განისაზღვრება ნივთიერების მდგომარეობით, მეორეს მხრივ, კი თვით ეს მდგომარეობა არსებითი ხასიათით დამოკიდებულია გამოსხივების ველისაგან. ლითონებში მიმდინარე პროცესები, რომლებიც შეიცავენ აღგზნებული დონის ატომებს, განისაზღვრებიან უმთავრესად რადიაქტიული პროცესებით, ე.ი. გამოსხივების ველით. მათი რაოდენობრიობის გათვლა, როცა თერმოდინამიკურ წონასწორობას არ აქვს ადგილი, წარმოადგენს იმ ამოცანას, რომლისაგან შედგება ნაშრომის ძირითადი შინაარსი.

დასმული ამოცანა ძალზე რთულია და თავიდავნე საჭირო ხდება დიდი შეზღუდვების შემოტანა გამოყენებითი ხასიათის შედეგების მისაღებად. თუმცა ამჟამად ეს ერთადერთი შესაძლო გზაა რომელიც უნდა იქნას გავლილი, რათა გამოკვლეულ იქნას ამოცანები ნაკლები შეზღუდვების მქონე პირობებში. მოვლენათა სფერო, რომელთანაც აქვთ საქმე თერმოდინამიკურ არაწონასწორულ მდგომარეობასთან, განსაკუთრებით ფართოა. ხშირად მკვლევარები, რომლებიც იკვლევენ განსხვავებული მასშტაბების მოვლენებს, ისეთებს, როგორიცაა ჩვეულებრივი ლუმინესცენტნული ნათურის ნათება, ნეიტრონული დასხივების გავლენა ლითონების ფიზიკომექანიკურ თვისებებზე და ა.შ. ხშირად დგებიან ერთი და იგივე პრობ-

ლემების წინაშე. მზისა და ვარსკლავების გარე ფენები, სადაც ხდება შთანთქმა და გამოსხივება, არ იმყოფებიან თერმოდინამიკურ წონასწორობაში. გამოსხივების და ნივთიერების ურთიერთქმედება კოსმოსური მასშტაბის გაზურ მასაში არაფრით განსხვავდება ანალოგიური პროცესებისაგან რომლებიც წარმოიშვებიან პლაზმაში ლაბორატორიული გაზური განმუხტვისას. ლითონთა რადიაქტიული დასხივების ამოცანების შესწავლის აქტუალობა განსხვავებული ბუნების მქონე ფიზიკურ სასტემებში რეალური გარემოს თავისებურობათა გათვალისწინებით განპირობებულია მთელი რიგი, როგორც სამეცნიერო-ტექნიკური, ასევე, უკანასკნელ პერიოდში სწრაფად განვითარებადი ტექნოლოგიური პროცესების მოთხოვნილებით. აღნიშნული თეორიის ეფექტურმა გამოყენებამ ტექნიკის მრავალ სფეროში, განსაკუთრებით ლითონთა საიმედობის გაზრდის ამოცანებში, ბუნებრივი და, არაბუნებრივი პროცესების ოპერატიულ პროგნიზირებაში მოითხოვა ამოცანების უფრო ღრმა შესწავლა და საფუძვლიანი ანალიზი.

სამუშაოს ძირითადი მიზანი:

მიზანი, ელემენტარულ ნაწილაკთა დიფუზიის აღმწერი ლ. ბოლცმანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი გადატანის ინტეგრო-დიფერეციალურ განტოლებებისათვის დასმული ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ანალიზური ხერხით წარმოდგენაა.

ამოცანები: წარმოდგენილი მეთოდის გამოყენებით განტოლების გრინის ფუნქციის აგება, როგორც უსასრულო ასევე ნახევრად უსასრულო გარემოსათვის, ძირითადი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნა. სახელდობრ, ალბედოსა და მილნის კლასიკური პრობლემების და ზოგიერთი არასტაციონალური ამოცანების ამოხსნა.

ნაშრომი თეორიული ხასიათის გამოკვლევაა. მიღებულ შედეგებს შეუძლიათ გარკვეული როლი შეასრულონ გადატანის მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლებისათვის დასმული ამოცანების გამოკვლევაში და მათი სტრუქტურული და თვისობრივი მახასიათებლების შესწავლაში.

აქედან გამომდინარე, სამეცნიერო ნაშრომთა დიდი რაოდენობა ეძღვნება აღნიშნული თეორიის ამოცანების კვლევას და მიღებული შედეგების პრაქტიკაში დანერგვას. ამ მიმართულებით კვლევის განსხვავებული მიდგომების სიმრავლის შესახებ მსჯელობა შეიძლება ს. ჩანდრასეკარის ვ. ამბარცუმიანის, ვ. სობოლევის, დ. ჰამერის ლ. სტერბოიკის, ი. კაპრიოტის, მ. ფრიდრიხის, ბ. განაპოლის, გ. ბალის და ი.მადაის, ოსტერბროკის, ტიდზიზის, ნ. მასლენნიკოვის რ. თომასის, ე. ჰოფის, ვ.ფოკის, მ. შმიტისა და სხვათა შრომების მიხედვით.

საყოველთაოდ ცნობილია, რომ ლითონებზე ნეიტრონული დასხივების პროცესების შესწავლა, როცა მათი ძირითადი მახასისთებლები ცვლადი სიდიდეებია, ერთ-ერთ რთულ და აქტუალურ პრობლემას წარმოადგენს. აღნიშნული მიმართულების განვითარება წარმოებს როგორც პროცესების შესწავლით ახალ კონკრეტულ გარემოებებში, ასევე მიღებული შედეგების განზოგადებაში. მიუხედავად იმისა, რომ ამ პროცესების შესწავლისადმი მიძღვნილია მრავალი ნაშრომი, გარემოს შთანთქმის როლის გათვალისწინება დღესაც ერთ-ერთ წინა პლანზე არის წამოწეული. სწორედ ასეთ შემთხვევასთან გვაქვს საქმე. ჩვენს ძირითად მიზანს წარმოადგენს ნეიტრონული დასხივების შედეგად ნამზადთა საიმედობის დადგენის ამოცანების კვლევა მათემატიკური მეთოდების გამოყენებით იმ შემთხვევაში, როცა გარემოს შთანთქმის როლი არსებითად არის გამოკვეთილი და მის საფუძველზე პრაქტიკული მნიშვნელობის მქონე საკითხების ანალიზი. ჩვენი მიზანია უსასრულო გარემოში ფიქსირებული წყაროს მიერ წარმოქმნილი ველის გამოკვლევა და ველის სპექტრალური მახასიათებლების მოძებნა და მათი ანალიზი. ნაშრომში გამოყენებულია განზოგადებულ ფუნქციათა, სინგულარულ-ინტეგრალური და ბოლცმანის მოდელურ განტოლებათა თეორიების მეთოდები.

ძირითადი შედეგები შეიძლება გამოყენებულ იქნას: ბუნებრივი მოვლენების დიაგნოსტიკისათვის, გარემოს შემთხვევითი, არაერთგვაროვნებით განპირობებული ხარვეზების ანალიზისა და მათი აღმოფხვრისათვის,

ლითონის სტატისტიკური მახასიათებლების განსაზღვრისათვის. გამოკვ-ლეულია უსასრულო გარემოში ლითონის დასხივების ამოცანა, რაც თავის მხრივ მნიშვნელოვნად გაამარტივებს რთული ეფექტების შესწავლას გარემოს საზღვრის მახლობლობაში. განხილულია ისეთი მეთოდი, რომელიც საშუალებას მოგვცემს გამოკვლეულ იქნეს მრავალჯერადი დასხივების ამოცანები, როგორც უსასრულო, ასევე ნახევრად უსასრულო გარემოს შემთხვევისათვის, როცა მათ შთანთქმის თვისება გააჩნიათ. ჩვენს შემთხვევაში ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ ერთგვაროვანი განტოლების საკუთრივი ფუნქციის წრფივი კომბინაციის სახით. ამასთან ეს საკუთრივი ფუნქციები წარმოადგენენ როგორც რეგულარულ უწყვეტ ფუნქციებს, ასევე, სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციებს განზოგადებულ ფუნქციათა კლასი-დან. ანალიზურად აგებულია სინგულარული საკუთრივი ფუნქციათა კლასი. გამოყენებულია შედეგი რეგულარულ და სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა კლასის სისრულის შესახებ როგორც სრული ინტერვალისათვის ასევე ნახევარი ინტერვალის შემთხვევისათვის. გადატანის განტოლებასთან ერთად განხილულია მისი შეუღლებული განტოლება, რომლისთვისაც აგებულია რეგულარულ და სინგულარულ საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა. ცნობილია რომ აგებული ძირითადი და შეუღლებული სისტემები წარმოადგენენ ბიორთოგონალურ სისტემებს, რაც ამარტივებს ამონახსნის განაშალის კოეფიციენტების პოვნას.

კარგად არის ცნობილი, რომ ძალზე ზოგადი მათემატიკური ფორმული-რება გადატანის თეორიის ამოცანებისა მოიცემა ბოლცმანის ლინეარიზებუ-ლი კინეტიკური განტოლების საშუალებით. კინეტიკური თეორიის განტო-ლებები წარმოადგენენ მათემატიკური ფიზიკის მრავალგანზომილებიან ინტეგრო-დიფერენციალურ განტოლებათა კლასს. თავისი სტრუქტურით ეს განტოლებები არსებითად განსხვავდებიან კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის განტოლებებისაგან და წარმოადგენენ გაცილებით რთულს მათთან შედარებით. ფუნქციონალური ანალიზის, განზოგადებულ ფუნქცი-ათა თეორიისა და სასაზღვრო ამოცანების განზოგადებულ ამოხსნათა

თეორიის განვითარებასთან ერთად, განვითარება ჰპოვა გადატანის თეორიის ამოცანების ამონახსნთა თვისებების მათემატიკურმა კვლევებმა. მიუხედავად ამისა კლასი ამოცანებისა, რომლებიც ამოხსნადია ჩაკეტილი ფორმით, არის ძალზე ვიწრო. სანამდვილეში ამონახსნების მიღება ჩაკეტილი ფორმით შესაძლებელია მხოლოდ ძალზე მარტივ სიტუაციებში.

ანალიზური სახით ამონახსნთა მიღება გადატანის თეორიის ზოგიერთი ამოცანისათვის სასარგებლოა შემდეგი მოსაზრებების გამო:

1. ზოგიერთ სპეციალურ სიტუაციებში მსგავსი ამოცანები შესაძლებელია იძლეოდნენ კარგ მიახლოვებას ფიზიკური რეალობისა.
2. მათი ამონახსნები თავისთავად წარმოადგენენ დამოუკიდებელ მათემატიკურ ინტერესს, რადგან ისინი იძლევიან წარმოდგენას გადატანის წრფივი თეორიის სასაზღვრო ამოცანათა ამონახსნთა სტრუქტურის შესახებ.
3. განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია ის რომ, სავარაუდოდ, ამოცანები, რომლებიც უშვებენ ასეთ ამოხსნებს, წარმოქმნიან სისტემას, რომლებზეც შესაძლებელია მიახლოებითი მეთოდების შემოწმება.

ნაშრომის შედეგები და მეცნიერული სიახლე:

ჩვენი სურვილია, წარმოვადგინოთ ელემენტარულ ნაწილაკთა დიფუზიის აღმწერი ლ. ბოლცმანის (L. Boltzmann) წრფივ ინტეგროდიფერენციალურ განტოლებებისათვის დასმული ზოგიერთი სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის მიღება. აღნიშნული ამოცანები ხშირად გვხვდება მათემატიკური ფიზიკის მრავალი მნიშვნელოვანი პრობლემის კვლევისას. სახელდობრ, ნეიტრონების გადატანის თეორიის ფუნდამენტურ პრობლემებში, პლაზმის სტაციონალური ტალღის თეორიაში, სტატისტიკურ მექანიკაში, ასევე გაზებში ელექტრული განმუხტვის შესწავლისას, ვარსკვლავთა ატმოსფეროს თერმოდინამიკაში და სხვ. ამ სისტემის კვლევის ჩვეულებრივი მეთოდები, ისეთები როგორიც ინტეგრალურ განტოლებებამდე დაყვანაა, მნიშვნელოვან სირთულეებთან არის დაკავშირებული გამარტი-

ვებულ შემთხვევბშიც კი. ხშირად ამონახსნები მიღებული ინტეგრალური განტოლებებიდან გამოისახებიან მრუდწირული ინტეგრალებით. ისინი რიცხვითი რეალიზაციისათვის გამოსადეგი ხდებიან მხოლოდ მრავალ-ჯერადი გარდაქმნების შედეგად. სასურველია, რომ გარდაქმნილი ფორმები მოიძებნოს უშუალოდ, პირდაპირი გზით. ზოგიერთი სპეციფიკური ამო-ცანის ზუსტი ამონახსნების მიღების მეთოდები ხშირად ერთმანეთისაგან რადიკალურად განსხვავებულია. მათ საერთო საფუძველი არ გააჩნიათ. განსაკუთრებით ეს ეხება იმ შემთხვევას, როცა ამონახსნის წარმოდგენა ხდება ცვლადთა განცალების შედეგად მიღებული განტოლების საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით. ამ შემთხვევაში ოპერირებენ განტოლებებით, რომლებიც მესამე გვარის ინტეგრალური განტოლებათა კლასს ეკუთვნის და მათი საკუთრივ ფუნქციათა სიმრავლე (კლასიკური აზრით) არაა სრული. ეს უკანასკნელი შენიშვნა ასევე ეხება აქ წარმოდგენილი მეთოდის არსს. ამ მიმართულებით პირველი ნაბიჯი იყო ვან კამპენის მიგნება ნაშრომში პლაზმის ოსცილაციის პრობლემებთან დაკავშირებით. ვან კამპენმის მიგნებაში მნიშვნელოვანია ორი მომენტი: პირველი – შვარცის აზრით განაწილების შემცველი საკუთრივი ამონახსენების შემოყვანა, მეორე – პლაზმის სპეციფიკური ამოცანისათვის ამ საკუთრივ განაწილებათა სისრულის დადგენა. შემდგომში, კეისმა იზოტროპულ გარემოში ერთ-სიჩქარიანი ნეიტრონების დიფუზიის განტოლებისათვის, განსაზღვრის მთელ არეში, ააგო ვან კამპენისეული ელემენტარულ ამონახსნთა სისტემა, სრული ჰელდერის სივრცისათვის. შეისწავლა ქვეარეებში ამონახსნთა ქვესიმრავლეების სისრულის და ორთოგონალობის თვისებანი. რის შედე-გად მან დააფუძნა ერთსიჩქარიანი გადატანის თეორიის მათემატიკური პრობლემების კვლევის ეფექტური მეთოდი. ეს მეთოდი ანალოგიურია კლასიკური ცვლადთა განცალების მეთოდისა, კერძო წარმოებულიან დიფე-რენციალურ განტოლებთა თეორიიდან. კეისის მეთოდის გამოყენებით მათემატიკური ფიზიკის მრავალი აქტუალური პრობლემა იქნა შესწავ-ლილი. მაგ.: ბგერის გავრცელების ამოცანა, პლაზმური ამოცანები, გაზში

ელექტრული განმუხტვა, ვარსკვლავურ ატმოსფეროებში გამოსხივების გადატანა და სხვ.

შემდგომში აღნიშნული მეთოდი თავის მხრივ კვლევის ობიექტიც გახდა. გარდა ამისა, ამ მეთოდის გამოყენებით მოხდა ასევე, ბაზისური განტოლების სპექტრალური რეფორმირება. სახელდობრ, მიღებულ იქნა ბაზისურის ექვივალენტური, სპექტრალური ინტეგრალის შემცველი განტოლება, რომლის დახმარებით ახალი ფორმულები და წარმოდგენები იქნა დადგენილი. უკანასკნელ პერიოდში კეისის მეთოდის დახმარებით მრავალსიჩქარიანი და მრავალჯგუფური თეორიების ზოგიერთი სპეციფიკური ამოცანებიც არის შესწავლილი.

შევნიშნავთ, რომ კეისის მეთოდი არსებითად ეფუძნება ე.წ. კოშის გულის მქონე სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიას, რომელიც ნ. მუსხელიშვილის, ი. ვეკუას, მათი მოწაფეების და მიმდევრების მიერაა დაფუძნებული. როგორც ცნობილია სქელ დამცავ ფენებში ნეიტრონების ან γ სხივების დიფუზიური პროცესები ექვემდებარებიან გადატანის წრფივ განტოლებას. წრფივობა გამომდინარეობს იმ გარემოებიდან რომ ხდება გამოსხივების ნაკადის და დამცავი მასალების ურთიერთქმედება, ამასთან გამოსხივების შედეგად ამ მასალების თვისებები არ განიცდიან რაიმე მნიშვნელოვან ცვლილებებს. მაგრამ ურთიერთქმედების ყოველი პროცესი ჩვეულებრივად დაკავშირებულია ნეიტრონის ან γ ქვანტის ენერგიის დაკარგვასთან. ეს „ენერგიის დეგრადაცია“ არსებითია გადატანის პროცესისათვის, რადგან ენერგიის დაკარგვის შესაძლებლობა გზის მცირე მონაკვეთზეც კი განმსაზღვრელ როლს თამაშობს სქელ ფენაში გამოსხივების გადატანისას. ამიტომ აქტუალურია გადატანის მრავალსიჩქარიანი ან მრავალჯგუფური თეორიების პრობლემების ზუსტი ანალიზური შესწავლა. ამასთან პირდაპირი რიცხვითი გათვლა რთულია და საგულდაგულო გამოკვლევის გარეშე შესაძლოა ძალზე არაზუსტი აღმოჩნდეს. გადატანის ერთსიჩქარიანი, მრავალსიჩქარიანი და მრავალჯგუფური თეორიების ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები გადაგვარების მქონე

განსხვავებული განზომილების განტოლებებია. ისინი კვლევისათვის განსხვავებული ობიექტებია. როგორც ერთსიჩქარიანი, ასევე მრავალსიჩქარიანი და მრავალჯგუფური თეორიის განტოლებებისათვის, განსაზღვრის მთელ არეში, გამოყენებულია ვან კამპენისეული ელემენტარული ამონახსენების სისტემების სისრულე ჰელდერის სივრცისათვის. მათი საშუალებით ამ განტოლებებისთვის შესაძლებელია ამოხსნილი იქნას სპექტრალური ანალიზის შებრუნებული ამოცანები. ასევე, გამოყენებულია ქვეარეებში მრავალსიჩქარიანი განტოლების ელემენტარულ ამონახსნთა ქვესიმრავლეების სისრულე, რის საფუძველზეც მოხდა კლასიკური ცვლადთა განცალების მეთოდის განზოგადება მრავალსიჩქარიანი განტოლებისათვის, მსგავსად კეისის მეთოდისა ერთსიჩქარიანი თეორიიდან. ასევე შესაძლებელია მრავალჯგუფური ბაზისური განტოლების სპექტრალური რეფორმირება. რაც ნიშნავს ბაზისურის ექვივალენტური, სპექტრალური ინტეგრალის შემცველი განტოლების მიღებას, რომლის დახმარებით საკუთრივი რიცხვებისთვის და საკუთრივი ფუნქციებისთვის დადგენილი იქნა ახალი ფორმულები და წარმოდგენები. ასევე, შესაძლებელია შესწავლილ იქნას გადატანის თეორიაში წარმოქმნილი მესამე გვარის ინტეგრალური განტოლებანი (რომლის კლასიკური აზრით ამოხსნის ზოგადი თეორია პრობლემად რჩება). ეს შედეგები ციტირებულია სამეცნიერო ნაშრომებში. საკვლევი პრობლემებია: მრავალსიჩქარიანი გადატანის წრფივი თეორიის განტოლებებისათვის ზოგიერთი სასზღვრო ამოცანების ამონახსნთა ანალიზური წარმოდგენა ცვლადთა განცალების მეთოდის გამოყენებით, რომელიც სიახლეს შესძენს ამ თეორიას.

ნაშრომის თეორიული და პრაქტიკული მნიშვნელობა:

ნაშრომში გამოყენებულია რეგულარული და სინგულარული საკუთრივი ფუნქციების საშუალებით გაშლის მეთოდი ნეიტრონების გამოსხივების გადატანის თეორიის ზოგიერთ ამოცანებში.

ნაშრომი თეორიული ხასიათის გამოკვლევაა. მიღებულ შედეგებს შეუძლიათ გარკვეული როლი შეასრულონ გადატანის მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლებისათვის დასმული ამოცანების გამოკვლევაში და მათი სტრუქტურული და თვისობრივი მახასიათებლების შესწავლაში.

ნაშრომის აპრობაცია:

- ნაშრომის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია თბილისის სახ. უნივერსიტეტის ი. ვეკუას სახ. გამოყენებით მათემატიკის სემინარის გაფართოებულ სხდომებზე; თბილისი, 2015წ.
- საქართველოს მეცნიერებათა ეროვნული აკადემია. ახალგაზრდა მეცნიერთა საერთაშორისო კონფერენცია. თბილისი, 2015წ.

ნაშრომის სტრუქტურა და მოცულობა:

დისერტაცია შედგება: რეზიუმე (ორ ენაზე), შინაარსი, შესავლი, ლიტერატურული მიმოხილვა, თავებისა და ქვეთავებისაგან, დასკვნისა და 48 დასახელების ლიტერატურისაგან. მოცულობა შეადგენს 109 გვერდს.

ნაშრომის ძირითადი შინაარსი:

დისერტაციის შესავალში დასაბუთებულ იქნა სადისერტაციო თემის აქტუალურობა და მისი პრაქტიკული მნიშვნელობა. მოყვანილ იქნა გამოსაკვლევი საკითხის მდგომარეობის მოკლე ანალიზი და გადასაჭრელი ამოცანების რეალიზაციის მეთოდები.

წინამდებარე ნაშრომში განიხილება გადატანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლებისათვის დასმული ამოცანები. სახელდობრ, განიხილება ის შემთხვევა, როცა გარემო უსასრულოა, განტოლების გული გადაგვარებულია და საკუთხო ცვლადის მიმართ იზოტროპულია

$$\mu\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \Psi(x, \mu, E)$$

$$= \frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} \alpha(E)\alpha(E')\Psi(x,\mu',E')d\mu' dE'$$
$$+f(x,\mu,E), \tag{1}$$
$$x \in (-\infty,+\infty), \quad \mu \in]-1,+1[, \quad E \in [E_0,E_1]$$

შემდეგი დამატებითი პირობებით

$i_1)$

$$\Psi^+(x_0,\mu,E) - \Psi^-(x_0,\mu,E) = \psi(\mu,E) \tag{2}$$
$$x_0 \in (-\infty,+\infty) \quad \mu \in]-1,+1[, \quad E \in [E_0,E_1]$$

$i_2)$

$$\lim_{x\to\infty} \Psi(x,\mu,E) = 0 \tag{3}$$
$$x \in (-\infty,+\infty), \quad \mu \in]-1,+1[, \quad E \in [E_0,E_1]$$

სადაც, $\alpha(E)$ არის უწყვეტი ფუნქცია. (27) განტოლებასთან ერთად განიხილება მისი შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება

$$\mu\frac{\partial\Psi_0}{\partial x} + \Psi_0(x,\mu,E)$$
$$= \frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1} \alpha(E)\alpha(E')\Psi_0(x,\mu',E')d\mu' dE', \tag{4}$$
$$x \in (-\infty,+\infty), \quad \mu \in]-1,+1[, \quad E \in [E_0,E_1]$$

რომელიც უშვებს ცვლადთა განცალებას. რის შედეგად მიიღება პარამეტრ-ზე დამოკიდებული ორცვლადიანი წრფივი ინტეგრალური განტოლება

$$(z-t)\tau_z(x,t) - z\int_a^b \int_{-1}^{+1} k(x,y)\tau_z(y,s)dsdy = 0$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1,+1[.$$

ამ განტოლების შესაბამისი ოპერატორის სპექტრი შეიცავს, როგორც დისკრეტულ ასევე უწყვეტ ნაწილებს. საკუთრივ ფუნქციათა სისტემა სრულია და ბიორთოგონალური. აღნიშნული თვისებები გამოიყენება დასმული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის დასადგენად და მისი ცხადი სახით წარმოსადგენად.

ამასთან ერთად შეისწავლება ე.წ. ალბედოს ამოცანა - რომელიც არის ამოცანა ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის პოვნისა $0 \le x \le \infty$ ნახევარ-სივრცეში, რომლის საზღვარზე ეცემა გამოსხივების პარალელური ნაკადი. ვთქვათ, $\psi_a(x,E,\mu)$ არის ამ ამოცანის ამონახსნი, ე.ი. ამონახსნი გადატანის თეორიის ერთგვაროვანი განტოლებისა როცა $0 \le x \le \infty$, შემდეგი სასა-ზღვრო პირობებით:

$$\Psi_a(0,E,\mu) = \delta(\mu-\mu_0)\delta(E-E^0)$$

$$E, E^0 \in [E_0, E_1] \quad \mu, \mu_0 \ge 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \Psi_a(x,E,\mu) = 0$$

$$x \in (-\infty,+\infty) \quad E, E^0 \in [E_0, E_1] \;\; \mu, \mu_0 \in]-1,+1[.$$

გარდა ამისა განიხილება მილნის პრობლემა, რომელშიც შეისწავლება ნეიტრონების განაწილება წყაროდან თავისუფალ გარემოში, და რომელიც მოიცავს ნახევარსივრცეს, ამასთან ნაკადი გარედან დაცემული დასხივებისა ნულის ტოლია. შეიძლება ჩაითვალოს, რომ წყარო ნეიტრონებისა განთავსებულია უსასრულობაში. ამრიგად, თუ $\psi_0(x,E,\mu)$-ით აღვნიშნავთ ამოცანის ამონახსნს, მაშინ დიდი x-ებისათვის უნდა იყოს

$$\Psi_0(x,E,\mu) \to \exp(\frac{x}{\nu_0})\varphi_{\nu_0}(\mu,E).$$

ამრიგად, იძებნება ერთგვაროვანი განტოლების ისეთი ამონახსნი, რომელიც კმაყოფილებს ზემოთ აღნიშნულ პირობას უსასრულობაში, ხოლო, როცა $x = 0$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ პირობას:

$$\Psi_0(0,E,\mu) = 0, \quad E \in [E_0, E_1] \quad \mu > 0.$$

ამ ამოცანებთან ერთად განიხილება გრინის ფუნქცია ნახევარ სივრცისათვის $\psi(x,E,\mu)$. ის განისაზღვრება როგორც გადატანის განტო-ლების ამონახსნი უსასრულო ნახევარსივრცეში, როცა გარედან არ ხდება დასხივება და გამოსხივები წყარო მდებარეობს განსახილველ არეში. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ვეძებთ განტოლების ამონახსენს

$$\mu\frac{\partial\Psi_g}{\partial x} + \Psi_g(x,\mu,E)$$

$$= \frac{c}{2}\int_{E_0}^{E_1}\int_{-1}^{+1}\alpha(E)\alpha(E')\Psi_g(x,\mu',E')d\mu'dE' \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\delta(x-x_0)\delta(E-E_0)\delta(\mu-\mu_0),$$

$$x \in (0,+\infty), \quad \mu \in]-1,+1[, \quad E \in [E_0, E_1]$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობებით

$$\Psi_g(0,\mu,E) = 0, \qquad \mu > 0$$

და

$$\lim_{x\to\infty}\Psi(x,\mu,E) = 0$$

$$x \in (0,+\infty), \quad \mu \in]-1,+1[, \quad E \in [E_0, E_1]$$

შემდგომში ჩვენი ინტერესების სფეროს წარმოადგენს ნეიტრონების ფაზური სიმკვრივის ასიმპტოტური ყოფაქცევის დადგენა. ამასთან განიხი-ლება ის შემთხვევა როცა აღნიშნული ფაზური სიმკვრივე წარმოქმნილია ბრტყელი, ერთეულოვანი სიმძლავრის მქონე $\mu = \mu_0$ მიმართულების და $\lambda = \lambda_0$ ტალღის სიგრძის მქონე წყაროსაგან. ამ პრობლემის გადასაწყვეტად

გამოყენებულია საძებნი სიდიდის საკუთრივ ფუნქციათა საშუალებით გაშლის მეთოდი. ცნობილია, რომ რეგულარული და სინგულარული საკუთრივ ფუნქციები აიგება შესაბამისი მახასიათებელი განტოლებიდან. თვით ეს განტოლება წარმოქმნილია გადატანის წრფივი თეორიის განტოლებიდან, რომელიც აღწერს ლითონში რადიაციის გაჭოლვის პროცესს. ამასთან ხაზი უნდა გაესვას იმ გარემოებას, რომ დისკრეტული საკუთრივი რიცხვების შესაბამისი საკუთრივი ფუნქციები წარმოადგენენ თავიანთი არგუმენტების მიმართ, კლასიკური აზრით განმარტებულ ფუნქციებს. მათი რაოდენობა სასრული ან თვლადია. სინგულარული საკუთრივი ფუნქციები კი წარმოადგენენ სობოლევ-შვარცის აზრით განმარტებულ განზოგადებულ ფუნქციებს. მათი რაოდენობა კონტინუუმ სიმძლავრისაა.

ამრიგად, მახასიათებელი განტოლების დისკრეტული სპექტრი სასრული ან თვლადია, ხოლო უწყვეტ სპექტრს მონაკვეთი წარმოადგენს. შემდგომში (1) განტოლებისთვის დასმული სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნს წარმოვადგენთ რეგულარული და სინგულარული საკუთრივ ფუნქციების დახმარებით, სადაც შესაბამისი კოეფიციენტების განსაზღვრისათვის გამოიყენება ამოცანის ფიზიკური შინაასიდან გამომდინარე სასაზღვრო პერობები. ამრიგად, შეიძლება ითქვას, რომ არსებობს გარკვეული ხასიათის ანალოგია კლასიკური მათემატიკური ფიზიკის ამოცანებსა და ჩვენს მიერ განხილული გადატანის თეორიის განტოლებებისთვის დასმულ სასაზღვრო ამოცანებს შორის მისი ამოხსნის თვალსაზრისით.

ჩვენს მიზანს წარმოადგენს ისეთი ფორმულის მიღება, რომლის საშუალებით შესაძლებელია ასიმპტოტური ყოფაქცევის დადგენა ბოლცმანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის განტოლების ამონახსნი-სთვის. აღნიშნული ამონახსნით აღიწერება ნეიტრონების ნაკადის გაჭოლ-ვის პროცესი უსასრულო ერთგვაროვანი გარემოში. გეომეტრია, რომელიც აქ განხილულია - ბრტყელია. წყარო - მონო მიმართული და მონო ქრომატული, გამოსახული დირაკის ფუნქციის საშუალებით.

ვთქვათ, $G(x_0, \mu_0, \lambda_0, x, \mu, \lambda)$ არის ფოტონების ან ნეიტრონების ნაკადი, რომელიც გამოსხივდება $x = x_0$ წერტილიდან $\mu = \mu_0$ მიმართულებით და $\lambda = \lambda_0$ შესაბამისი ენერგიით (ტალღის სიგრძით ფოტონების ან ნეიტრონების ლეტარგიით). ცნობილია რომ ყოველივე ამის აღწერა შესაძლებელია მოცემულ იქნას გადატანის წრფივი მრავალსიჩქარიანი თეორიის შემდეგი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებით

$$\mu\frac{\partial G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda)}{\partial x}+G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda) \tag{6}$$

$$=\int_a^b\int_{-1}^{+1}k(\mu,\lambda;\mu'\lambda')G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu',\lambda')d\mu'd\lambda'$$

$$+S(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda)$$

$$x,x_o\in(-\infty,+\infty),\quad \mu,\mu_0\in(-1,+1),\quad \lambda,\lambda_0\in[a,b]$$

სადაც, გული განტოლების $k(\mu, \lambda, \mu', \lambda')$, რომელიც ახასიათებს ელემენტარულ ნაწილაკთა გაბნევას, (მას ხშირად ფიზიკოსები გაბნევის ინდიკატრისას უწოდებენ), წარმოიდგინება შემდეგი სახით:

$$k(\mu,\lambda;\mu',\lambda')=\sum_{s=0}^{n}(2s+1)k_s(\lambda,\lambda')p_s(\mu)p_s(\mu'),$$

ამ გამოსახულებაში $p_s(\mu)$ გამოსახავს s რიგის ლეჟანდრის პოლინომს,

$$S(x-x_0,\mu-\mu_0,\lambda-\lambda_0)$$

ახასიათებს წყაროს განაწილებას.

$$S(x-x_0,\mu-\mu_0,\lambda-\lambda_0)=\frac{1}{2\pi}\delta(x-x_0)\delta(\mu-\mu_0)\delta(\lambda-\lambda_0)$$

შესაძლებელია (1) განტოლების დაყვანა ერთგვაროვან განტოლებამდე, თუ ჩვენ კოორდინატთა სათავეში მდებარე წყაროს ჩავანაცვლებთ ნახტომის პირობით. ამრიგად, (1) არაერთგვაროვანი განტოლების მაგივრად შეიძლება განხილულ იქნას შემდეგი ერთგვაროვანი განტოლება:

$$\mu\frac{\partial G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda)}{\partial x}+G(x_0,\mu_0,\lambda_0;x,\mu,\lambda) \tag{7}$$

$$= \int_a^b \int_{-1}^{+1} \sum_{s=0}^{n} (2s+1) k_s(\lambda, \lambda') p_s(\mu) p_s(\mu') G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x,\ \mu', \lambda'\ ) d\mu' d\lambda'$$

რომლის ამონახსნი დააკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას:

$$2\pi\mu(G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x_0^+, \mu, \lambda) - G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x_0^-, \mu, \lambda))$$

$$= \delta(\mu - \mu_0)\delta(\lambda - \lambda_0) \tag{8}$$

$$x, x_o \in (-\infty, +\infty), \quad \mu, \mu_0 \in (-1, +1), \quad \lambda, \lambda_0 \in [a, b]$$

ამასთან ერთად, მოითხოვება რომ ამონახსნისათვის უსასრულობაში დამატებითი პირობების დაკმაყოფილება

$$\lim_{|x| \to \infty} G(x_0, \mu_0, \lambda_0; x, \mu, \lambda) = 0 \tag{9}$$

$$\mu, \mu_0 \in (-1, +1), \quad \lambda, \lambda_0 \in [a, b]$$

დასასრულს, ჰელდერის ფუნქციათა კლასში მოიცემა ამოხსნადობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა ერთი ორცვლადიანი ინტეგრალური განტოლებისა, რომელსაც ერთი ცვლადის მიმართ გააჩნია სინგულარობა. ასეთი სახის განტოლებები ხშირად გვხვდებიან ნეიტრონების გადატანის თეორიაში. ამონახსნის მოძებნა მიიყვანება ფრედგოლმის მეორე გვარის ერთცვლადიანი ინტეგრალური განტოლების ამოხსნამდე. ჩვენ შევისწავლით ერთი სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებას რემელსაც გააჩნია დიდი მნიშვნელობა მათემატიკური ფიზიკის ნეიტრონების გადატანის თეორიაში. ამ განტოლებას აქვს სახე:

$$(\mathbf{L}u)(s,t) = \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{sk(x,y)}{s-t} u(y,s) ds dy$$

$$+u(x,t) + \int_a^b \int_{-1}^{+1} \frac{tk(x,y)}{s-t} u(y,t) ds dy = f(x,t), \tag{9}$$

$$x \in [a,b], \quad t \in]-1, +1[$$

სადაც, $k(x,y)$ არის ნამდვილი ცვლადის უწყვეტი ფუნქცია, მარჯვენა მხარე $f(x,t)$ არის ნამდვილი ცვლადის ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს t ცვლადის მიმართ H* პირობებს. შემდგომში ასეთ ფუნქციაღა კლასი აღნიშნულია D*-თი. ჩვენ ვეძებთ ამონახსნს $u \in D^*$. ჩვენის აზრით, ეს კლასი ბუნებრივია და პოულობს პრაქტიკულ გამოყენებას.

დასკვნები:

დისერტაციაში ჩატარებული ძირითადი კვლევები და შედეგები მოკლედ შეიძლება ჩამოყალიბდეს შემდეგნაირად:

- ბირთვული რეაქტორების კონსტრუქციაში გამოყენებული ნეიტრონებით დასხივებული წრიული ფორმის ფირფიტების მექანიკური მახასიათებლების განსაზღვრა.
- მრავალსიჩქარიანი გადატანის წრფივი თეორიის ზოგიერთი განტოლებებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსენთა ანალიზური სახე.
- წარმოდგენილი მეთოდის გამოყენებით განხილული განტოლებებისათვის გრინის ფუნქციის აგება, როგორც უსასრულო, აგრეთვე ნახევრად უსასრულო გარემოსა და პროფილირებული ნამზადებისათვის.
- ზოგიერთი განტოლებებისათვის დასმული ალბედოსა და მილნის ამოცანების ამოხსნა ანალიზური სახით.
- გადატანის ზოგიერთი არასტაციონარული ამოცანების ამოხსნა.

დისერტაციის ძირითადი შედეგები გამოქვეყნებულია შემდეგ შრომებში:

1. Чачхиани З.Б., Бибилури М. Расчет металлических конструкции на прочность применением радиоактивного облучения. Проблемы металлургии, сварки и материаловедения. №3 (13)6 сентябрь, 2006, ст. 15-18.
2. ბიბილური მ. მასალათა ფიზიკურ-მექანიკური თვისებების გამოყენება ნაკეთობათა საიმედოობის უზრუნველყოფის მიზნით. სამეცნიერო-ტექნიკური ჟურნალი „ენერგია“№2 (46). თბ. 2008, გვ. 136-138.
3. გულუა დ., შულაია დ., ბიბილური მ. გამოსხივების გადატანის თეორიიდან წარმოქმნილი ერთი სინგულარული განტოლების შესახებ. საქართველოს განათლების მეცნიერებათა აკადემიის ჟურ: „მოამბე“ ტ. 9 №1 თბილისი 2015. გვ. 24-30.
4. Bibiluri M., Gulua D., Shulaia D. About asymptotical behavior of the neutrons phase density in the case of isotropic point source. The State University of I.Vekua Applied Mathematics edition. (Appl. Math. Inform. March), printed.

5. Bibiluri M. The boundary value problem posed in an infinite domain for one equation of transfer theory The State University of I.Vekua Applied Mathematics edition. Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua of Applied Mathematics, printed.

Georgian Technical University

Malxaz Bibiluri

Using of singular particular functions in some mathematical tasks formed from the neutral radiation theory

The Abstract

of the thesis presented for attainment of the

Doctoral academic degree

Doctoral Program „Mathematic“, cipher 0501

Tbilisi, Georgia

2015

The work was prepared and done In the Georgian Technical University

Faculty of Informatics and Control Systems, Department of Physics

The Scientific Supervisor: Prof. D. Shulaia

Ac. prof. D. Gulua

The Reviewers: ---

The defense will occur in July________

In the Georgian Technical University at the session of Dissertation Council.

Address:77, Kostava Str., Tbilisi 0175, Georgia, Building ______ Auditorium______

The Thesis is available at the library of the Georgian Technical University

The abstract is available on the webpage of the Georgian Technical University

Scientific Secretary of the Council, Professor _________ Tinatin Kaishauri

ABSTRACT

The present work deals with the tasks set for the equation of linear multi-velocity theory of relocation. In particular, the case has been considered when the environment is infinite, and is isotropic towards the angle variable.

Together with the equation there is considered its relative homogeneous equation which allows the separation of variables. As a result of which there is received the two-variable linear integral equation depended on the parameter.

The spectrum of the operator corresponding to this equation comprises both the discrete and continuous parts. The system of functions themselves is complete and biorthogonal. The indicated features are used for determination of uniqueness of solution of the set task and for representation it vividly. Simultaneously, there is studied the Albedo task which is the task of finding of phase density of neutrons in hemisphereon the border of which there is fallen a stream parallel to irradiation

Besides, a Milni Problem is considered which serves to study the distribution of neutrons from the source in a free environment comprising the hemispace, besides, the stream of the irradiation externally incident equals to zero. It might be deemed that the source of neutrons is allocated in infinity.

Thus, such solutions of homogenous equation are being searched which meets the above-indicated condition in infinity and when then the following condition.

Together with these tasks there is considered a Green function for hemi-space. It is considered as a solution of relocation equation in infinite semi-space when no radiation takes place externally and the source of irradiation is located in the area to be considered.

Further, the sphere of our interests is to define the asymptotic behavior of phase density of neutrons. Simultaneously, there is considered the case when the indicated phase density is formed from the source having the direction of the flat, single power and wave length/ For solution of this problem there will be used a method of spanning by means of searching volume particularly of functions/ It is known that regular and singular particular functions will be constructed from corresponding characteristic equation/ This equation itself has been constructed from linear theory of relocation. This equation itself has been created from the equation of linear theory of relocation which describes the process of radiation stitching of radiation in the metal. At the same time the situation should be specially underlined that the particular functions

corresponding to discrete particular numbers relative to their arguments, are the determined functions in classical understanding. Their number is finite or countable. And the singular particular functions are the generalized functions determined from the point of view of Sobolev-Schvasrtss. Their number is of continuum power. Thus the discrete spectrum of characteristic equation is finite or countable, and the continiuum spectrum is a section. We represent the solution of set border task by means of regular and singular particular functions where for determination of relative coefficients there are used the definite border conditions as a consequence of physical content of the task. Thus, it might be told that there is available an analogy of definite character between the classical mathematical physical tasks and the border tasks set for the equations of the theory of relocation from the point of view of its solution.

Our goal is to receive such a formulae by means of which it will be possible to define the asymptotic behavior for solution of equation of Botsman linear multi-velocity theory. By means of indicated solution it will be described the process of stitching of neutron stream under the infinite homogeneous environment. The geometry, which is considered here is flat. The source - mono directed and mono chromatic, expressed by means of Dirak function.

Finally, in the class of Helder's functions there is given the necessary and enough condition of solubility of one two-variable integral equation which has a singularity to one variable, We meet the equation of such type very frequently in the theory of relocation of the neutrons. Searching of solutions is brought to solution of one-variable integral equation of the second family of Fredholm. We shall study one singular integral equation which is of great importance in the theory of relocation of neutrons of mathematical physics.