საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ხელნაწერის უფლებით

გელა მანელიძე

ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის ამოცანებში

დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად წარდგენილი დისერტაციის

ა ვ ტ ო რ ე ფ ე რ ა ტ ი

სადოქტორო პროგრამა ,,მათემატიკა", შიფრი 0501

თბილისი,
2016 წელი

სამუშაო შესრულებულია საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტში
ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელები: პროფ. დავით ნატროშვილი
პროფ. გივი ბერიკელაშვილი

რეცენზენტები: – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

დაცვა შედგება – – –– წლის – – – – – – – – – – – – , – – –– საათზე საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოს კოლეგიის სხდომაზე, კორპუსი – – ––, აუდიტორია – – –– მისამართი: 0175, თბილისი, კოსტავას 77.

დისერტაციის გაცნობა შეიძლება სტუ-ს ბიბლიოთეკაში,
ხოლო ავტორეფერატისა - ფაკულტეტის ვებგვერდზე.

სადისერტაციო საბჭოს მდივანი პროფ. თინათინ კაიშაური

ნაშრომის ზოგადი დახასიათება

თემის აქტუალობა

სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო სამგანზომილებიანი ამოცანების თეორიულ გამოკვლევას და მიხლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგების პრობლემებს. კერძოდ, ჩვენი ძირითადი მიზანია სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების გაანალიზება თეორიულ და პრაქტიკულ ასპექტებში ჰელმჰოლცის განტოლებისა და დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისათვის.

ჰელმჰოლცის განტოლება გვხვდება აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების მათემატიკურ მოდელებში და შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს როგორც ტალღათა გავრცელების პირდაპირ ამოცანებში, ისე შებრუნებულ ამოცანებში. ტალღების გავრცელების ეს მოდელები ფართოდ გამოიყენება საინჟინრო ელექტრონიკაში, ბიოსამედიცინო აპარატურაში, ფიზიკური გამზომი აპარატურის წარმოებაში, რადარულ სისტემებში, ანტენებში და სხვა.

დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემა მყარი დეფორმადი სხეულების თეორიაში ერთ-ერთ ძირითად მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს. ჩვენი განხილვის ძირითადი ობიექტი არის ანიზოტროპული დრეკადი სხეულების მოდელის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთაც უდიდესი გამოყენება აქვთ ინჟინერიაში, კომპოზიტური მასალების თეორიაში, მასალათა გამძლეობის ამოცანებში და სხვა.

სამუშაოს მიზანი

სადისერტაციო ნაშრომის ძირითადი მიზანია ჰელმჰოლცის განტოლებისა და დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისათვის სასაზღვრო-საკონტაქტო სამგანზომილებიანი ამოცანების თეორიული გამოკვლევა და მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება.

კვლევის ობიექტი და მეთოდები

სამეცნიერო კვლევის ძრითადი ობიექტებია სამგანზომილებიანი სასაზღვრო, სასაზღვრო-საკონტაქტო და ბზარის ტიპის ამოცანები ჰელმჰოლცის განტოლებისა და დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისათვის. სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანების თეორიული გამოკვლევა ჩატარებულია პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალური (ფსევდოდიფერენციალური) განტოლებების თეორიის გამოყენებით, ხოლო მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმები აგებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენებით.

ნაშრომის ძირითადი შედეგები და მეცნიერული სიახლე

ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის პოტენციალთა მეთოდის გამოყენებით დამტკიცებულია დირიხლეს, ნეიმანის, რობინის და შერეული გარე

სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის თეორემები სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში და დადგენილია ამონახსნების შეფასებები იმავე ფუნქციურ სივრცეებში. მიღებული შედეგები არსებითადაა გამოყენებული ბზარის და ეკრანის ტიპის სასაზღვრო ამოცანების და შერეული ტრანსმისიის ამოცანების გამოსაკვლევად უბნობრივ ერთგვაროვანი სხეულებისათვის.

ანალოგიურად, დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისთვის გაანალიზებულია დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანები. შესაბამისი ფუნქციური სივრცეების ნორმებში დადგენილია ამონახსნების შეფასებები სასაზღვრო მონაცემების ნორმების საშუალებით.

მიღებული აპრიორული შეფასებები არსებით როლს თამაშობს დისერტაციაში შემოთავაზებული ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდზე დაფუძნებული მიახლოებითი ამონახსნების მოძებნის ალგორითმების აგებაში. ფაქტობრივად, შემოთავაზებულ ალგორითმებს სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგება დაყავს სასაზღვრო ფუნქციების აპროქსიმაციაზე ფუნდამენტური ამონახსნების საშუალებით სპეციალურად აგებულ ფუნქციათა სისტემაში.

ერთგვაროვანი და უბნობრივ ერთგვაროვანი მრავალკომპონენტიანი კომპოზიტური სტრუქტურებისთვის დასმული სამგანზომილებიანი ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანებისთვის, აგრეთვე შერეული ტრანსმისიის ტიპის ამოცანებისთვის დისერტაციაში განვითარებულია ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი (ფამ) (Method of Fundamental Solutions - MFS).

ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი პირველად შემოტანილი იქნა ცნობილი ქართველი მათემატიკოსის ვიქტორ კუპრაძის მიერ წინა საუკუნის 60-იან წლებში.

ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდის ძირითადი იდეა არის ის, რომ დიფერენციალური განტოლების ფუნდამენტური $\Gamma(x-y)$ ამონახსნის სინგულარობის $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ პოლუსები განთავსდეს განსახილველი არის გარეთ და აიგოს ფუნქციათა მიმდევრობა $\{\Gamma(x-y^{(k)})\}_{k=1}^{\infty}$, დამტკიცდეს ამ სისტემის წრფივად დამოუკიდებლობა და სისრულე შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში და შემდეგ მათი $\sum\limits_{k=1}^{N} C_k\,\Gamma(x-y^{(k)})$ სახის წრფივი კომბინაციებით განხორციელდეს საძიებელი ამონახსნის აპროქსიმაცია. აქ C_k მუდმივებია, რომლებიც უნდა შეირჩეს სასაზღვრო პირობის დასაკმაყოფილებლად. ცხადია, დიფერენციალური განტოლება ავტომატურად დაკმაყოფილდება.

წინა საუკუნის 70-იანი წლებიდან დაწყებული, ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი თანდათანობით გადაიქცა მიახლოებითი ამონახსნის აგების ეფექტურ მეთოდად და გამოყენებული იყო მრავალი ფიზიკური და საინჟინრო ამოცანის ამოსახსნელად (მათ შორის, ფუნქციონალურად გრადუირებული სტრუქტურებისთვის) ლიტერატურაში ძირითადად ყურადღება გამახვილებული იყო ამონახსების აპროქსიმაციაზე L_2 სივრცის ბაზაზე აგებულ სობოლევის სივრცეებში. წარმოდგენილ დისერტაციაში ამონახსების აპროქსიმაციის პრობლემა განხილულია $L_p, p>1$, სივრცის ბაზაზე აგებულ სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში.

უნდა აღინიშნოს, რომ სამეცნიერო ლიტერატურაში უკანასკნელ პერიოდამდე არ იყო ცნობილი, თუ როგორ შეიძლებოდა ფუნდამენტურ

ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებში, რადგან აღნიშულ მეთოდთან დაკავშირებული არსებული მიდგომები არ გამოდგებოდა ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებისთვის. ჩვენი კვლევის ერთ-ერთი მთავარი მიზანი იყო ამ სიძნელეების გადაჭრა და ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გავრცელება ეკრანის და ბზარის ტიპის შერეული სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანებისთვის. ამ პრობლემის გადაჭრაში არსებითი როლი ითამაშა ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანების ჩამოყალიბებამ შერეული საკონტაქტო ამოცანების სახით ხელოვნურად შემოტანილ ზედაპირებზე განსაზღვრული დამატებითი ტრანსმისიის პირობებით.

ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი ხასიათდება გამოყენების არაჩვეულებრივი სიმარტივით, რაც გამოწვეულია შემდეგი მიზეზებით:

- საცდელი ფუნქციები, რომლებიც ემთხვევა ფუნდამენტურ ამონახსნებს, მარტივი და ერთგვაროვანი სტრუქტურისაა;
- არ არის საჭირო სინგულარული ინტეგრალების გამოთვლა;
- არ მოითხოვს საზღვრის ტრიანგულაციას;
- მარტივია მიახლოებითი ამონახსნის მნიშვნელობის პოვნა სხეულის შიგა წერტილებში;
- ფუნდამენტური ამონახსნების წრფივი კომბინაციით წარმოდგენილი აპროქსიმაციის წარმოებულები შეიძლება უშუალოდ გამოითვალოს;
- საცდელი ფუნქციების წრფივი გარსის სიმკვრივე შესაბამის ფუნქციურ სივრცეებში უზრუნველყოფს მეთოდის მაღალ ადაპტურობას;
- ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდის გამოყენება შეიძლება არარეგულარული საზღვრის შემთხვევაშიც (არ მოითხოვება საზღვრის სიგლუვე, მაგალითად, საზღვარი შეიძლება იყოს ლიპშიცის ზედაპირი);

უკანასკნელი ოთხი ათწლეულის განმავლობაში ლიტერატურაში გვხვდებოდა ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდის რამდენიმე განსხვავებული ფორმულირება. მათგან ორი ყველაზე უფრო პოპულარული არის შემდეგი:

(i) პირველ შემთხვევაში სინგულარობები (ფუნდამენტური ამონახსნის $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ პოლუსები) განლაგებულია ფიქსირებულ ზედაპირზე, რომელიც მდებარეობს განსახილველი არის გარეთ და წარმოადგენს ე.წ. ფსევდოსაზღვარს. ამ ფორმულირებას მივყავართ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემამდე უცნობი კოეფიციენტების მიმართ (მაგალითად, კოლოკაციის ან გალიორკინის მეთოდის გამოყენებით).

(ii) მეორე შემთხვევაში $\{y^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ პოლუსების პოზიცია განისაზღვრება როგორც დისკრეტული ამოცანის ამონახსნის შემადგენელი ნაწილი. ამ ფორმულირებას მივყავართ უმცირეს კვადრატთა მეთოდის არაწრფივ ამოცანასთან.

წარმოდგენილ დისერტაციაში აღნიშნული მეთოდი გავრცელებული და დასაბუთებულია როგორც ძირითადი, ასევე ეკრანის და ბზარის ტიპის

შერეული ამოცანებისათვის. შესაბამისი ალგორითმების დაფუძნებისათვის ჯერ ჩატარებულია თეორიული გამოკვლევა სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობისა და ერთადერთობის თვალსაზრისით, ხოლო შემდეგ გამოკვლეულია ამონახსნების რეგულარობა, დადგენილია სიგლუვის კლასები და ამოწერილია ამონახსნების ნორმების შეფასება შესაბამისი სასზღვრო მონაცემების ნორმების საშუალებით.

აქ პრობლემა შეიძლება წარმოიქმნას იმ ფაქტთან დაკავშირებით, რომ $\sum\limits_{k=1}^{N} C_k \, \Gamma(x - y^{(k)})$ ტიპის წრფივი კომბინაციები არ იყოს ყველგან მკვრივი შესაბამის ფუნქციათა სივრცეში, განსაკუთრებით, მდგრადი რხევის ამოცანებში, როდესაც რხევის პარამეტრი დაემთხვევა რეზონანსულ სიხშირეს. ამ შემთხვევაში საჭიროა მეთოდის არსებითი მოდიფიცირება, რაც დეტალურადაა გაანალიზებული დისერტაციაში.

შედეგების გამოყენების სფერო

სადისერტაციო ნაშრომში მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებული იყოს მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო სამგანზომილებიანი ამოცანების თეორიული კვლევისას, ასევე მიხლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგებისას. ამ ტიპის ამოცანები გვხვდება აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების მათემატიკურ მოდელებში, კერძოდ, ტალღათა გავრცელების პირდაპირ და შებრუნებულ ამოცანებში. ტალღების გავრცელების ეს მოდელები ფართოდ გამოიყენება საინჟინრო ელექტრონიკაში, ბიოსამედიცინო აპარატურაში, ფიზიკური გამზომი აპარატურის წარმოებაში, რადარულ სისტემებში, ანტენებში და სხვა.

დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემა მყარი დეფორმადი სხეულების თეორიაში ერთ-ერთ ძირითად მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს, რომელსაც უდიდესი გამოყენება აქვს ინჟინერიაში, კომპოზიტური მასალების თეორიაში, მასალათა გამძლეობის ამოცანებში, და სხვა.

დისერტაციის მოცულობა და სტრუქტურა

წარმოდგენილი დისერტაცია მოიცავს შესავალს, ორ თავს, ორ დამატებას და გამოყენებული ლიტერატურის სიას (66 დასახელება). დისერტაციის ტექსტი გადმოცემულია 142 გვერდზე.

დისერტაციის შინაარსი

დისერტაციის შესავალში აღწერილია თემატიკის აქტუალობა, მოცემულია ამ თემატიკასთან დაკავშირებული სამეცნიერო ლიტერატურის ბიბლიოგრაფიული და ისტორიული მიმოხილვა და გადმოცემულია დისერტაციის შედეგების მოკლე მიმოხილვა.

თავი I: ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევა შედგება ხუთი პარაგრაფისაგან.

§1-ში დახასიათებულია ზედაპირთა $C^{k,\alpha}$ კლასები და კლასიკური და განზოგადებული ფუნქციური სივრცეები: ლებეგის L_p, სობოლევ-სლობოდეცკის W_p^r, ბესელის პოტენციალთა H_p^s და ბესოვის $B_{p,q}^s$ ფუნქციათა სივრცეები, სადაც $r \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. შემოღებულია ასევე შემდეგი სივრცეები:

$$\begin{aligned}
&\widetilde{H}_p^s(\mathcal{M}) := \{f : f \in H_p^s(\mathcal{M}_0),\ \ \mathrm{supp}\, f \subset \overline{\mathcal{M}}\},\\
&\widetilde{B}_{p,q}^s(\mathcal{M}) := \{f : f \in B_{p,q}^s(\mathcal{M}_0),\ \ \mathrm{supp}\, f \subset \overline{\mathcal{M}}\},\\
&H_p^s(\mathcal{M}) := \{r_{\mathcal{M}} f : f \in H_p^s(\mathcal{M}_0)\}, \quad B_{p,q}^s(\mathcal{M}) := \{r_{\mathcal{M}} f : f \in B_{p,q}^s(\mathcal{M}_0)\},
\end{aligned}$$

სადაც $\mathcal{M}_0$ შეკრული ზედაპირია საზღვრის გარეშე და $\mathcal{M}$ არის $\mathcal{M}_0$-ის ღია საკუთრივი ქვემრავალსახეობა, რომლის საზღვარია $\partial\mathcal{M} \neq \varnothing$; $r_{\mathcal{M}}$ არის $\mathcal{M}$-ზე შეზღუდვის ოპერატორი.

§2 ეძღვნება ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის

$$A\left(\partial,\omega\right)u\left(x\right) \equiv \triangle u\left(x\right) + \omega^2 u\left(x\right) = \Phi\left(x\right), \quad x \in \Omega^{\pm}, \tag{1}$$

დირიხლეს, ნეიმანის, შერეული, ეკრანის ტიპის და ბზარის ტიპის ამოცანების დასმას. აქ Ω^+ არის $\mathbb{R}^3$ სივრცის სასრული დიამეტრის მქონე არე, რომლის საზღვარია $\partial\Omega^+ \equiv S \in C^{k;\alpha}$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$, ხოლო $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega^+}$. იგულისხმება, რომ უსასრულო არის შემთხვევაში u ფუნქცია აკმაყოფილებს ზომერფელდის გამოსხივების პირობას

$$\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial\left|x\right|} - i\,\omega\, u\left(x\right) = o\left(|x|^{-1}\right). \tag{2}$$

ფუნქციათა ეს კლასი აღნიშნულია $Z\left(\Omega^-\right)$ სიმბოლოთი.

განმარტება 1. ვიტყვით, რომ u ფუნქცია რეგულარულია $\Omega \in \{\Omega^-, \Omega^+\}$ არეში, თუ $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2\left(\Omega\right)$.

ვიტყვით, რომ ფუნქცია ნახევრად რეგულარულია Ω არეში, რომლის საზღვარი $\partial\Omega = S = \overline{S}_D \cup \overline{S}_N$ დანაწილებულია ორ არათანამკვეთ S_D და S_N ნაწილებად, $\partial S_D = \partial S_N = \ell_m$, თუ $u \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\backslash \ell_m\right) \cap C^2\left(\Omega\right)$ და პირველი რიგის წარმოებულებს აქვთ შემდეგი თვისება

$$\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_k}\right| \leq c[\mathrm{dist}\left(x,\ell_m\right)]^{-\gamma}, \quad x \in \overline{\Omega}\backslash \ell_m, \quad k = 1,2,3, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

სადაც $\mathrm{dist}\left(x,\ell_m\right)$ აღნიშნავს მანძილს x წერტილიდან ℓ_m წირამდე.
ამასთან, მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია და ინტეგრებადია Ω-ში. ნახევრად რეგულარული ფუნქციების კლასი Ω არეში აღვნიშნოთ $\widetilde{C}(\Omega;\ell_m;\gamma)$ სიმბოლოთი.

თუ Ω შეიცავს შიგა ბზარის ტიპის Σ ჭრილს, მაშინ ვიტყვით, რომ u ვექტორი ნახევრად რეგულარულია $\Omega_\Sigma = \Omega\backslash\overline{\Sigma}$ არეში, სადაც $\Sigma \subset S_0$ და S_0 შემოსაზღვრავს $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ არეს, თუ u უწყვეტია Ω_Σ-ში და უწყვეტად გაგრძელებადია $\overline{\Sigma}$-ზე Ω_0-დან და $\Omega\backslash\overline{\Omega}_0$-დან; ამასთან ერთად, პირველი რიგის წარმოებულები უწყვეტია Ω_Σ-ში, უწყვეტად გაგრძელებადია Σ-ზე Ω_0-დან და $\Omega\backslash\overline{\Omega}_0$-დან და

$$\left|\frac{\partial u\left(x\right)}{\partial x_k}\right| \leq C[\mathrm{dist}\left(x,\ell_C\right)]^{-\gamma}, \quad x \in \overline{\Omega}\backslash \ell_C, \ \ \ell_C = \partial\Sigma, \ \ k = 1,2,3, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

ხოლო მეორე რიგის წარმოებულები უწყვეტია Ω_Σ-ში და ლოკალურად ინტეგრებადია Ω_Σ-ზე. ნახევრად რეგულარული ფუნქციების კლასი Ω_Σ არეში აღვნიშნოთ $\widetilde{C}(\Omega_\Sigma;\ell_C;\gamma)$ სიმბოლოთი.

დირიხლეს ამოცანა. ვიპოვოთ ჰელმჰოლცის (1) განტოლების რეგულარული $u \in C^1\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\{u\,(x)\}^- = f\,(x)\,, \quad x \in S, \tag{3}$$

სადაც

$$\Phi \in C^{0,\alpha}\left(\Omega^-\right), \quad f \in C^1\,(S)\,. \tag{4}$$

ნეიმანის ამოცანა. ვიპოვოთ (1) განტოლების რეგულარული $u \in C^1\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ სასაზღვრო პირობას

$$\left\{\partial_n u(x)\right\}^- = F(x), \quad x \in S, \tag{5}$$

სადაც ∂_n აღნიშნავს ნორმალის მიმართულებით წარმოებულს, Φ აკმაყოფილებს (4) პირობას და $F \in C\,(S)$.

ძირითადი შერეული ამოცანა. ვიპოვოთ ჰელმჰოლცის (1) განტოლების ნახევრად რეგულარული $u \in \widetilde{C}\left(\Omega^-;\ell_m;\gamma\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$ ამონახსენი, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ შერეულ სასაზღვრო პირობებს

$$\{u\,(x)\}^- = f_1\,(x)\,, \quad x \in S_D, \tag{6}$$

$$\left\{\partial_n u\,(x)\,\right\}^- = F_1\,(x)\,, \quad x \in S_N, \tag{7}$$

სადაც Φ აკმაყოფილებს (4) პირობას და $f_1 \in C^1\,(S_D)\,,\ F_1 \in C\,(S_N)\,.$

ეკრანის ტიპის ამოცანა. ვიპოვოთ ჰელმჰოლცის (1) განტოლების ნახევრად რეგულარული ამონახსენი Ω_Σ^- არეში, $u \in \widetilde{C}\left(\Omega_\Sigma^-;\ell_C;\gamma\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$, რომელიც აკმაყოფილებს ეკრანის ტიპის სასაზღვრო პირობებს Σ-ზე:

$$\{u\,(x)\}_\Sigma^+ = f^{(+)}\,(x)\,, \quad \{u\,(x)\}_\Sigma^- = f^{(-)}\,(x)\,, \quad x \in \Sigma, \tag{8}$$

და ერთ-ერთი ტიპის სასაზღვრო პირობას (დირიხლეს, ნეიმანის ან შერეულ სასაზღვრო პირობას) S ზედაპირზე, ამასთან, $f^{(\pm)} \in C^1\,(\Sigma)$.

ბზარის ტიპის ამოცანა. ვიპოვოთ ჰელმჰოლცის (1) განტოლების ნახევრად რეგულარული ამონახსენი Ω_Σ^- არეში, $u \in \widetilde{C}\left(\Omega_\Sigma^-;\ell_C;\gamma\right) \cap Z\left(\Omega^-\right)$, რომელიც აკმაყოფილებს ბზარის ტიპის სასაზღვრო პირობებს Σ-ზე:

$$\{\partial_n u\,(x)\}_\Sigma^+ = F^{(+)}\,(x)\,, \quad \{\partial_n u\,(x)\}_\Sigma^- = F^{(-)}\,(x)\,, \quad x \in \Sigma, \tag{9}$$

და ერთ-ერთი ტიპის სასაზღვრო პირობას (დირიხლეს, ნეიმანის ან შერეულ სასაზღვრო პირობას) S ზედაპირზე, ამასთან, $F^{(\pm)} \in C\,(\Sigma)$.

შემოტანილია ნიუტონის მოცულობითი და ზედაპირული პოტენციალები

$$\mathrm{P}_\Omega\,(f)\,(x) = \int_\Omega \Gamma\,(x-y,\omega)\,f\,(y)\,dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \tag{10}$$

$$V\,(g)\,(x) = V_S\,(g)\,(x) = \int_S \Gamma\,(x-y,\omega)\,g\,(y)\,dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash S, \tag{11}$$

$$W\,(h)\,(x) = W_S\,(h)\,(x) = \int_S \Big[\frac{\partial}{\partial n\,(y)}\Gamma\,(x-y,\omega)\Big]h\,(y)\,dS_y, \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash S, \tag{12}$$

სადაც $\Gamma\,(x,\omega) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\omega|x|}}{|x|}$ ჰელმჰოლცის ოპერატორის ფუნდამენტური ამონახსნია, და დახასიათებულია მათი თვისებები.

თეორემა 2. ვთქვათ, S ლიპშიცის ზედაპირია. მაშინ შემდეგი ოპერატორები უწყვეტია:

$$
\begin{aligned}
& V: H_2^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_2^1\left(\Omega^{+}\right), \qquad V: H_2^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_{2, \mathrm{loc}}^1\left(\Omega^{-}\right) \cap Z\left(\Omega^{-}\right), \\
& W: H_2^{\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_2^1\left(\Omega^{+}\right), \qquad W: H_2^{\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_{2, \mathrm{loc}}^1\left(\Omega^{-}\right) \cap Z\left(\Omega^{-}\right), \\
& \mathrm{P}_{\Omega^{+}}: H_2^0\left(\Omega^{+}\right) \rightarrow H_{2, \mathrm{loc}}^2\left(\mathbb{R}^3\right) \cap Z\left(\mathbb{R}^3\right), \\
& \mathrm{P}_{\Omega^{-}}: H_{2, \mathrm{comp}}^0\left(\Omega^{-}\right) \rightarrow H_{2, \mathrm{loc}}^2\left(\mathbb{R}^3\right) \cap Z\left(\mathbb{R}^3\right),
\end{aligned}
$$

თუ $g \in H_2^{-\frac{1}{2}}(S)$, $h \in H_2^{\frac{1}{2}}(S)$, $f \in L_2\left(\Omega^{+}\right)$, ან $f \in L_{2, \mathrm{comp}}\left(\Omega^{-}\right)$, მაშინ

$$
L(\partial, \omega) \mathrm{P}_{\Omega^{+}}(f)=\begin{cases} f, & \Omega^{+}\text{-ში}, \\ 0, & \Omega^{-}\text{-ში}, \end{cases} \qquad L(\partial, \omega) \mathrm{P}_{\Omega^{-}}(f)=\begin{cases} 0, & \Omega^{+}\text{-ში}, \\ f, & \Omega^{-}\text{-ში}, \end{cases} \tag{13}
$$

$$
\{V(g)(x)\}^{+}=\{V(g)(x)\}^{-}=\mathcal{H} g(x) \qquad S\text{-ზე}, \tag{14}
$$

$$
\{\partial_n V(g)(x\}^{\pm}=\left[\mp 2^{-1} I+\widetilde{\mathcal{K}}\right] g(x) \qquad S\text{-ზე}, \tag{15}
$$

$$
\{W(h)(x)\}^{\pm}=\left[\pm 2^{-1} I+\mathcal{K}\right] h(x) \qquad S\text{-ზე}, \tag{16}
$$

$$
\{\partial_n W(h)(x)\}^{+}=\{\partial_n W(h)(x)\}^{-} \equiv \mathcal{L} h(x) \qquad S\text{-ზე}. \tag{17}
$$

აქ $\widetilde{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ და $\mathcal{H}$ სასაზღვრო ინტეგრალური ოპერატორებია:

$$
\widetilde{\mathcal{K}} g(x):=\int_S\left[\frac{\partial}{\partial n(x)} \Gamma(x-y, \omega)\right] g(y)\, d S, \quad x \in S, \tag{18}
$$

$$
\mathcal{K} h(x):=\int_S\left[\frac{\partial}{\partial n(y)} \Gamma(x-y, \omega)\right] h(y)\, d S, \quad x \in S, \tag{19}
$$

$$
\mathcal{H} g(x):=\int_S[\Gamma(x-y, \omega)] g(y)\, d S, \quad x \in S. \tag{20}
$$

შემდეგი ოპერატორები შემოსაზღვრულია შესაბამის სივრცეებში

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{H}: H_2^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_2^{\frac{1}{2}}(S), \qquad \widetilde{\mathcal{K}}: H_2^{-\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_2^{-\frac{1}{2}}(S), \\
& \mathcal{K}: H_2^{\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_2^{\frac{1}{2}}(S), \qquad \mathcal{L}: H_2^{\frac{1}{2}}(S) \rightarrow H_2^{-\frac{1}{2}}(S).
\end{aligned}
$$

თუ $S \in C^{1, \alpha}$, $0<\alpha \leq 1$, მაშინ $\widetilde{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ და $\mathcal{H}$ ოპერატორები წარმოადგენენ სუსტი სინგულარობის ინტეგრალურ ოპერეტორებს, ხოლო $\mathcal{L}$ არის სინგულარული ინტეგრო-დიფერენციალური ოპერატორი.

თუ $S \in C^{k+1, \alpha}$, სადაც $k \geq 1$ და $0<\beta<\alpha \leq 1$, მაშინ

$$
\begin{aligned}
& V: C^{k, \beta}(S) \rightarrow C^{k+1, \beta}\left(\overline{\Omega^{\pm}}\right), \qquad W: C^{k, \beta}(S) \rightarrow C^{k, \beta}\left(\overline{\Omega^{\pm}}\right), \\
& \mathcal{H}: C^{k, \beta}(S) \rightarrow C^{k+1, \beta}(S), \qquad \widetilde{\mathcal{K}}, \mathcal{K}: C^{k, \beta}(S) \rightarrow C^{k, \beta}(S), \\
& \mathcal{L}: C^{k, \beta}(S) \rightarrow C^{k-1, \beta}(S).
\end{aligned}
$$

ამ პარაგრაფში სპეციალური განხილვის საგანია უსასრულო არეზე გავრცელებული, ნიუტონის მოცულობითი პოტენციალის ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში, როდესაც შესაბამისი სიმკვრივის საყრდენი არ არის კომპაქტური. კერძოდ, დადგენილია საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ზომერფელდის გამოსხივების პირობას მოცულობითი პოტენციალისათვის.

თეორემა 3. ვთქვათ, $\Phi \in C\left(\mathbb{R}^3\right)$ და $|\Phi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^m}$, სადაც $m > 4$ და C დადებითი მუდმივია. მაშინ ჰელმჰოლცის $\left(\Delta + \omega^2\right)$ ოპერატორის, შესაბამისი ნიუტონის პოტენციალი $\mathrm{P}_{\mathbb{R}^3}(\Phi)$ აკმაყოფილებს ზომერფელდის გამოსხივების პირობებს.

§3 ეძღვნება ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის დირიხლეს, ნეიმანის, შერეული, ეკრანის ტიპის და ბზარის ტიპის ამოცანებისთვის არსებობის დებულებების დამტკიცებას სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში და ამ სივრცეებში ამონახსნების ნორმების შეფასებას (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში). ზოგადობის შეუზღუდავად განხილულია სასაზღვრო ამოცანები ერთგვაროვანი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის ($\Phi = 0$), რადგან არაერთგვაროვანი (1) განტოლების ერთი კონკრეტული გამოსხივებადი რეგულარული ამონახსენი შეგვიძლია ყოველთვის დავწეროთ ცხადი სახით მოცულობითი $\mathrm{P}_{\Omega^-}(\Phi)(x)$ პოტენციალის საშუალებით.

ერთადერთობის თეორემები აღნიშნული ამოცანებისათვის მტკიცდება რელიხ-ვეკუას შესანიშნავი ლემის გამოყენებით.

ლემა (რელიხ-ვეკუა, 1943). თუ $\boldsymbol{u}$ მეტაჰარმონიული ფუნქციაა $\boldsymbol{\Omega^-}$ არეში და აკმაყოფილებს პირობას

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Sigma(R)} |u(x)|^2 \, d\Sigma(R) = 0, \tag{21}$$

სადაც $\boldsymbol{\Sigma(R)}$ არის $\boldsymbol{R}$ რადიუსიანი სფერო, მაშინ $\boldsymbol{u(x) = 0}$, $\boldsymbol{x \in \Omega^-}$.

ამონახსნების არსებობის დებულებები მტკიცდება პოტენციალთა მეთოდისა და ინტეგრალური (ფსევდოდიფერენციალური) განტოლებების თეორიის გამოყენებით. მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ რანდენიმე ტიპური სასაზღვრო ამოცანა.

ამონახსნის არსებობის დებულება დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანისათვის.

განვიხილოთ დირიხლეს სასაზღვრო ამოცანა ჰელმჰოლცის ერთგვაროვანი განტოლებისათვის:

$$A\left(\partial,\omega\right)u\left(x\right) = 0, \quad x \in \Omega^-, \quad u \in C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega^-}\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \tag{22}$$

$$\left\{u\left(x\right)\right\}^- = f\left(x\right), \quad x \in S, \tag{23}$$

$$f \in C^{1,\beta}(S), \quad S \in C^{2,\alpha} \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1. \tag{24}$$

ვეძებოთ ამოცანის ამონახსენი მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების წრფივი კომბინაციის სახით

$$u\left(x\right) = W\left(g\right)\left(x\right) + aV\left(g\right)\left(x\right), \tag{25}$$

სადაც g არის საძიებელი სიმკვრივე, ხოლო a არის კომპლექსური მუდმივი

$$a = a_1 + ia_2, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_2 \neq 0. \tag{26}$$

მაშინ (22) განტოლება სრულდება ავტომატურად, ხოლო (23) სასაზღვრო პირობას მივყავართ შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებაზე საძიებელი g ფუნქციის მიმართ:

$$-\frac{1}{2}g\left(x\right) + \mathcal{K}g\left(x\right) + a\mathcal{H}g\left(x\right) = f\left(x\right), \quad x \in S, \tag{27}$$

სადაც $\mathcal{K}$ და $\mathcal{H}$ განსაზღვრულია (19) და (20) ტოლობით.

მტკიცდება, რომ ფრედჰოლმის $\left(-\frac{1}{2}I+\mathcal{K}+a\mathcal{H}\right)$ ოპერატორის გული ტრივიალურია და შემდეგი ოპერატორები შებრუნებადია

$$\mathcal{D}\equiv-\frac{1}{2}I+\mathcal{K}+a\mathcal{H}:C^{1,\beta}\left(S\right)\to C^{1,\beta}\left(S\right) \tag{28}$$

$$\mathcal{D}\equiv-\frac{1}{2}I+\mathcal{K}+a\mathcal{H}:L_2\left(S\right)\to L_2\left(S\right)\quad\left[H_2^{1/2}\left(S\right)\to H_2^{1/2}\left(S\right)\right]. \tag{29}$$

ამიტომ (27) არის ცალსახად ამოხსნადი ინტეგრალური განტოლება და მართებულია არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 4. თუ სრულდება (24) პირობები, მაშინ დირიხლეს (22)-(23) გარე ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოიდგინება (25) სახით, სადაც g სიმკვრივე განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (27) ინტეგრალური განტოლებიდან, და სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$\|u\|_{C^{1,\beta}\left(\overline{\Omega}\right)}\leq C_1\left(\Omega\right)\|f\|_{C^{1,\beta}(S)},\quad \|u\|_{L_2(\Omega)}\leq C_2\left(\Omega\right)\|f\|_{L_2(S)},$$
$$\|u\|_{H_2^1(\Omega)}\leq C_3\left(\Omega\right)\|f\|_{H_2^{1/2}(S)},$$

სადაც Ω არე წარმოადგენს Ω^- სიმრავლის ნებისმიერი სასრული დიამეტრის ქვესიმრავლეს, ხოლო $C_1\left(\Omega\right)$, $C_2\left(\Omega\right)$ და $C_3\left(\Omega\right)$ მუდმივები დამოკიდებულია მხოლოდ Ω არეზე.

ადგილი აქვს ასევე შემდეგ დებულებას.

შედეგი 5. ჰელმჰოლცის ერთგვაროვანი განტოლების ყოველი $u\in W^1_{p,\mathrm{loc}}\left(\Omega^-\right)$ $\cap Z\left(\Omega^-\right)$, $p>1$, კლასის ამონახსენი წარმოიდგინება შემდეგი ფორმულით

$$u\left(x\right)=W\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\left(x\right)+aV\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\left(x\right),$$

სადაც $a=a_1+ia_2$, $a_2\neq 0$, $g=\{u\}^-\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}\left(S\right)$, ხოლო $\mathcal{D}^{-1}$ არის შემდეგი ოპერატორის

$$\mathcal{D}=-\frac{1}{2}I+\mathcal{K}+a\mathcal{H}:B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}\left(S\right)\to B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}\left(S\right) \tag{30}$$

შებრუნებული.

ამონახსნის არსებობის დებულება ძირითადი შერეული სასაზღვრო ამოცანისთვის.

განვიხილოთ შემდეგი ძირითადი შერეული სასაზღვრო ამოცანა:

$$A\left(\partial,\omega\right)u\left(x\right)=0,\quad x\in\Omega^-,\quad u\in W^1_{2,\ \mathrm{loc}}\left(\Omega^-\right)\cap Z\left(\Omega^-\right), \tag{31}$$

$$\{u\left(x\right)\}^-=f_1\left(x\right),\quad x\in S_D,\quad f_1\in H_2^{1/2}\left(S_D\right), \tag{32}$$

$$\{\ \partial_n u\left(x\right)\}^-=F_1\left(x\right),\quad x\in S_N,\quad F_1\in H^{-1/2}\left(S_N\right). \tag{33}$$

სიმარტივისათვის ვიგულისხმოთ, რომ S, S_D, S_N ზედაპირები და ℓ_m წირი C^∞ სიგლუვისაა.

აღვნიშნოთ f_1 ფუნქციის რაიმე ფიქსირებული გაგრძელება S_D-დან მთელ S ზედაპირზე f-ით, რომელიც ინარჩუნებს სიგლუვეს:

$$r_{S_D}f=f_1\quad S_D\text{-ზე},\qquad f\in H_2^{1/2}\left(S\right). \tag{34}$$

ვეძიოთ (31)-(33) შერეული ამოცანის ამონახსენი შემდეგი სახით

$$u\left(x\right)=W\left(\mathcal{D}^{-1}\left(f+\widetilde{g}\right)\right)\left(x\right)+aV\left(\mathcal{D}^{-1}\left(f+\widetilde{g}\right)\right)\left(x\right),\quad x\in\Omega^{-},\tag{35}$$

სადაც $\mathcal{D}^{-1}$ არის (29) ოპერატორის შებრუნებული, $a=a_1+ia_2$, $a_2\neq 0$, ხოლო $\widetilde{g}\in\widetilde{H}_2^{1/2}\left(S_N\right)$ არის საძიებელი სიმკვრივე.

ცხადია, რომ $\{u\}^{-}=f+\widetilde{g}$ S-ზე და ამიტომ (32) პირობა სრულდება ავტომატურად, ისევე როგორც (31) თანაფარდობები.

(33) სასაზღვრო პირობას მივყავართ შემდეგ ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებაზე

$$\Big[\mathcal{L}+a\Big(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\Big)\Big]\mathcal{D}^{-1}\left(f+\widetilde{g}\right)=F_1\quad S_N\text{-ზე}\tag{36}$$

ანუ

$$r_{S_N}\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}\widetilde{g}=F\quad S_N\text{-ზე},\tag{37}$$

სადაც $\mathcal{N}=\mathcal{L}+a\big(\frac{1}{2}I+\widetilde{\mathcal{K}}\big)$, $F=F_1-r_{S_N}\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}f\in H_2^{-1/2}\left(S_N\right)$.
$\mathcal{D}$ ოპერატორის სტრუქტურიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\mathcal{D}^{-1}=-2I+T_{\mathcal{D}},\tag{38}$$

სადაც

$$T_{\mathcal{D}}:H^{1/2}\left(S\right)\to H^{1/2}\left(S\right),\quad T_{\mathcal{D}}:L_2\left(S\right)\to L_2\left(S\right),\tag{39}$$

კომპაქტური ოპერატორებია.

ამიტომ, $\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}$ პირველი რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორის მთავარი სინგულარული ნაწილი იქნება $-2\mathcal{L}$ ოპერატორი, რომლის მთავარი ერთგვაროვანი $\mathfrak{S}\left(-2\mathcal{L};\xi\right)$ სიმბოლო არის უარყოფითი ლუწი ფუნქცია:

$$\mathfrak{S}\left(-2\mathcal{L};\xi\right)=-\left|\xi\right|,\quad \xi=\left(\xi_1,\xi_2\right)\in\mathbb{R}^2\backslash\left\{0\right\}.\tag{40}$$

(37) განტოლების ამოხსნადობის შესასწავლად გამოყენებულია არაშეკრულ (გახსნილ), გლუვ ზედაპირზე განსაზღვრული ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორების თეორია და დამტკიცებულია, რომ

$$r_{S_N}\mathcal{N}\mathcal{D}^{-1}:\widetilde{H}_p^{s}\left(S_N\right)\to H_p^{s-1}\left(S_N\right)\qquad\left[\widetilde{B}_{p,q}^{s}\left(S_N\right)\to B_{p,q}^{s-1}\left(S_N\right)\right]\tag{41}$$

ფრედჰოლმის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორებია ნულოვანი ინდექსით, თუ

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{2}<s<\frac{1}{p}+\frac{1}{2}.\tag{42}$$

ნაჩვენებია, რომ (41) ოპერატორების ნულ-სივრცეები ტრივიალურია $\forall q\geq 1$-თვის და s და p პარამეტრების იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც აკმაყოფილებენ (42) უტოლობებს. ამ შედეგებზე დაყრდნობით მტკიცდება არსებობის შემდეგ დებულება.

თეორემა 6. გარე შერეულ (31)-(33) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი $u\in W_{2,\mathrm{loc}}^{1}\left(\Omega^{-}\right)\cap Z\left(\Omega^{-}\right)$, რომელიც წარმოდგენადია (35) ფორმულით, სადაც f არის f_1 -ის ნებისმიერი ფიქსირებული გაგრძელება სიგლუვის კლასის შენარჩუნებით S_D-დან S-ზე, ხოლო $\tilde{g}$ განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (37) ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან.

მართებულია აგრეთვე ამ თეორემის შემდეგი განზოგადება.

თეორემა 7. ვთქვათ, (31)-(33) დასმაში სრულდება შემდეგი პირობები

$$f_1 \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S_D), \quad F_1 \in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S_N), \quad \frac{4}{3} < p < 4. \tag{43}$$

მაშინ შერეულ ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u \in W_{p,loc}^1(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$, რომელიც წარმოიდგინება (35) სახით, სადაც $f \in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S)$ არის f_1-ის ნებისმიერი ფიქსირებული გაგრძელება, სიგლუვის კლასის შენარჩუნებით, S_D-დან S-ზე, ხოლო $\widetilde{g} \in \widetilde{B}_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S_N)$ განისაზღვრება (37) ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან, სადაც მარჯვენა მხარე F ეკუთვნის $B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S_N)$ სივრცეს. ამასთან ერთად, ადგილი აქვს შემდეგ შეფასებას:

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega^- \cap B(R))} \leq C(R)\left[\|f_1\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S_D)} + \|F_1\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S_N)}\right],$$

სადაც R საკმარისად დიდი რიცხვია, ისეთი, რომ $\overline{\Omega^+} \subset B(R)$, $\overline{\Omega}_0 \subset B(R)$, $B(R)$ არის R რადიუსიანი ბირთვი ცენტრით კოორდინატთა სათავეში, ხოლო $C(R)$ არის R-ზე დამოკიდებული დადებითი მუდმივი.

მართებულია სიგლუვის შემდეგი თეორემა.

თეორემა 8. ვთქვათ, კმაყოფილდება (43) ჩართვები,

$$\frac{4}{3} < p < 4, \quad 1 < t < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad \frac{1}{t} - \frac{1}{2} < s < \frac{1}{t} + \frac{1}{2}, \tag{44}$$

და $u \in W_{2,\mathrm{loc}}^1(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$ არის შერეული გარე ამოცანის ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოდგენილია (35) სახით, სადაც სიმკვრივე $\tilde{g}$ ცალსახად განისაზღვრება (37) ფსევდოდიფერენციალური განტოლებიდან.

მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებებს:

(i) თუ $f_1 \in B_{t,t}^s(S_D)$ და $F_1 \in B_{t,t}^{s-1}(S_N)$, მაშინ $u \in H_{t,\mathrm{loc}}^{s+\frac{1}{t}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$;

(ii) თუ $f_1 \in B_{t,q}^s(S_D)$ და $F_1 \in B_{t,q}^{s-1}(S_N)$, მაშინ $u \in B_{t,q,\mathrm{loc}}^{s+\frac{1}{t}}(\Omega^-) \cap Z(\Omega^-)$;

(iii) თუ β არაა მთელი რიცხვი, $f_1 \in C^{0,\beta}(S_D)$ და $F_1 \in B_{\infty,\infty}^{\beta-1}(S_N)$, მაშინ

$$u \in \Big[\bigcap_{\gamma<\nu} C^{0,\gamma}(\Omega^-)\Big] \cap Z(\Omega^-), \quad \nu = \min\Big\{\beta, \frac{1}{2}\Big\}.$$

ამონახსნის არსებობის დებულება ბზარის ტიპის სასაზღვრო ამოცანისთვის.

განვიხილოთ ბზარის ტიპის ამოცანა, როდესაც Ω_Σ^- არის S საზღვარზე მოცემულია დირიხლეს პირობა:

$$A(\partial,\omega)\,u(x) = 0, \quad x \in \Omega_\Sigma^-, \quad u \in W_{p,\mathrm{loc}}^1\left(\Omega_\Sigma^-\right) \cap Z\left(\Omega^-\right), \tag{45}$$

$$\{u\}^- = f \quad S\text{-ზე}, \tag{46}$$

$$\{\partial_n u\}^+ = F^+ \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{47}$$

$$\{\partial_n u\}^- = F^- \quad \Sigma\text{-ზე}, \tag{48}$$

სადაც

$$f\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S),\quad F^{(\pm)}\in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma),\tag{49}$$

და სრულდება ბუნებრივი თავსებადობის პირობა

$$F^{(+)}-F^{(-)}\in\widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma).\tag{50}$$

ვეძებოთ ამოცანის ამოხსნა კვლავ ზედაპირული პოტენციალების წრფივი კომბინაციის სახით

$$u(x)=W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)(x)+aV_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)(x)+V_\Sigma(\varphi)(x)+W_\Sigma(\psi)(x),\ \ x\in\Omega_\Sigma^-,\tag{51}$$

სადაც $a=a_1+ia_2$, $a_2\neq 0$, $\mathcal{D}^{-1}$ კვლავ არის (30) ოპერატორის შებრუნებული, ხოლო

$$g\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S),\quad \varphi\in\widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma),\quad \psi\in\widetilde{B}_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Sigma),\tag{52}$$

საძიებელი სიმკვრივეებია.

(47)-(48) პირობები გადავწეროთ შემდეგი ეკვივალენტური ფორმით:

$$\{\partial_n u\}^+-\{\partial_n u\}^-=F^{(+)}-F^{(-)}\quad \Sigma\text{-ზე},\tag{53}$$

$$\{\partial_n u\}^++\{\partial_n u\}^-=F^{(+)}+F^{(-)}\quad \Sigma\text{-ზე}.\tag{54}$$

(51) წარმოდგენა და (46), (53), (54) პირობები გვაძლევს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას საძიებელი სიმკვრივეებისათვის:

$$g+r_S\left[W_\Sigma(\psi)\right]=F_1\qquad S\text{-ზე},\tag{55}$$

$$r_\Sigma\Big[\frac{\partial}{\partial n}\left(W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)+aV_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\right)\Big]+r_\Sigma\mathcal{L}_\Sigma\psi=F_2\qquad \Sigma\text{-ზე},\tag{56}$$

$$\varphi=F_3\qquad \Sigma\text{-ზე},\tag{57}$$

სადაც

$$\begin{aligned}F_1&=f-r_SV_\Sigma\left(F^{(-)}-F^{(+)}\right)\in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S),\\ F_2&=\frac{1}{2}\left[F^{(+)}+F^{(-)}\right]-r_\Sigma\widetilde{\mathcal{K}}_\Sigma\left(F^{(-)}-F^{(+)}\right)\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(\Sigma),\\ F_3&=F^{(-)}-F^{(+)}\in\widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma).\end{aligned}\tag{58}$$

ამრიგად, φ ფუნქცია განისაზღვრება ცხადი სახით, ხოლო g და ψ ფუნქციებისათვის მივიღებთ შემდეგ სისტემას

$$g+\widetilde{T}_1\psi=F_1\quad S\text{-ზე},\tag{59}$$

$$\widetilde{T}_2g+r_\Sigma\mathcal{L}_\Sigma\psi=f_2\quad \Sigma\text{-ზე},\tag{60}$$

სადაც

$$\widetilde{T}_1\psi=r_S\left[W_\Sigma(\psi)\right],\quad \widetilde{T}_2g=r_\Sigma\left[\partial_n\left(W_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)+aV_S\left(\mathcal{D}^{-1}g\right)\right)\right].\tag{61}$$

ცხადია, $\widetilde{T}_1:\widetilde{B}_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma)\to B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S)$, $\widetilde{T}_2:B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S)\to B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma)$ კომპაქტური ოპერატორებია, რადგან $S\cap\overline{\Sigma}=\varnothing$. (59)-(60) სისტემა გადავწეროთ მატრიცული ფორმით:

$$\widetilde{\mathbb{M}}\widetilde{X}=\widetilde{Y},\tag{62}$$

სადაც $\widetilde{X}=(g,\psi)^T$, $\widetilde{Y}=(F_1,F_2)$, $\widetilde{\mathbb{M}}:=\begin{bmatrix} I & \widetilde{T}_1 \\ \widetilde{T}_2 & r_\Sigma\mathcal{L}_\Sigma \end{bmatrix}$. ამ ოპერატორს გააჩნია ასახვის შემდეგი თვისებები

$$\widetilde{\mathbb{M}}: H_p^s(S)\times\widetilde{H}_p^s(\Sigma)\to H_p^s(S)\times H_p^{s-1}(\Sigma), \tag{63}$$

$$: B_{p,q}^s(S)\times\widetilde{B}_{p,q}^s(\Sigma)\to B_{p,q}^s(S)\times B_{p,q}^{s-1}(\Sigma). \tag{64}$$

რადგან $\mathcal{L}_\Sigma$ ოპერატორის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო დადებითია: $\mathfrak{S}(\mathcal{L}_\Sigma;x,\xi)=\frac{1}{2}|\xi|>0$, როცა $\xi\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, ამიტომ შემდეგი ოპერატორები

$$r_\Sigma\mathcal{L}_\Sigma:\widetilde{H}_p^s(\Sigma)\to H_p^{s-1}(\Sigma)\qquad\left[\widetilde{B}_{p,q}^s(\Sigma)\to B_{p,q}^{s-1}(\Sigma)\right],$$

შებრუნებადია, თუ სრულდება (42) უტოლობები. აქედან გამომდინარეობს არსებობისა და რეგულარობის შემდეგი თეორემები.

თეორემა 9. ვთქვათ, სრულდება (49)-(50) პირობები და $\frac{4}{3}<p<4$. მაშინ ბზარის ტიპის (45)-(48) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსენი $u\in W_{p,\mathrm{loc}}^1\left(\Omega_\Sigma^-\right)\cap Z\left(\Omega_\Sigma^-\right)$ და ამონახსენი წარმოიდგინება (51) ფორმით, სადაც g, φ და ψ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (55)-(57) სისტემიდან. ამასთან ერთად მართებულია შემდეგი შეფასება

$$\|u\|_{W_p^1\left(\Omega_\Sigma^-\cap B(R)\right)}\le C(R)\Big[\|f\|_{B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S)}+ \\ +\|F^{(+)}+F^{(-)}\|_{B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma)}+\|F^{(+)}-F^{(-)}\|_{B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(\Sigma)}\Big],$$

სადაც R საკმარისად დიდი რიცხვია, ისეთი, რომ $\overline{\Omega^+}\subset B(R)$, $\overline{\Omega}_0\subset B(R)$.

ამ ამოცანისათვისაც მართებულია შემდეგი თეორემა ამონახსნთა სიგლუვის შესახებ.

თეორემა 10. ვთქვათ, კმაყოფილდება (49)-(50) ჩართვები და

$$\frac{4}{3}<p<4,\quad 1<t<\infty,\quad 1\le q\le\infty,\quad \frac{1}{t}-\frac{1}{2}<s<\frac{1}{t}+\frac{1}{2},$$

და $u\in W_{p,\mathrm{loc}}^1\left(\Omega_\Sigma^-\right)\cap Z\left(\Omega_\Sigma^-\right)$ არის ბზარის ტიპის (45)-(48) სასაზღვრო ამოცანის ერთადერთი ამონახსენი, რომელიც წარმოიდგინება (51) სახით, სადაც g, φ და ψ სიმკვრივეები განისაზღვრება ცალსახად ამოხსნადი (55)-(57) სისტემიდან.

მაშინ, ადგილი აქვს შემდეგ წინადადებებს:

(i) თუ $f\in B_{t,t}^s(S)$, $F^{(\pm)}\in B_{t,t}^{s-1}(\Sigma)$, და $F^{(+)}-F^{(-)}\in\widetilde{B}_{t,t}^{s-1}(\Sigma)$, მაშინ

$$u\in H_{t,\mathrm{loc}}^{s+\frac{1}{t}}\left(\Omega_\Sigma^-\right)\cap Z\left(\Omega_\Sigma^-\right);$$

(ii) თუ $f\in B_{t,q}^s(S)$, $F^{(\pm)}\in B_{t,q}^{s-1}(\Sigma)$ და $F^{(+)}-F^{(-)}\in\widetilde{B}_{t,q}^{s-1}(\Sigma)$, მაშინ

$$u\in B_{t,q,\mathrm{loc}}^{s+\frac{1}{t}}\left(\Omega_\Sigma^-\right)\cap Z\left(\Omega_\Sigma^-\right);$$

(iii) თუ $\beta>0$ და არ არის მთელი,

$$f\in C^{0,\beta}(S),\quad F^{(\pm)}\in B_{\infty,\infty}^{\beta-1}(\Sigma),\quad F^{(+)}-F^{(-)}\in\widetilde{B}_{\infty,\infty}^{\beta-1}(\Sigma),$$

მაშინ $u\in\left[\bigcap_{\gamma<\nu}C^{0,\gamma}\left(\overline{\Omega}\right)\right]\cap Z\left(\Omega_\Sigma^-\right)$, $\nu=\min\left\{\frac{1}{2},\beta\right\}$. აქ Ω არის ან Ω_0 ან $\Omega^-\setminus\overline{\Omega}_0$.

§4-ში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის გამოკვლეულია ძირითადი და შერეული საკონტაქტო ამოცანები და მიღებულია ამონახსნების ნორმების შეფასება. აქ მიღებულ შედეგებს არსებითი გამოყენება აქვთ ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის დაფუძნებაში ბზარის და ეკრანის ტიპის ამოცანებისათვის.

ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა.

ვთქვათ, მთელი $\mathbb{R}^3$ სივრცე რაიმე გლუვი $S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$, ზედაპირით გაყოფილია შიგა $\Omega^+ = \Omega_1$ და გარე $\Omega^- = \Omega_2$ არეებად. ვიგულისხმოთ, რომ Ω_1 და Ω_2 არეები შევსებულია მუდმივი ρ_1 და ρ_2 სხვადასხვა სიმკვრივის მქონე მასალით.

ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ძირითადი საკონტაქტო ამოცანა: ვიპოვოთ რეგულარული $u_1 \in C^2(\Omega_1) \cap C^1\left(\overline{\Omega}_1\right)$ და $u_2 \in C^2(\Omega_2) \cap C^1\left(\overline{\Omega}_2\right) \cap Z(\Omega_2)$ ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჰელმჰოლცის ერთგვაროვან განტოლებებს შესაბამის არეებში

$$\left(\Delta + \rho_1\omega^2\right) u_1 = 0 \quad \Omega_1\text{-ში}, \qquad \left(\Delta + \rho_2\omega^2\right) u_2 = 0 \quad \Omega_2\text{-ში}, \tag{65}$$

და შემდეგ საკონტაქტო პირობებს S ზედაპირზე:

$$\{u_1(x)\}^+ - \{u_2(x)\}^- = f(x), \quad x \in S, \tag{66}$$

$$\{\partial_n u_1(x)\}^+ - \{\partial_n u_2(x)\}^- = F(x), \quad x \in S, \tag{67}$$

სადაც

$$f \in C^{1,\beta}(S), \quad F \in C^{0,\beta}(S), \quad 0 < \beta < \alpha \leq 1. \tag{68}$$

გრინის ფორმულებისა და რელიხ-ვეკუას ლემის გამოყენებით მარტივად მტკიცდება, რომ ამ ამოცანის შესაბამის ერთგვაროვან საკონტაქტო ამოცანას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

ამ ძირითადი საკონტაქტო ამოცანის ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით:

$$u_1(x) = V_1(g_1)(x), \quad x \in \Omega_1, \tag{69}$$

$$u_2(x) = W_2(g_2)(x) + aV_2(g_2)(x), \quad x \in \Omega_2, \tag{70}$$

სადაც V_j და W_j აღნიშნავს $(\Delta + \rho_j\,\omega^2)$ ჰელმჰოლცის ოპერატორის შესაბამისი $\Gamma\left(x, \sqrt{\rho_j}\omega\right)$ ფუნდამენტური ამონახსნის საშუალებით აგებულ მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალებს, ხოლო g_1 და g_2 საძიებელი სიმკვრივეებია. აქაც a არის კომპლექსური რიცხვი ნულისგან განსხვავებული წარმოსახვითი ნაწილით, $a = a_1 + ia_2$, $a_2 \neq 0$.

(66) და (67) საკონტაქტო პირობები გვაძლევს შემდეგ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემას უცნობი g_1 და g_2 ფუნქციების მიმართ:

$$\mathcal{H}_1 g_1 - (-2^{-1}I + \mathcal{K}_2 + a\,\mathcal{H}_2)g_2 = f \quad S\text{-ზე}, \tag{71}$$

$$(-2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}_1)g_1 - [\mathcal{L}_2 + a(2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}_2)]g_2 = F \quad S\text{-ზე}, \tag{72}$$

სადაც $\mathcal{H}_j$, $\mathcal{K}_j$, $\widetilde{K}_j$ და $\mathcal{L}_j$ ინტეგრალური ოპერატორები წარმოშობილია შესაბამისად V_j და W_j პოტენციალებისა და მათი ნორმალით წარმოებულების სასაზღვრო მნიშვნელობებით.

(71)-(72) სისტემა წარმოადგენს ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა ელიფსურ სისტემას, ხოლო შესაბამისი ოპერატორი წარმოადგენს

ფრედჰოლმის ოპერატორს ნულოვანი ინდექსით. სისტემის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო (დუგლის-ნირენბერგის აზრით) არის შემდეგი მატრიცა

$$\left[\begin{array}{cc} \mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1\right) & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\mathfrak{S}\left(\mathcal{L}_2\right) \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc} -\frac{1}{2|\xi|} & +\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}|\xi| \end{array}\right],$$

ხოლო დეტერმინატია $-\mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1\right) \mathfrak{S}\left(\mathcal{L}_2\right)+\frac{1}{4}=-\mathfrak{S}\left(\mathcal{H}_1 \mathcal{L}_2\right)+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$. მტკიცდება, რომ

$$\mathcal{D}_2=-2^{-1} I+\mathcal{K}_2+a\, \mathcal{H}_2: C^{1, \beta}(s) \rightarrow C^{1, \beta}(s), \tag{73}$$

$$\mathcal{N}_2=\mathcal{L}_2+a(2^{-1} I+\widetilde{\mathcal{K}}_2): C^{1, \beta}(s) \rightarrow C^{0, \beta}(s), \tag{74}$$

ოპერატორები შებრუნებადია შესაბამის სივრცეებში.

მტკიცდება, რომ (71)-(72) სისტემის ერთგვაროვან ვერსიას გააჩნია მხოლოდ ნულოვანი ამონახსნი. ამიტომ (71)-(72) სისტემა ცალსახად ამოხსნადია და მისი ამონახსნი ცხადი სახით გამოისახება (73)-(74) ოპერატორებისა და მათი შებრუნებულების საშუალებით. ამ მიზნით შემოვიღოთ ოპერატორი:

$$\mathcal{P}:=(-2^{-1} I+\widetilde{\mathcal{K}}_1)-\mathcal{N}_2 \mathcal{D}_2^{-1} \mathcal{H}_1. \tag{75}$$

მტკიცდება, რომ

$$\mathcal{P}: C^{1, \beta}(S) \rightarrow C^{1, \beta}(S), \tag{76}$$

არის შებრუნებადი ნულოვანი რიგის ფსევდოდიფერენციალური ოპერატორი. (76) ოპერატორის შებრუნებადობის ძალით დგინდება შემდეგი თანაფარდობები:

$$g_1=\mathcal{P}^{-1} F-\mathcal{P}^{-1} \mathcal{N}_2 \mathcal{D}_2^{-1} f, \tag{77}$$

$$g_2=\mathcal{D}_2^{-1} \mathcal{H}_1 \mathcal{P}^{-1} F-\mathcal{D}_2^{-1} \mathcal{H}_1 \mathcal{P}^{-1} \mathcal{N}_2 \mathcal{D}_2^{-1} f-\mathcal{D}_2^{-1} f. \tag{78}$$

და მტკიცდება არსებობის შემდეგი დებულება.

თეორემა 11. თუ $S \in C^{2, \alpha}$, $0<\beta<\alpha \leq 1$, და სრულდება (68) პირობები, მაშინ ძირითად საკონტაქტო (65)-(67) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი

$$\left(u_1, u_2\right) \in\left[C^2\left(\Omega_1\right) \cap C^{1, \beta}\left(\overline{\Omega}_1\right)\right] \times\left[C^2\left(\Omega_2\right) \cap C^{1, \beta}\left(\overline{\Omega}_2\right) \cap Z\left(\Omega_2\right)\right]$$

და u_1 და u_2 წარმოდგენადია (69)-(70) ფორმულებით, სადაც g_1 და g_2 სიმკვრივეები მოცემულია (77)-(78) ტოლობებით.

მართებულია აგრეთვე ამ თეორემის განზოგადებული ვერსია სობოლევის სივრცეების შემთხვევაში.

თეორემა 12. თუ შესრულებულია პირობები

$$f \in B_{p, p}^{1-1 / p}(S), \quad F \in B_{p, p}^{-1 / p}(S), \quad 1<p<\infty, \tag{79}$$

მაშინ (65)-(67) ამოცანას გააჩნია ერთადერთი განზოგადებული ამონახსნი

$$\left(u_1, u_2\right) \in W_p^1\left(\Omega_1\right) \times\left(W_{p, l o c}^1\left(\Omega_2\right) \cap Z\left(\Omega_2\right)\right) \tag{80}$$

და u_1 და u_2 ფუნქციები წარმოიდგინება (69)-(70) ფორმულებით, სადაც g_1 და g_2 სიმკვრივეები მოცემულია (77)-(78) ტოლობებით. ამასთან

$$\|u_1\|_{W_p^1(\Omega_1)} \leq C_1 \left(\|f\|_{B_{p,p}^{1-1/p}(S)} + \|F\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S)}\right), \tag{81}$$

$$\|u_2\|_{W_p^1(\Omega_2 \cap B(R))} \leq C_2(R) \left(\|f\|_{B_{p,p}^{1-1/p}(S)} + \|F\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S)}\right), \tag{82}$$

სადაც C_1 დადებითი მუდმივია, R ნებისმიერი ნამდვილი დადებითი რიცხვია, ისეთი რომ $\overline{\Omega}_1 \subset B(R)$ და $C_2(R)$ არის R-ზე დამოკიდებული მუდმივი.

შერეული საკონტაქტო ამოცანები.

ვთქვათ, მთელი $\mathbb{R}^3$ სივრცე კვლავ გაყოფილია ორ ნაწილად რაიმე გლუვი შეკრული S ზედაპირით, რომელიც თავის მხრივ შედგება ორი S_T და S_C ზედაპირისგან: $S = \overline{S}_T \cup \overline{S}_C$, $S_T \cap S_C = \varnothing$. ვიგულისხმოთ სიმარტივისთვის, რომ S_T და S_C ზედაპირები და $\ell = \partial S_T = \partial S_c$ წირი C^∞ სიგლუვისაა.

დავსვათ შემდეგი შერეული საკონტაქტო ამოცანა $(\mathrm{M-N.C})$: ვიპოვოთ ფუნქციები $u_1 \in W_p^1(\Omega_1)$, $u_2 \in W_{p,loc}^1(\Omega_2) \cap Z(\Omega_2)$, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჰელმჰოლცის ერთგვაროვან განტოლებებს დისტრიბუციული აზრით

$$\left(\Delta + \rho_1 \omega^2\right) u_1 = 0 \quad \Omega_1\text{-ში}, \qquad \left(\Delta + \rho_2 \omega^2\right) u_2 = 0 \quad \Omega_2\text{-ში}, \tag{83}$$

და შერეულ საკონტაქტო პირობებს S ზედაპირზე:

$$\{u_1\}^+ - \{u_2\}^- = f_1 \qquad S_T\text{-ზე}, \tag{84}$$

$$\{\partial_n u_1\}^+ - \{\partial_n u_2\}^- = F_1 \qquad S_T\text{-ზე}, \tag{85}$$

$$\{\partial_n u_1\}^+ = F^{(+)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{86}$$

$$\{\partial_n u_2\}^- = F^{(-)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{87}$$

სადაც

$$f_1 \in B_{p,p}^{1-1/p}(S_T), \quad F_1 \in B_{p,p}^{-1/p}(S_T), \quad F^{(\pm)} \in B_{p,p}^{-1/p}(S_C), \tag{88}$$

ამასთან სრულდება თავსებადობის შემდეგი აუცილებელი პირობა

$$F := \begin{cases} F_1 & S_T\text{-ზე}, \\ F^{(+)} - F^{(-)} & S_C\text{-ზე}, \end{cases} \qquad F \in B_{p,p}^{-1/p}(S). \tag{89}$$

თუ (86) და (87) პირობების ნაცვლად მოცემულია დირიხლეს ტიპის პირობები

$$\{u_1\}^+ = f^{(+)} \quad S_C\text{-ზე}, \qquad \{u_2\}^- = f^{(-)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{90}$$

მაშინ ასეთ შერეულ საკონტაქტო ამოცანას ვუწოდოთ $(\mathrm{M-D.C})$ ამოცანა. ამ შემთხვევაში ვიგულისხმებთ, რომ

$$f^{(\pm)} \in B_{p,p}^{1-1/p}(S_C), \tag{91}$$

$$f := \begin{cases} f_1 & S_T\text{-ზე}, \\ f^{(+)} - f^{(-)} & S_C\text{-ზე}, \end{cases} \qquad f \in B_{p,p}^{1-1/p}(S). \tag{92}$$

დეტალურად განვიხილოთ საკონტაქტო $(\mathrm{M-N.C})$ ამოცანა.

ვთქვათ, $\widetilde{f}_1$ არის f_1 ფუნქციის რაიმე ფიქსირებული გაგრძელება S_T-დან მთელს S ზედაპირზე სიგლუვის კლასის შენარჩუნებით,

$$\widetilde{f}_1 \in B_{p,p}^{1-1/p}(S), \quad r_{S_T}\widetilde{f}_1 = f_1. \tag{93}$$

მაშინ ნებისმიერი გაგრძელება წარმოდგება $f = \widetilde{f}_1 + g$ სახით, სადაც

$$g \in \widetilde{B}_{p,p}^{1-1/p}(S_C). \tag{94}$$

ცხადია, რომ (85)-(87) პირობები ეკვივალენტურია შემდეგი პირობებისა:

$$\{\partial_n u_1\}^+ - \{\partial_n u_2\}^- = F \qquad S\text{-ზე}, \tag{95}$$

$$\{\partial_n u_1\}^+ + \{\partial_n u_2\}^- = F^{(+)} + F^{(-)} \quad S_C\text{-ზე}, \tag{96}$$

სადაც F მოცემულია (89) ფორმულით.

ამასთან ერთად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$\{u_1\}^+ - \{u_2\}^- = \widetilde{f}_1 + g, \tag{97}$$

სადაც g უცნობი ფუნქციაა.

(95) და (97) ტოლობები და ზემოთ მიღებული შედეგები იძლევა მოტივაციას იმისთვის, რომ $(\mathrm{M-N.C})$ ამოცანის ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u_1(x) = V_1(g_1)(x), \qquad x \in \Omega_1, \tag{98}$$

$$u_2(x) = W_2(g_2)(x) + aV_2(g_2)(x), \quad x \in \Omega_2, \tag{99}$$

სადაც

$$g_1 = \mathcal{P}^{-1}F - \mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}(\widetilde{f}_1 + g), \tag{100}$$

$$g_2 = \mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}F - (\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1} + \mathcal{D}_2^{-1})(\widetilde{f}_1 + g), \tag{101}$$

სადაც g აკმაყოფილებს (94) ჩართვას და არის საძიებელი ფუნქცია, ხოლო ცნობილი F და $\widetilde{f}_1$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ (89) და (93) ჩართვებს.

მარტივი შესამოწმებელია, რომ $(\mathrm{M-N.C})$ ამოცანის (83), (84), (95) პირობები სრულდება ავტომატურად, ხოლო დარჩენილი (96) პირობა იძლევა შემდეგ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებას საძიებელი g ფუნქციის მიმართ:

$$(-2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}_1)g_1 + [\mathcal{L}_2 + a(2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}_2)]g_2 = F^{(+)} + F^{(-)} \quad S_C\text{-ზე}. \tag{102}$$

თუ გავითვალისწინებთ (100) და (101) თანაფარდობებს, (102) შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned} & r_{S_C}\{-(-2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}_1)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1} - \\ & \quad - [\mathcal{L}_2 + a(2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}_2)]\mathcal{D}_2^{-1}\big(\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1} + I\big)\}g = \Psi \quad S_C\text{-ზე}, \end{aligned} \tag{103}$$

სადაც

$$\begin{aligned} \Psi = {} & F^{(+)} + F^{(-)} - r_{S_C}\{(-2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}_1)(\mathcal{P}^{-1}F - \mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}\widetilde{f}_1) + \\ & + [\mathcal{L}_2 + a(2^{-1}I + \widetilde{\mathcal{K}}_2)]\big(\mathcal{D}_2^{-1}\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}F - \\ & - \mathcal{D}_2^{-1}(\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1} + I)\widetilde{f}_1\big) \in B_{p,p}^{-1/p}(S). \end{aligned} \tag{104}$$

შემოვიღოთ $\mathcal{Q}$ ოპერატორი

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} := &-(-2^{-1}I+\widetilde{\mathcal{K}}_1)\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}- \\ &-[\mathcal{L}_2+a(2^{-1}I+\widetilde{\mathcal{K}}_2)]\mathcal{D}_2^{-1}\left(\mathcal{H}_1\mathcal{P}^{-1}\mathcal{N}_2\mathcal{D}_2^{-1}+I\right).\end{aligned} \tag{105}$$

$\mathcal{Q}$ ოპერატორს აქვს ასახვის შემდეგი თვისებები:

$$r_{S_c}\mathcal{Q}:\widetilde{H}_p^s(S_C)\to H_p^{s-1}(S_C),\qquad \left[\widetilde{B}_{p,q}^s(S_C)\to B_{p,q}^s(S_C)\right], \tag{106}$$

$$s\in\mathbb{R},\quad 1<p<\infty,\quad 1\le q\le\infty. \tag{107}$$

მტკიცდება, რომ $\mathcal{Q}$ ოპერატორის მთავარი ერთგვაროვანი სიმბოლო დადებითია: $\mathfrak{S}\left(\mathcal{Q};x,\xi\right)=2\mathfrak{S}\left(\mathcal{L}_2;x,\xi\right)=|\xi|>0,\quad \xi\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ და თუ სრულდება (42) უტოლობები, მაშინ (106) ოპერატორები შებრუნებადია. ამ შედეგს მივყავართ არსებობის შემდეგ დებულებამდე.

თეორემა 13. თუ სრულდება (88), (89) პირობები და $\frac{4}{3}<p<4$, მაშინ შერეულ საკონტაქტო ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი

$$(u_1,u_2)\in W_p^1\left(\Omega_1\right)\times\left[W_{p,loc}^1\left(\Omega_2\right)\cap Z\left(\Omega_2\right)\right],$$

რომელიც წარმოიდგინება (98)-(101) ფორმულებით, სადაც $g\in\widetilde{B}_{p,p}^{1-1/p}\left(S_C\right)$ არის ცალსახად ამოხსნადი (103) ფსევდოდიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. ამასთან

$$\begin{aligned}\|u_1\|_{W_p^1(\Omega_1)}\le C_1&\Big(\|f_1\|_{B_{p,p}^{1-1/p}(S_T)}+\|F_1\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_T)}\\ &+\left\|F^{(+)}\right\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_c)}+\left\|F^{(-)}\right\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_c)}\Big),\end{aligned} \tag{108}$$

$$\begin{aligned}\|u_2\|_{W_p^1(\Omega_2\cap B(R))}\le C\left(R\right)&\Big(\|f_1\|_{B_{p,p}^{1-1/p}(S_T)}+\|F_1\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_T)}\\ &+\left\|F^{(+)}\right\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_c)}+\left\|F^{(-)}\right\|_{B_{p,p}^{-1/p}(S_c)}\Big),\end{aligned} \tag{109}$$

სადაც C_1 დადებითი მუდმივია, R ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია, ისეთი რომ $\overline{\Omega}_1\subset B\left(R\right)$ და $C_2\left(R\right)$ არის R დამოკიდებული მუდმივი.

§5-ში განხილულია პირდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების მეთოდის გამოყენებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ ჰელმჰოლცის განტოლების გარე სასაზღვრო ამოცანებისთვის კლასიკური მიდგომა არ გამოდგება რეზონანსული სიხშირეების შემთხვევაში და მოითხოვს მოდიფიკაციას, რაც დეტალურადაა გაანალიზებული დისერტაციაში.

თავი II: ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი შედგება სამი პარაგრაფისაგან, რომლებშიც დაფუძნებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი სხვადასხვა ამოცანებისათვის.

კერძოდ, მე-6 პარაგრაფში აღწერილია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის ძირითადი კონცეფციები და დეტალურადაა გადმოცემული ბიბლიოგრაფიული და ისტორიული ცნობები.

მე-7 პარაგრაფში დაფუძნებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანებისათვის, აგრეთვე, ძირითადი და შერეული საკონტაქტო ამოცანებისათვის ჰელმჰოლცის განტოლების შემთხვევაში. ამ შედეგების ბაზაზე დაფუძნებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებისათვის, რაც დისერტაციის ერთ-ერთ უმთავრეს შედეგს წარმოადგენს და რომელიც სამეცნიერო ლიტერატურაში არ ყოფილა განხილული.

ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის

ამონახსნის არსებობისა და მათი შეფასების შესახებ დისერტაციის პირველ თავში მიღებული შედეგების გამოყენებით ნაჩვენებია, რომ, ფაქტობრივად, სასაზღვრო ამოცანების მიახლოებითი ამონახსნების აგება დაიყვანება მოცემული სასაზღვრო ფუნქციების აპროქსიმაციაზე გარკვეულ ფუნქციათა სრულ (მკვრივ) სისტემაში. როგორც კვლევამ აჩვენა, განსხვავებულ ამოცანებს განსხვავებული სტრუქტურის სრული სისტემა შეესაბამება.

წინასწარ დამტკიცებულია რამდენიმე დამხმარე დებულება.

ვთქვათ, Ω^+ სასრული დიამეტრია არეა და $\Omega^- = \mathbb{R}^3 \backslash \overline{\Omega^+}$. ვიგულისხმოთ, რომ $S = \partial\Omega^+ = \partial\Omega^-$ არის მარტივად ბმული გლუვი ზედაპირი, $S \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$.

ვთქვათ, S_i არის რაიმე მარტივად ბმული შეკრული (ლიპშიცის) ზედაპირი, რომელიც მთლიანად მდებარეობს S ზედაპირის შიგნით: $S_i \subset \Omega^+$. S_i ზედაპირით შემოსაზღვრული არე აღვნიშნოთ Ω_i^+ სიმბოლოთი. ცხადია, $\overline{\Omega_i^+} \subset \Omega^+$.

ვთქვათ, S_e არის რაიმე შეკრული (ლიპშიცის) ზედაპირი, რომელიც თავის შიგნით მოიცავს S ზედაპირს, $S_e \subset \Omega^-$. S_e ზედაპირის გარე არე აღვნიშნოთ Ω_e^--ით, $\overline{\Omega_e^-} \subset \Omega^-$.

განვიხილოთ ფუნქციათა შემდეგი სიმრავლე S-ზე:

$$\varphi_k(x) = [B(y, \partial y)\Gamma(x - y, \omega)]_{y=y^{(k)}}, \quad y^{(k)} \in S_i, \quad x \in S, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad (110)$$

სადაც $\Gamma(x - y, \omega)$ ჰელმჰოლცის განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნია, $\{y^{(k)}\}^\infty$ არის თვლადი ყველგან მკვრივი სიმრავლე S_i-ზე, $B\,(y, \partial y)$ არის რობინის ტიპის სასაზღვრო ოპერატორი,

$$B\,(y, \partial y) := \partial_{n(y)} + a, \quad y \in S_i, \quad a = a_1 + ia_2, \quad a_1,\ a_2 \in \mathbb{R},$$

$n\,(y)$ არის S_i ზედაპირის მიმართ გარე ნორმალის ორტი $y \in S_i$ წერტილში. მტკიცდება შემდეგი დებულებები.

ლემა 14. ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_k\,(x)\}_{k=1}^\infty$ ყველგან მკვრივია (სრულია) $\mathrm{L}_2\,(S)$ სივრცეში.

ლემა 15. ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_k\,(x)\}_{k=1}^\infty$ წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

ლემა 16. ფუნქციათა სისტემა $\{\varphi_k\,(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ყველგან მკვრივია $B^s_{p,p}(S)$ სივრცეში, $1<p<\infty$, $s<1$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ნებისმიერ $f\in B^s_{p,p}(S)$, $1<p<\infty$, $s<1$, ფუნქციას შეგვიძლია მივუახლოვდეთ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ფუნქციების წრფივი კომბინაციით ნებისმიერი სიზუსტით, ე.ი., ნებისმიერი ε დადებითი რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი C_k, $k=1,2,3,\cdots,N$, მუდმივები, რომ

$$f(x)\cong\sum_{k=1}^{N}C_k\,\varphi_k(x),\ \ x\in S,\qquad \Big\|f-\sum_{k=1}^{N}C_k\,\varphi_k\Big\|_{B^s_{p,p}(S)}<\varepsilon.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$u^{(N)}(x)=\sum_{k=1}^{N}C_k\,\varphi_k(x),\ \ x\in\Omega^- \tag{111}$$

არის დირიხლეს ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი $W^{s+\frac{1}{p}}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega^-)\cap Z(\Omega^-)$ სივრცეში.

სრულიად ანალოგიურად, ნეიმანის ამოცანისთვის მიახლობითი ალგორითმის ასაგებად განვიხილოთ ფუნქციათა სისტემა S ზედაპირზე

$$\psi_k\,(x)=\partial_{n(x)}\,\varphi_k\,(x)\,,\quad x\in S,\quad k=1,2,\ldots, \tag{112}$$

სადაც $\varphi_k\,(x)$ ფუნქციები განსაზღვრულია (110) ტოლობით და $n\,(x)$ არის S ზედაპირის გარე ნორმალის ორტი $x\in S$ წერტილში.

ლემა 17. ფუნქციათა $\{\psi_k\,(x)\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა მკვრივია $L_2(S)$ სივრცეში.

ლემა 18. ფუნქციათა სისტემა $\{\psi_k\}$ მკვრივია $B^s_{p,p}\,(S)$ სივრცეში, $1<p<\infty$, $s\le 0$.

ლემა 19. ფუნქციათა სისტემა $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

სრულიად ანალოგიურად, რობინის შიგა ამოცანისთვის მიახლობითი ალგორითმის ასაგებად განვიხილოთ ფუნქციათა სისტემა S ზედაპირზე:

$$\mathcal{X}_j\,(x)=\left[B\,(x,\partial_x)\,\Gamma\,(x-z,\ \omega)\right]_{z=z^{(j)}},\qquad j=1,1,3,\ldots, \tag{113}$$

სადაც $\left\{z^{(j)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ სიმრავლე ყველგან მკვრივია S_e-ზე,

$$B\,(x,\partial_x)=\partial_{n(x)}+a,\quad x\in S, \tag{114}$$

$n\,(x)$ კვლავ არის S ზედაპირის მიმართ გარე ნორმალის ორტი x წერტილში.

მტკიცდება შემდეგი დებულებები.

ლემა 20. ფუნქციათა სისტემა $\{\mathcal{X}_j\}_{j=1}^{\infty}$ მკვრივია $L_2\,(S)$ სივრცეში და წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

ლემა 21. ფუნქციათა სისტემა $\{\mathcal{X}_j\}_{j=1}^{\infty}$ მკვრივია $B^s_{p,p}\,(S)$ სივრცეში, $1<p<\infty$ და $s\le 0$.

შერეული ამოცანის შემთხვევაში უნდა განვიხილოთ ფუნქციათა შემდეგი სისტემა

$$\mathcal{V}_k(x) = \begin{cases} \varphi_k(x), & x \in S_D, \\ \psi_k(x), & x \in S_N, \end{cases} \tag{115}$$

სადაც $\overline{S_D} \cup \overline{S_N} = S$, φ_k და ψ_k მოცემულია (110) და (112) ტოლობებით.

ლემა 22. ფუნქციათა $\{\mathcal{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$ სისტემა მკვრივია $B_{p,p}^{1-1/p}(S_D) \times B_{p,p}^{-1/p}(S_N)$ სივრცეში, სადაც 4/3<p<4, და წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

ახლა განვიხილოთ ის სისტემა, რომელიც ძირითადი საკონტაქტო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგების დროს გამოიყენება.

ვთქვათ, S არის $\Omega_1 = \Omega^+$ და $\Omega_2 = \Omega^-$ არეების საერთო საკონტაქტო ზედაპირი, ხოლო $S_i \in \Omega^+$ და $S_e \in \Omega^-$ კვლავ იყოს იმავე სტრუქტურის ზედაპირები რაც ზემოთ: S_i მდებარეობს S-ის შიგნით და შემოსაზღვრავს Ω_i^+ არეს, ხოლო S_e მოიცავს S-ს და მისი გარე არე იყოს Ω_e^-.

$\left\{y^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ იყოს ყველგან მკვრივი სიმრავლე S_i-ზე, ხოლო $\left\{z^{(j)}\right\}$ კი - ყველგან მკვრივი სიმრავლე S_e-ზე.

ვთქვათ, Ω_1-ში გვაქვს ჰელმჰოლცის განტოლება

$$\left(\triangle + \rho_1\omega^2\right) u^{(1)} = 0 \quad \Omega_1\text{-ში}, \quad \rho_1 = const > 0,$$

ხოლო Ω_2-ში კი

$$\left(\triangle + \rho_2\omega^2\right) u^{(2)} = 0 \quad \Omega_2\text{-ში}, \quad \rho_2 = const > 0.$$

შესაბამისი ფუნდამენტური ამონახსნებია $\Gamma\left(x, \sqrt{\rho_1}\ \omega\right)$ და $\Gamma\left(x, \sqrt{\rho_2}\ \omega\right)$. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\gamma^{(1)}(x,\ y) = \Gamma\left(x - y, \sqrt{\rho_1}\ \omega\right), \quad \gamma^{(2)}(x,\ y) = \Gamma\left(x - y, \sqrt{\rho_2}\ \omega\right), \tag{116}$$

$$\gamma_j^{(1)}(x) = \Gamma\left(x - z^{(j)}, \sqrt{\rho_1}\ \omega\right), \quad z^{(j)} \in S_e, \tag{117}$$

$$\gamma_k^{(2)}(x) = \Gamma\left(x - y^{(k)}, \sqrt{\rho_2}\ \omega\right), \quad y^{(k)} \in S_i, \tag{118}$$

$$\varphi_k^{(2)}(x) = [(\partial_{n(y)} + a)\gamma^{(2)}(x, y)]_{y=y^{(k)}}, \quad y^{(k)} \in S_i. \tag{119}$$

შევადგინოთ შემდეგი ვექტორ-ფუნქციების სისტემა

$$\Psi_j(x) = [\gamma_j^{(1)}(x),\ \partial_n\gamma_j^{(1)}(x)], \quad x \in S, \tag{120}$$

$$\Phi_k(x) = [\varphi_k^{(2)}(x),\ \partial_{n(x)}\varphi_k^{(2)}(x)], \quad x \in S. \tag{121}$$

მტკიცდება შემდეგი დებულება.

ლემა 23. ვექტორ-ფუნქციათა სისტემა $\{\Psi_j(x), \Phi_k(x)\}_{j,\ k=1}^{\infty}$, $x \in S$, მკვრივია (სრულია) $B_{p,p}^{1-1/p}(S) \times B_{p,p}^{-1/p}(S)$, $1 < p < \infty$, სივრცეში და წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

ახლა განვიხილოთ ის სისტემა, რომლითაც ხდება იმ შერეული საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნის მიახლოება, რომელიც, როგორც კერძო შემთხვევას, მოიცავს ბზარისა და ეკრანის ტიპის ამოცანებს.

ამ ტიპის სისტემის აგების მოტივაციას იძლევა შერეული ამოცანის გადაწერა შემდეგი ეკვივალენტური სახით:

$$
\begin{aligned}
\left(\triangle+\rho_1\omega^2\right)u_1(y)&=0, && x\in\Omega^+,\\
\left(\triangle+\rho_2\omega^2\right)u_2(y)&=0, && x\in\Omega^-,\\
\{\partial_n u_1\}^+-\{\partial_n u_2\}^-&=F && S\text{-ზე},\\
\{\partial_n u_1\}^++\{\partial_n u_2\}^-&=F^++F^- && S_C\text{-ზე},\\
\{u_1\}^+-\{u_2\}^-&=f_1 && S_T\text{-ზე},
\end{aligned}
\tag{122}
$$

სადაც $u_1\in H_p^1(\Omega^+)$, $u_2\in H_{p,\mathrm{loc}}^1(\Omega^-)\cap Z(\Omega^-)$,

$$
F=\begin{cases}F^{(+)}-F^{(-)} & S_C\text{-ზე},\\ F_1 & S_C\text{-ზე},\end{cases}\qquad F\in B_{p,p}^{-1/p}(S),
$$

$$
F^{(+)},\;\; F^{(-)}\in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S_C),\;\; f_1\in B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S_T),\;\; F_1\in B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S_T).
$$

მოტივაციის დაფუძნებაა შემდეგი ფაქტი. თუ შერეული (122) საკონტაქტო ამოცანის მიახლოებით ამონახსნს ვეძებთ შემდეგი სახით

$$
u_1(x)=\sum_{j=1}^{N}a_j\gamma_j^{(1)}(x),\quad x\in\Omega^+,\quad u_2(x)=\sum_{k=1}^{M}b_k\varphi_k^{(2)}(x),\quad x\in\Omega^-,
$$

მაშინ საჭიროა დაკმაყოფილდეს შემდეგი მიახლოებითი ტოლობები

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N}a_j\,\partial_{n(x)}\gamma_j^{(1)}(x)-\sum_{k=1}^{M}b_k\,\partial_{n(x)}\varphi_k^{(2)}(x\;\;)&\approx F && S\text{-ზე},\\
\sum_{j=1}^{N}a_j\,\partial_{n(x)}\gamma_j^{(1)}(x)+\sum_{k=1}^{M}b_k\,\partial_{n(x)}\varphi_k^{(2)}(x\;\;)&\approx F^++F^- && S_C\text{-ზე},\\
\sum_{j=1}^{N}a_j\gamma_j^{(1)}(x)-\sum_{k=1}^{M}b_k\varphi_k^{(2)}(x)&\approx f_1 && S_T\text{-ზე},
\end{aligned}
$$

ანუ

$$
\sum_{j=1}^{N}a_j\begin{bmatrix} r_S\,\partial_{n(x)}\gamma_j^{(1)}(x)\\ r_{S_C}\,\partial_{n(x)}\gamma_j^{(1)}(x)\\ r_{S_T}\,\gamma_j^{(1)}(x)\end{bmatrix}-\sum_{k=1}^{M}b_k\begin{bmatrix} r_S\,\partial_{n(x)}\varphi_k^{(2)}(x)\\ -r_{S_C}\,\partial_{n(x)}\varphi_k^{(2)}(x)\\ r_{S_T}\,\varphi_k^{(2)}(x)\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}F\\ F^++F^-\\ f_1\end{bmatrix}.
$$

ეს მოსაზრება გვაძლევს მოტივაციას განვიხილოთ ვექტორ ფუნქციათა შემდეგის სისტემა

$$
P_j(x)=\left[r_S\frac{\partial\gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)},\quad r_{S_C}\frac{\partial\gamma_j^{(1)}(x)}{\partial n(x)},\quad r_{S_T}\gamma_j^{(1)}(x)\right]^\top,\quad j=1,2,\ldots,\tag{123}
$$

$$
Q_k(x)=\left[r_S\frac{\partial\varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)},\quad r_{S_C}\frac{\partial\varphi_k^{(2)}(x)}{\partial n(x)},\quad r_{S_T}\varphi_k^{(2)}(x)\right]^\top,\quad j=1,2,\ldots,\tag{124}
$$

სადაც $\gamma_j^{(1)}(x)$ და $\varphi_k^{(2)}(x)$ განსაზღვრულია (117)-(119) ტოლობებით.

ლემა 24. ვექტორ ფუნქციათა სისტემა $\{P_j(x), Q_k(x)\}_{j,\ k=1}^{\infty}$ სრულია $\mathbb{H} \equiv B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S) \times B_{p,p}^{-\frac{1}{p}}(S_C) \times B_{p,p}^{1-\frac{1}{p}}(S_T)$ სივრცეში, $\frac{4}{3} < p < 4$, და წრფივად დამოუკიდებელია S-ზე.

ამ ლემის ძალით, შეგვიძლია ნებისმიერი სიზუსტით მივუახლოვდეთ F, $F^+ + F^-$, და f_1 ფუნქციებს, რაც იძლევა საშუალებას ავაგოთ შერეული საკონტაქტო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი.

რადგანაც ბზარის ტიპის ამოცანა არის შერეული საკონტაქტო ამოცანის კერძო შემთხვევა, როდესაც Ω^+ და Ω^- არეებში გვაქვს ერთი და იგივე ჰელმჰოლცის განტოლება და საკონტაქტო პირობები S_T-ზე ერთგვაროვანია, ამიტომ ფაქტობრივად, ჩვენ გვაქვს ალგორითმი ბზარის და ეკრანის ტიპის ამოცანებისათვისაც. ფაქტობრივად, (122) ამოცანაში უნდა ვიგულისხმოთ, რომ $\rho_1 = \rho_2 = 1$, $F_1 = 0$ და $f_1 = 0$ S_T-ზე, დანარჩენი პირობები იგივე რჩება.

ამ თეორიული კვლევის მნიშვნელობა ის არის, რომ სასაზღვრო ამოცანები დავიყვანეთ მოცემულ სრულ სისტემაში ფუნქციათა აპროქსიმაციის საკითხზე. ცხადია, ამ აპროქსიმაციის რიცხვითი რეალიზაცია დაკავშირებულია კვლავ არსებით სირთულეებთან, რაც ცალკე კვლევის საგანია.

მე-8 პარაგრაფში ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი დაფუძნებულია დრეკადობის კლასიკური თეორიის გადაადგილების, ძაბვის და შერეული ტიპის ამოცანებისათვის ანიზოტროპული სხეულების შემთხვევაში.

ბოლოს, დამატება A-ში მოყვანილია გახსნილ (არაშეკრული) მრავალსახეობაზე განსაზღვრულ ფსევდოდიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის საკითხები, რომლებიც არსებითად გამოიყენება შერეული, ეკრანის და ბზარის ტიპის სასაზღვრო ამოცანების გამოსაკვლევად.

დამატება B-ში მოცემულია რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები ცხრილების სახით.

დასკვნა

გელა მანელიძის სადისერტაციო ნაშრომი ეძღვნება მათემატიკური ფიზიკის სტატიკის და მდგრადი რხევის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო-საკონტაქტო სამგანზომილებიანი ამოცანების თეორიულ გამოკვლევას და მიხლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგების პრობლემებს. კერძოდ, ნაშრომის ძირითადი მიზანია სხვადასხვა ტიპის სასაზღვრო და საკონტაქტო ამოცანების გაანალიზება თეორიულ და პრაქტიკულ ასპექტებში ჰელმჰოლცის განტოლებისა და დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისათვის.

ჰელმჰოლცის განტოლება გვხვდება აკუსტიკური და ელექტრომაგნიტური ტალღების გავრცელების მათემატიკურ მოდელებში და შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას უაღრესად დიდი მნიშვნელობა აქვს როგორც ტალღათა გავრცელების პირდაპირ ამოცანებში, ისე შებრუნებულ ამოცანებში. ტალღების გავრცელების ეს მოდელები ფართოდ გამოიყენება საინჟინრო ელექტრონიკაში, ბიოსამედიცინო აპარატურაში, ფიზიკური გამზომი აპარატურის წარმოებაში, რადარულ სისტემებში, ანტენებში და სხვა.

დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემა მყარი დეფორმადი სხეულების თეორიაში ერთ-ერთ ძირითად მათემატიკურ მოდელს წარმოადგენს. ჩვენი განხილვის ძირითადი ობიექტი არის ანიზოტროპული დრეკადი სხეულების მოდელის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებები, რომელთაც უდიდესი გამოყენება აქვთ ინჟინერიაში, კომპოზიტური მასალების თეორიაში, მასალათა გამძლეობის ამოცანებში და სხვა.

ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის პოტენციალთა მეთოდისა და რელიხ-ვეკუას ლემის გამოყენებით ნაშრომში დამტკიცებულია დირიხლეს, ნეიმანის, რობინის და შერეული გარე სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების არსებობის და ერთადერთობის თეორემები სხვადასხვა ფუნქციურ სივრცეებში და დადგენილია ამონახსნების შეფასებები იმავე ფუნქციურ სივრცეებში სასაზღვრო და საკონტაქტო ზედაპირებზე მოცემული ფუნქციების ნორმების საშუალებით. არსებითი მნიშვნელობა აქვს იმ ფაქტს, რომ ყველა გარე სასაზღვრო ამოცანა ჰელმოლცის განტოლებისათვის დაყვანილია ცალსახად ამოხსნად ეკვივალენტურ ინტეგრალურ (ფსევდოდიფერენციალურ) განტოლებაზე. არსებითი აღნიშვნის ღირსია ის ფაქტი, რომ შესწავლილია უსასრულო არეზე გავრცელებული ნიუტონის მოცულობითი პოტენციალის ყოფაქცევა უსასრულობის მიდამოში, როდესაც შესაბამისი სიმკვრივის საყრდენი არ არის კომპაქტური. კერძოდ, დადგენილია საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფენ ზომერფელდის გამოსხივების პირობას მოცულობითი პოტენციალისათვის. ამავე დროს, განხილულია პიდაპირი სასაზღვრო ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებასთან დაკავშირებული ზოგიერთი საკითხი. კერძოდ, ნაჩვენებია, რომ კლასიკური მიდგომა არ გამოდგება რეზონანსული სიხშირეების შემთხვევაში და მოითხოვს სპეციალურ მოდიფიკაციას.

მიღებული შედეგები არსებითაა გამოყენებული ბზარის და ეკრანის ტიპის სასაზღვრო ამოცანების და შერეული ტრანსმისიის ამოცანების გამოსაკვლევად უბნობრივად ერთგვაროვანი სხეულებისათვის. დადგენილია

ამ ამოცანების ცალსახად ამოხსნადობა, პოტენციალების წრფივი კომბინაციით წარმოდგენადობა, და შესწავლილია მათი სიგლუვე სინგულარობის წირების მიდამოში.

ანალოგიურად, დრეკადობის თეორიის სტატიკის განტოლებათა სისტემისთვის გაანალიზებულია დირიხლეს, ნეიმანის და შერეული ტიპის შიგა სასაზღვრო ამოცანები (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში). შესაბამისი ფუნქციური სივრცეების ნორმებში დადგენილია ამონახსნების შეფასებები სასაზღვრო მონაცემების ნორმების საშუალებით.

მიღებული აპრიორული შეფასებები არსებით როლს თამაშობს დისერტაციაში შემოთავაზებული ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდზე დაფუძნებული მიახლოებითი ამონახსნების მოძებნის ალგორითმების აგებაში. ფაქტობრივად, შემოთავაზებულ ალგორითმებს სასაზღვრო ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნის აგება დაჰყავს სასაზღვრო ფუნქციების აპროქსიმაციაზე ფუნდამენტური ამონახსნების საშუალებით სპეციალურად აგებულ ფუნქციათა სისტემაში.

ერთგვაროვანი და უბნობრივად ერთგვაროვანი მრავალკომპონენტიანი კომპოზიტური სტრუქტურების შემთხვევაში ჰელმჰოლცის განტოლებისათვის დასმული სამგანზომილებიანი ძირითადი და შერეული სასაზღვრო ამოცანებისთვის, აგრეთვე შერეული ტრანსმისიის ტიპის ამოცანებისთვის, რომლებიც მოიცავენ ეკრანისა და ბზარის ტიპის ამოცანებს, დისერტაციაში განვითარებულია და დაფუძნებულია ფუნდამენტური ამონახსნების მეთოდი.

უნდა აღინიშნოს, რომ სამეცნიერო ლიტერატურაში უკანასკნელ პერიოდამდე არ იყო ცნობილი, თუ როგორ შეიძლებოდა ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდის გამოყენება ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებში, რადგან აღნიშულ მეთოდთან დაკავშირებული არსებული მიდგომები არ გამოდგებოდა ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანებისთვის. ეს პრობლემა წარმატებითაა გადაჭრილი სადისერტაციო ნაშრომში. ამ პრობლემის გადაჭრაში არსებითი როლი ითამაშა ეკრანის და ბზარის ტიპის ამოცანების ჩამოყალიბებამ შერეული საკონტაქტო ამოცანების სახით ხელოვნურად შემოტანილ ზედაპირებზე განსაზღვრული დამატებითი ტრანსმისიის პირობებით.

ფუნდამენტურ ამონახსნთა მეთოდი დაფუძნებულია აგეთვე ანიზოტროპული სხეულების დრეკადობის კლასიკური თეორიის გადაადგილების, ძაბვის და შერეული ტიპის სტატიკის ამოცანებისათვის. ყველა ზემოთ ჩამოთვლილი ამოცანისათვის აგებულია ფუნდამენტურ ამონახსნთა სპეციალური სისტემები, რომელთათვისაც მტკიცდება წრფივად დამოუკიდებლობა და სისრულე განსახილველი სასაზღვრო ამოცანის შესაბამის ბუნებრივ ფუნქციურ სივრცეებში (სობოლევ-სლობოდეცკის, ბესელის პოტენციალთა და ბესოვის სივრცეებში).

ნაშრომის აპრობაცია

დისერტაციაში გადმოცემული შედეგები მოხსენებული იყო საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მათემატიკის დეპარტამენტის სემინარებზე. ამასთანავე, აღნიშნული შედეგები ასახულია ავტორის პუბლიკაციებში და მოხსენებულ იქნა საერთაშორისო და ადგილობრივ კონფერენციებზე, რომელთა ნუსხაც თან ერთვის ავტორეფერატს. გარდა ამისა, სადოქტორო

პროგრამის გეგმის შესაბამისად მომზადდა და ჩატარდა თემატური სემინარები და კოლოკვიუმები დისერტაციის ძირითადი შედეგების შესახებ.

მოხსენებები კონფერენციებზე

1. მანელიძე გ., ნატროშვილი დ. ინტეგრალურ განტოლებათა პირდაპირი მეთოდი აკუსტიკური ამოცანებისათვის უსასრულო არეებში. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის მე-6 ყოველწლიური საერთაშორისო კონფერენცია. (ბათუმი, 12-16 ივლისი, 2015).
2. მანელიძე გ. ჰელმჰოლცის განტოლების შესაბამისი ნიუტონის მოცულობითი პოტენციალი უსასრულო არეებში. საქართველოს მათემატიკოსთა კავშირის მე-5 ყოველწლიური საერთაშორისო კონფერენცია. (ბათუმი, 8-12 სექტემბერი, 2014).
3. Chikashua R., Manelidze G., Vashakmadze T. To problem of reliable calculation of coefficients of secular equation by special functions. 11th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2013 ICNAAM 2013, Rhodes, Greece, 21–27 September 2013.
http://scitation.aip.org/content/aip/proceeding/aipcp/10.1063/1.4825715
4. Manelidze G., Papukashvili A., Sharikadze M. On approximate solution of a system of singular integral equations. საქრთველოს მექანიკოსთა კავშირის მესამე ყოველწლიური კონფერენციია. (თბილისი, 9-12 დეკემბერი, 2012 წელი)
http://www.viam.science.tsu.ge/others/gnctam/annual3.htm
http://www.viam.science.tsu.ge/others/gnctam/GeoMech3/abs.pdf
5. გორდეზიანი დ., დავითაშვილი თ., მანელიძე გ., პაპუკაშვილი ა., შარიქაძე მ. ბზარებით შესუსტებული შედგენილი სხეულებისათვის დრეკადობის თეორიის ანტიბრტყელი ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის მეთოდების შესახებ. საქრთველოს მექანიკოსთა კავშირის მეორე ყოველწლიური კონფერენცია. (თბილისი, 15-17 დეკემბერი, 2011 წელი)
6. Manelidze G. On the Approximate solution of one class of integro-differential equation. International conference continuum mechanics and related problems of analysis. (Tbilisi, September 9–14, 2011).
http://rmi.tsu.ge/muskhelishvili120/Files/Conference2011/Internet.pdf

გამოქვეყნებული ნაშრომები

1) Manelidze G., Natroshvili D. Method of fundamental solutions for transmission problems, Bulletin of TICMI, Vol. 19, No. 2, 2015, 21-39.
2) Manelidze G., Natroshvili D. Direct boundary integral equations method for acoustic problems in unbounded domains, Bulletin of TICMI, Vol. 19, No. 1, 2015, 3-25.
3) Manelidze G. Newtonian volume potential for the Helmholtz equation in unbounded domains, Proceedings of I. Vekua Institute of Applied Mathematics, Vol. 64, 2014, 41-47.

მადლობას გუხდი ჩემს სამეცნიერო ხელმძღვანელებს

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფესორ დავით ნატროშვილს,

და

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორს, პროფესორ გივი ბერიკელაშვილს

მნიშვნელოვანი სამეცნიერო რჩევებისა და გამოჩენილი გულისხმიერებისათვის

SUMMARY

The present PhD Thesis of Gela Manelidze **"Application of Fundamental Solutions Method to the static and steady state oscillation problems of Mathematical Physics"** is devoted to the theoretical investigation of different type boundary-transmission problems for partial differential equations of Mathematical Physics and construction of algorithms of approximate solutions. In particular, the main goal of the investigation is to analyze theoretical and practical aspects of boundary and boundary-contact problems for the Helmholtz equation and the system of differential equations of statics of the theory of elasticity.

The Helmholtz equation encounters in the mathematical models of acoustic and electro-magnetic waves and investigation of the corresponding boundary value problems have a crucial role in the study of direct and inverse wave scattering problems. These models have a wide range of applications in engineering, bio-medicine, physical measuring devices, radar systems, antennas, etc.

The system of statics of the theory of elasticity, treated in the thesis, represents one of the basic models in the theory of deformable solids. In this direction, the basic object of investigation is the system of differential equations corresponding to anisotropic elastic solids, having an essential applications in civil and industrial engineering, theory of composite materials, in the theory of durability, etc.

By the potential method and applying the Rellich-Vekua celebrated lemma, the uniqueness and existence theorems of solutions for the Dirichlet, Neumann, Robin, and mixed exterior boundary value problems for the Helmholtz equation are proved in different function spaces (Sobolev-Slobodetskii, Bessel potential and Besov spaces). The estimates of the corresponding norms of solution are established by the appropriate norms of given boundary functions. The most principal thing here is that all the boundary value problems are reduced to the equivalent, uniquely solvable integral (pseudodifferential) equations.

It should be mentioned that a detailed analysis related to the volume Newtonian potentials associated with the Helmholtz equation is given when the domain of integration is unbounded region and the sufficient conditions are found when a volume potential with density having noncompact support belongs to the Sommerfeld class of radiating functions.

Some principal questions related to the application of the so called direct boundary integral equations method to the exterior problems is considered. In particular, it is established that this approach is not applicable for the resonance frequencies and in this case it needs a special modification described in the thesis.

The results obtained are applied to the screen and crack type problems as well as to the mixed transmission problems for piece wise homogeneous structures. The unique solvability of these problems and the representability of solutions by linear combinations of the layer potentials is established. The smoothness properties of solutions near the exceptional curves are studied.

Similar results are formulated for the Dirichlet, Neumann, and mixed type problems for the linear equilibrium equations of anisotropic elasticity in the Sobolev-Slobodetskii, Bessel potential, and Besov spaces. The corresponding estimates of norms of solutions by the appropriate norms of the boundary functions are established.

The above mentioned estimates play a crucial role in construction of algorithms for approximation of solutions by the Fundamental Solutions Method offered in

the thesis. Actually, by this method, the solution procedure of the boundary value problems are reduced to the approximation problem of given boundary functions by means of linear combinations of functions specially constructed by the fundamental solutions.

For the basic and mixed exterior boundary value and mixed boundary-transmission problems, as well as for the screen and crack type problems for the Helmholtz equation, the Fundamental Solutions Method is developed and justified.

It should be mentioned that in the scientific literature the Fundamental Solution Method for the crack type problems has not been treated. This issue is successfully elaborated in the present thesis by reduction of the crack problem to the appropriate mixed transmission problem by introducing an artificial transmission surface where the rigid contact conditions are prescribed.

The Fundamental Solution Method is developed and justified also for the anisotropic elasticity theory for the Dirichlet, Neumann, and mixed boundary value problems of statics in the interior domains.

For all the above mentioned boundary value and transmission problems special systems of functions are constructed by means of the corresponding fundamental solutions which are linearly independent and dense in the appropriate Sobolev-Slobodetskii, Bessel potential, and Besov spaces.