თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
212

ISSN 0376—2637

კიბერნეტიკა • გამოყენებითი მათემატიკა
КИБЕРНЕТИКА • ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
CYBERNETICS • APPLIED MATHEMATICS

2

თბილისი Тбилиси Tbilisi
1980

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
TBILISI UNIVERSITY PRESS

თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
212 V.

კიბერნეტიკა
გამოყენებითი მათემატიკა
CYBERNETICS
APPLIED MATHEMATICS

თბილისი 1980 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т. 212

КИБЕРНЕТИКА
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Тбилиси 1980

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ В КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Т.Г.Гачечиладзе, Т.Н.Мгвделадзе

I. Введение

Для полной динамической характеристики системы обычно задают два набора канонически сопряженных некоммутирующих переменных. Из-за этого принципиально невозможно пользоваться классическим способом построения фазовых функций распределения вероятностей (р.в.) на основе характеристических функций /I/.

Трудности возникают при построении соответствующей теории функций от некоммутирующих переменных и согласовании этой теории с результатами квантовомеханического процесса измерения. Возможность преодоления этих трудностей связана с определенными ограничениями, которые можно ослабить, если, следуя Бартлетту /2/, рассматривать метод фазовых функций как вспомогательное средство для вычисления квантовомеханических средних.

В данной работе фазовые функции р.в. для канонически сопряженных импульса и координаты линейного гармонического осциллятора строятся на основе принципа максимума информационной энтропии (м.и.э.) /3/. При применении этого принципа в нашем случае возникла необходимость инвариантной перенормировки информационной энтропии. Инвариантная мера, применяемая нами при перенормировке, удовлетворяет определенному функциональному уравнению, которое получается исходя из известных свойств симметрии гамильтониана линейного гармонического осциллятора /4/ и идеи Джейнза оценки меры "полного незнания" /5/.

При таком подходе оказалось, что достаточной статистикой в случае осциллятора является его гамильтониан.

Построенные оценки фазовых функций являются каноническими, что позволяет в качестве меры количества информации, получаемого в квантовомеханическом процессе измерения, рассматривать выражение $H_I^{(n)}(p,q) = \ln Z + \lambda \cdot \langle H \rangle$, где Z – обобщенный статистический интеграл, соответствующий каноническому распределению, $\langle H \rangle$ – наблюдаемое значение гамильтониана, а λ – параметр, термодинамически сопряженный гамильтониану.

2. Экстремальные свойства собственных фазовых функций гармонического осциллятора

В работе /6/ были вычислены собственные фазовые функции гармонического осциллятора:

$$f_{mn}(p,q) = 2\cdot\left\{\sum_{j=0}^{\min(m,n)} (-1)^j \cdot \frac{2^{\frac{m+n}{2}-j}\sqrt{m!}\sqrt{n!}}{j!(m-j)!(n-j)!}\left(\frac{2}{\hbar\omega}\right)^{\frac{m+n}{2}-j} \times \right. \tag{I}$$

$$\left. \times\, h^{m-j}(p,q)\cdot h^{*\,n-j}(p,q)\right\}\cdot e^{-\frac{2}{\hbar\omega}\cdot H(p,q)},$$

где $H(p,q)$ – гамильтониан осциллятора, а $h(p,q)\cdot h^{*}(p,q)=$ $=H(p,q)$.

В этом разделе мы докажем экстремальность диагональных фазовых функций $f_{nn}(p,q)$,т.е. покажем возможность построения этих функций на основе принципа м.и.э.

Заметим, что из-за квазивероятностного характера функций $f_{nn}(p,q)$ шенноновская информационная энтропия соответствующих состояний не существует. Поэтому непосредственное применение принципа м.и.э. невозможно. Возникает необходимость изменения уровня начальной информации, что приводит к задаче инвариантной перенормировки информационной энтропии.

Если вся информация о состоянии осциллятора извлекается из измерения энергии $\langle H(p,q)\rangle$ и если в качестве меры начальной информации, как это принято в статистической механике, взять $m(p,q)=1$, то получающаяся функция р.в. /7/ не будет совпадать с $f_{nn}(p,q)$. Если же положить

$$m(p,q)=T_n(p,q)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{2^{2(n-k)}\cdot n!}{[(n-k)!]\cdot k!}\left[\frac{H(p,q)}{\hbar\omega}\right]^{n-k}= \tag{2}$$

$$=(-1)^k L_n\left(\frac{4H(p,q)}{\hbar\omega}\right),$$

где $L_n(z)$ – полином Лагерра, и в качестве статистики опять рассматривать гамильтониан системы, т.е. представить фазовую функцию р.в. в виде:

$$W_n(p,q)=T_n(p,q)\cdot e^{-\lambda_0-\lambda_1 H(p,q)}, \tag{3}$$

где λ_0 и λ_1 – множители Лагранжа, то, как нетрудно убедиться, $W_n(p,q)=f_{nn}(p,q)$. В действительности, обобщенный статистический интеграл

$$Z(\lambda_1)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp\,dq}{2\pi\hbar}\cdot T_n(p,q)\cdot e^{-\lambda_1 H(p,q)}=\frac{1}{\lambda_1\hbar\omega}\cdot\left(\frac{4}{\lambda_1\hbar\omega}-1\right), \qquad (4)$$

Решение уравнения для множителя λ_1

$$\frac{2n+1}{2}\hbar\omega=-\frac{d}{d\lambda_1}\ln Z(\lambda_1) \qquad (5)$$

дает

$$\lambda_1^{(1)}=\frac{2}{\hbar\omega}\;; \qquad \lambda_1^{(2)}=\frac{4(n+1)}{(2n+1)\hbar\omega}\,. \qquad (6)$$

Значение $\lambda_1^{(1)}$ соответствует нашему утверждению. Относительно второго решения, $\lambda_1^{(2)}$, можно сказать следующее. Соответствующая функция р.в. имеет вид:

$$W_n^{(2)}(p,q)=\frac{4(n+1)}{2n+1}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n T_n(p,q)\cdot e^{-\frac{4(n+1)}{2n+1}\cdot\frac{H(p,q)}{\hbar\omega}}\,. \qquad (7)$$

В разложении этой функции по собственным фазовым функциям линейного гармонического осциллятора диагональные элементы таковы:

$$\rho_{\ell\ell}^{(n)}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dp\,dq}{2\pi\hbar}\cdot W_n^{(2)}(p,q)\cdot f_{\ell\ell}^{*}(p,q)= \qquad (8)$$

$$=\frac{2(n+1)}{2n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{\ell}(-1)^{i+j}\frac{n!\,\ell!\,(n+\ell-i-j)!}{i!\,j!\,[(n-i)!]^2[(\ell-j)!]^2}\left[\frac{2(2n+1)}{4n+3}\right]^{n+\ell-i-j+1}$$

Достаточно рассмотреть

$$\rho_{00}^{(n)}=(-1)^n\cdot\frac{4(n+1)}{(4n+3)^{n+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad \text{и} \quad \rho_{11}^{(n)}=(-1)^{n+1}\frac{4(n+1)}{(4n+3)^{n+2}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left[1+4n(2n+1)\right]^2,$$

чтобы убедиться в непригодности $\lambda_1^{(2)}$.

Известно /I/, что распределения в q- и p- пространствах, вычисленные на основе $W_n(p,q)$, совпадают соответстственно с $|\psi_n(q)|^2$ и $|\psi_n(p)|^2$.

Докажем экстремальность функции р.в. в q - пространстве в предположении, что инвариантная мера Джейнза в этом случае равна $H_n^2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot q\right)$ ($H_n(z)$ - полиномы Эрмита) и достаточной статистикой является q^2. Таким образом

$$F_n(q) = H_n^2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,q\right)\cdot e^{-\lambda_0-\lambda_1 q^2} \tag{9}$$

Обобщенный статистический интеграл

$$Z(\lambda_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}}}\cdot H_n^2\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\cdot q\right)\cdot e^{-\lambda_1 q^2} = n!\,2^{n-\frac{1}{2}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\cdot\lambda_1}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Решение уравнения для λ_1

$$\langle q^2\rangle_n = -\frac{d}{d\lambda_1}\ln Z(\lambda_1) \tag{11}$$

дает

$$\lambda_1 = \frac{m\omega}{\hbar}. \tag{12}$$

Тем самым доказана экстремальность распределения $|\psi_n(q)|^2$. Аналогично доказывается экстремальность распределения в импульсном пространстве.

3. <u>Мера полного незнания</u>

Согласно Джейнзу /5/ функциональное уравнение, которому удовлетворяет $m(p,q)$, имеет вид:

$$m(p,q) = J^{-1}\cdot m(\hat{G}p, \hat{G}q), \tag{13}$$

где $\hat{G}$ - элемент группы инвариантности меры полного незнания, J - якобиан этого преобразования. Согласно нашему предположению $m(p,q) = T_n(p,q)$. Так как $T_n(p,q)$ фактически является функцией гамильтониана системы, то в качестве группы инвариантности естественно взять группу симметрии гамильтониана квантового линейного гармонического осциллятора /4/. Следовательно,

$$m(p,q)=m(q\sin\tau+p\cos\tau,\ q\cos\tau-p\sin\tau). \tag{I4}$$

Одним из решений этого уравнения, как нетрудно проверить, в действительности является $T_n(p,q)$, что оправдывает представление $f_{\ell\ell}(p,q)$ в виде (3).

4. <u>Информация, получаемая при измерении</u>

Так как функции (I) могут принимать и отрицательные значения (за исключением случая основного состояния, $n=0$), то, как уже отмечалось, определить соответствующую шенноновскую информационную энтропию нельзя. В основном же состоянии

$$H_I^{(0)}(p,q)=1-\ln 2\approx 0{,}3069\,nit; \tag{I5}$$
$$H_I^{(0)}(p)=H_I^{(0)}(q)=\frac{1}{2}(1-\ln 2)\approx 0{,}1534\,nit.$$

Таким образом, в этом случае канонически сопряженные p и q статистически независимы и поэтому q - измерение не содержит никакой информации о p, и наоборот.

Однако доказанное нами экстремальное свойство собственных фазовых функций позволяет вычислить информационную энтропию оценок р.в. на основе принципа м.и.э. при уровне начальной информации, описываемом мерой $T_n(p,q)$, и измерении статистики $f(p,q)$ в виде:

$$H_I(p,q)=\ln Z+\lambda_1\cdot\langle f(p,q)\rangle. \tag{I6}$$

Полученное выражение для информационной энтропии дает возможность утверждать, что эта величина должна быть интерпретирована как относительное количество информации, получаемое при квантовомеханическом процессе измерения $f(p,q)$, а не как информационная энтропия собственного состояния.

Таким образом, для распределения в фазовом пространстве

$$H_I(p,q)=2n+1-\ln 2, \tag{17}$$

а для распределений в q- и p- пространствах

$$H_I^{(n)}(q)=H_I^{(n)}(p)=(n-\tfrac{1}{2})\ln 2+\ln(n!)+\frac{2n+1}{2}. \tag{18}$$

Отметим, что в q- и p- пространствах шенноновская информационная энтропия может быть вычислена. Она соответствует определенному нами относительному количеству информации при $m(p,q)=1$, и поэтому может быть интерпретирована как энтропия собственного состояния системы в q- или p- пространствах. Эта величина отличается от (18) на

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dq}{\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{m\omega}}}\cdot F_n(q)\ln m(q), \tag{19}$$

которая, согласно /6/, не превосходит

$$\frac{2^{1-2E(\frac{n}{2})}}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n!}{[E(\frac{n}{2})!]^2}\cdot\left\{\sqrt{\pi}\cdot e^{4E(\frac{n}{2})}\left[1+\Phi\left(2\sqrt{E(\tfrac{n}{2})}\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\ln\frac{2^{\frac{n}{2}-E(\frac{n}{2})}e^{4E(\frac{n}{2})}\cdot n!}{E(\frac{n}{2})!}+2\sqrt{E(\tfrac{n}{2})}\right\}, \tag{20}$$

где $E(z)$ - целая часть z, $\Phi(\dots)$ - интеграл вероятности.

Поступила 15.I. 1979

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. J.E. Moyal, Proc. Cambr. Phil.Soc., 45, 99, 1949.

2. M.S.Bartlett, Proc. Cambr. Phil. Soc., 41, 71, 1944.

3. E.T.Jaynes, Phys. Rev. 106, 620, 1957.

4. E.L.Hill, J.M.Jauch. Phys. Rev. 57, 641, 1950.

5. E.T. Jaynes, IEEE Trans. Syst. Sci. Cybernetics, SSC-4, N3, 1968.

6. Т.Г.Гачечиладзе, Труды ТГУ, I35, I970.

7. Т.Г.Гачечиладзе, Н.Ф.Хиралла, Труды ТГУ, I60, I975.

თ.გაჩეჩილაძე, ფ.მღვდელაძე

ინფორმაციის რაოდენობის განსაზღვრის შესახებ გაზომვის კვანტურ-მექანიკურ პროცესში

რეზიუმე

ნაშრომში აგებულია წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორის კანონიკურად შეუღლებული იმპულსისა და კოორდინატის განაწილების ფაზური ფუნქციები ინფორმაციული ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპის საფუძველზე.

მიღებული ფუნქციები კანონიკური სახისაა, რაც საშუალებას იძლევა გაზომვის კვანტურ-მექანიკურ პროცესში მიღებული ინფორმაციის ზომად ავირჩიოთ შემდეგი გამოსახულება

$$H_I^{(n)}(p,q)=\ln Z+\lambda\cdot\langle H\rangle,$$

სადაც Z – კანონიკური განაწილების შესაბამისი განზოგადებული ინტეგრალია, $\langle H\rangle$ – ჰამილტონიანის დაკვირვებადი მნიშვნელობა, ხოლო λ – ჰამილტონიანის თერმოდინამიკურად შეუღლებული პარამეტრია.

T.Gacnechiladze, T.Mgvdeladze

ON THE DETERMINATION OF INFORMATION GAIN IN QUANTUM-MECHANICAL MEASUREMENT PROCESS

Summary

The phase space distributions functions of the canonically conjugate momentum and coordinate of a linear harmonic oscillator are constructed on the basis of the principle of informational entropy maximum.

The derived functions have canonical form, permiting to determine the measure of the information gain in quantum-mechanical measurement processes in following form

$$H_I^{(n)}(p,q) = \ln Z + \lambda \cdot \langle H \rangle ,$$

where Z is a generalized statistical integral of canonical distribution, $\langle H \rangle$ observable value of the hamiltonian and λ the thermodynamically conjugate parameter of the hamiltonian.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
212, 1980

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГИЯХ, СУЩЕСТВУЮЩИХ В ФИЗИКЕ И ТЕОРИИ ИНФОРМАЦИИ

Н.В.Бокучава

На современном этапе общественного развития идеи и методы теории информации настолько глубоко проникли во все области научной деятельности человека, что термины "информация" и "количество информации" стали обыденными в различных областях науки, а у многих даже создалось впечатление, что информация является своего рода "неосязаемым понятием". Однако более глубокое и внимательное осмысливание приводит к заключению, что теория информации пользуется некоторыми основными идеями и терминами статистической термодинамики. В связи с этим не случайной является глубокая общность математического аппарата и возникающих затруднений в этих двух научных направлениях.

Вводя логарифмическую меру для дискретных случайных величин, Хартли, опираясь на соображения об аддитивности количества информации и предполагая равновероятность различных исходов опыта, для информационной энтропии получил формулу, аналогичную формуле Больцмана для микроканонического распределения классической механики.

При переходе от дискретной случайной величины к непрерывной аналогия между информационной и физической энтропиями углубляется до того, что логические трудности, возникающие в обоих случаях, носят почти одинаковый характер. Действительно, при переходе от распределения с фиксированной энергией сложной системы к вероятностному ансамблю состояний её частей в фазовом пространстве с координатами q_i и импульсами p_i формула Больцмана $S = \ln \Delta\Gamma(E)$, где $\Delta\Gamma(E)$ - статистический вес или объем, занимаемый в фазовом пространстве системы состояниями с энергией E, переходит в выражение:

$$S = -\int f(q_i, p_i) \ln f(q_i, p_i) \prod_i dq_i \, dp_i, \qquad (I)$$

а информационная энтропия для непрерывных случайных величин принимает вид

$$H(X) = -\int f(x) \ln f(x) dx - \ln \varepsilon, \qquad (2)$$

где ε - шаговый параметр.

Недостаток выражений (I) и (2) заключается в том, что I) они не однозначны, (I) $\to const$ при $T \to 0$, а (2) $\to \infty$ при $\varepsilon \to 0$; 2) не инвариантны (в общем случае) относительно преобразования координат, вследствие чего их непосредственное использование в качестве абсолютной меры энтропии невозможно и нецелесообразно ни в физике, ни в теории информации; 3) в обеих теориях существуют определенные пути преодоления указанных затруднений. Различие этих путей обусловлено различием преследуемых целей рассматриваемых теорий (физики и теории информации).

В теории информации фактором, позволяющим придать количеству информации при непрерывной передаче конечный однозначный смысл, является неизбежное присутствие хотя бы небольшого аддитивного шума, ограничивающего точность достоверного приема сигнала. Подобное ограничение в известной мере равносильно приданию конечного значения шаговому параметру ε, что, в свою очередь, эквивалентно устранению неоднозначности в (2).

Для устранения неинвариантности информационной энтропии при преобразовании координат, в теории информации вводят дополнительно вспомогательную, абсолютно непрерывную меру (не обязательно нормированную на единицу) относительно исходной вероятностной меры.

В классической статистической механике (термодинамике) неоднозначность физической энтропии частично устраняется принципом Нернста, который в планковской трактовке гласит, что при $T=0$ $S=0$, т.е. при абсолютном нуле температуры физическая энтропия системы равна нулю. Полностью же неоднозначность и неинвариантность физической энтропии устраняется при переходе к квантовой статистике (предельным случаем которой при достаточно высоких температурах является классическая статистика) введением безразмерного фазового объема

$d\Gamma = dp_i dq_i / N!(2\pi\hbar)^{3N}$, учитывающего тождественность частиц (N - число частиц в фазовом пространстве, $N!$ - число перестановок для N тождественных частиц, $(2\pi\hbar)^{3N}$ - наименьший фазовый объем, соответствующий N частицам), и заменой интеграла суммой по дискретным квантовым состояниям, что, в свою очередь, автоматически снимает необходимость введения дополнительной меры для устранения неинвариантности физической энтропии относительно преобразования координат.

Из вышеприведенных аналогий и при условии, что основные понятия теории информации первичны, нам предоставляются следующие возможности:

1. Освободиться от излишних физических гипотез и представить статистическую механику с более общей точки зрения.

2. Рассматривать физическую энтропию не только как меру случайности строения системы, но и как меру недостатка данных об этой системе. Действительно, т.к. при изучении некоторой физической системы мы не в состоянии точно определить все параметры, характеризующие состояние рассматриваемой системы (например, мы не можем определить точно положения и скорости всех молекул, образующих систему), то ясно, что мы имеем лишь частичную информацию о детальной структуре системы и, следовательно, энтропию можно рассматривать как общее количество отсутствующей информации о микроскопической структуре системы.

3. Исходя из принципа максимальной информационной энтропии, решить основную задачу статфизики в частности и любой другой статистической теории вообще, заключающуюся в оценке распределения вероятностей при ограничениях определенного типа.

Так, легко показать / I /, что при ограничениях

$$\left.\begin{aligned} \langle T_i(x)\rangle_\ell &= \int T_i(x) f_\ell(x)\,dx \\ \int f_\ell(x)\,dx &= 1 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

информационная энтропия

$$H_\ell(X) = -\int f_\ell(x) \ln f_\ell(x) dx \tag{4}$$

принимает максимальное значение для

$$f_\ell(x) = \exp\left[-\lambda_0^{(\ell)} - \sum_i \lambda_i^{(\ell)} T_i(x)\right], \tag{5}$$

где $f_\ell(x)$ - плотность распределения вероятностей (аналогичное выражение получается для распределения вероятностей в случае дискретных переменных), $i = 1, 2, \ldots,$ - число измеряемых статистик, $\lambda_i^{(\ell)}$ - лагранжевы множители, определяемые из условий (3); ℓ - индекс введен для различения той или иной статистической модели.

Из распределения (5) мы можем, как частные случаи, получить все гиббсовские распределения.

Действительно, при

I. $\forall T_i(x) = 0$, $a \le x \le b$ (под x можем понимать совокупность индексов и координат p_i, q_i) получаем микроканоническое распределение

$$f_\ell(x) = \exp(-\lambda_0^{(\ell)}).$$

2. $T_1(x) = E(x)$, $\forall T_i(x) = 0$, $i = 2, 3, \ldots$ ($E(x)$ - энергия частиц) получаем каноническое распределение

$$f_\ell(x) = \exp\left[-\lambda_0^{(\ell)} - \lambda_1^{(\ell)} E(x)\right].$$

3. $T_1(x) = E(x)$, $T_2(x) = N$ (N - число частиц), $\forall T_i(x) = 0$, $i = 3, 4, \ldots,$ получаем большое каноническое распределение Гиббса

$$f_e(x) = \exp\left[-\lambda_0^{(e)} - \lambda_1^{(e)} E(x) - \lambda_2^{(e)} N\right].$$

Для квантового случая вышеприведенные выражения $f_e(x)$ соответствуют матрицам плотности (статистическим операторам).

Небезынтересно отметить и аналогию между законом сохранения энергии в физике и законом сохранения информации в теории информации, хотя, как отмечает Стратонович / 2 /, закон сохранения информации сложнее закона сохранения энергии в силу имеющегося соотношения $H(x/y) \leq H(x)$ (в теории информации), указывающего на тот факт, что при преобразовании (кодировании) информации количество ее не может возрастать.

Поступила I9.I.1979.

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.В.Бокучава, "Об информационной статистике", Сообщения АН ГССР, 86, № 3, I977.

2. Р.Л.Стратонович, Теория Информации, I975.

ნ.ბოკუჩავა

ფიზიკისა და ინფორმაციის თეორიაში არსებული ზოგიერთი ანალოგიების შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია ფიზიკასა და ინფორმაციის თეორიაში არსებული ანალოგიები. საკითხი და გიბსის ყველა კანონიკური განაწილებების მიღების შესაძლებლობა ინფორმაციული ენტროპიის მაქსიმუმის პრინციპიდან.

N.Bokuchava

ON SOME ANALOGIES IN PHYSICS AND INFORMATION THEORY

Summary

Besides analogics existing in physics and information theory, the possibility of obtaining cannonical distributions based on the principle of maximum of informational entropy is considered in the article.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

ТЕОРИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ И РАЗМЫТЫЕ МНОЖЕСТВА (I)

Т.В.Манджапарашвили

I. Введение.

На данном этапе развития науки общей теории измерения не существует. В связи с этим, нам представляется, что новый подход к этой проблеме, даже в случае, когда логические основы этого подхода не полностью разработаны, может оказаться полезным.

В данной работе мы рассмотрим существенную часть общей теории измерения - теорию физических измерений. Наш подход к этой проблеме основан на понятиях размытого множества, размытого события и размытого процесса.

Неточность измерения и, как следствие, нечеткость описания свойств реальных объектов являются естественными.

Неточность и неопределенность обычно считают статистическими, случайными характеристиками и учитывают при помощи методов теории вероятностей. Однако зачастую источником неточности являются не только случайные события и процессы, но и принципиальная невозможность оперировать точными данными вследствие сложности системы и неточности ограничений.

Одна из наиболее типичных первопричин неопределенности при измерении возникает, когда объекты обладают различными уровнями данного свойства, которое характеризует эти объекты. Описание этого вида неопределенности не сводится к случайным экспериментам, так как представление вероятностей как меры эмпирической частоты в большом числе одинаковых экспериментов может оказаться лишенным смысла. Эта ситуация часто встречается в физических и кибернетических моделях: при попытке описания новых ситуаций в терминах классических понятий, когда используемый язык приводит к неизбежной потере информации о рассматриваемой системе.

По нашему мнению, рассмотрение проблемы целесообразно начать с обзора теории размытых множеств, так как на сегодняшний день имеется множество результатов, рассмотрение которых с единой точки зрения и в единых обозначениях может принести пользу.

Этот обзор составляет содержание первой части нашей работы. Вопросы теории физических измерений мы предполагаем рассмотреть во второй части.

ЧАСТЬ I

ТЕОРИЯ РАЗМЫТЫХ МНОЖЕСТВ

2. Размытые множества. Обозначения и терминология.

Рассмотрим произвольное множество объектов $\mathcal{U}$ и назовем его универсальным множеством.

Размытое подмножество $\mathcal{A}$ универсального множества $\mathcal{U}$ характеризуется функцией принадлежности

$$\mu_{\mathcal{A}} : \mathcal{U} \to [0,1],$$

которая ставит в соответствие каждому элементу $u \in U$ число $\mu_A(u)$ из интервала $[0,1]$, характеризующее степень принадлежности элемента u подмножеству A /I,2,3/.

Носителем размытого множества A называется множество таких точек в U, для которых $\mu_A(u)$ положительно. Она является обычным множеством.

Высотой размытого множества A называется величина $\sup\limits_U \mu_A(u)$.

Точкой перехода размытого множества A называется такой элемент множества U, степень принадлежности которого множеству A равна $0,5$.

Размытое множество можно представить в виде $A=\{(\mu_A(u)/u)\}$ множества упорядоченных пар. Другое, более естественное представление, мы дадим в следующей главе.

Понятие размытого множества не имеет статистической природы, поэтому понятие принадлежности отлично от понятия вероятности. Правильная интерпретация значений принадлежности состоит в том, что она есть лишь субъективная мера "насколько u_i входит в A". Как мы увидим, математические операции, применяемые к значениям принадлежности, отличны от операций, применяемых к значениям вероятностей, хотя между ними и существует некоторая аналогия.

Размытое множество называется конечным, если его носитель есть конечное множество в обычном смысле, и бесконечным, если его носитель есть обычное бесконечное множество.

Приведем примеры размытых множеств.

Пример (2.I); пример конечного размытого множества.

Пусть $U=\{1,2,\dots,10\}$. Его размытое подмножество,

обозначаемое словом "несколько", можно определить так:
"несколько" = $\{(0,5/3),\ (0,8/4),\ (1/5),\ (1/6),\ (0,8/7),\ (0,5/8)\}$.

Пример (2.2); пример бесконечного размытого множества.

Пусть U есть интервал $[0,100]$ и переменная u, принимающая значения из этого интервала, интерпретируется как "возраст". Размытое подмножество U, обозначаемое термином "старый", можно определить функцией принадлежности вида

$$\mu_A(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq u \leq 50, \\ \left(1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1}, & \text{если } 50 < u \leq 100 \end{cases}$$

Здесь точкой перехода является значение $u = 55$.

Размытое множество A называется пустым $A = \phi$, если $\mu_A(u) \equiv 0$.

Размытое множество A совпадает с размытым множеством B, если $\mu_A(u) = \mu_B(u)$ для всех $u \in U$. Очевидно, что множества A и B имеют один и тот же носитель.

Обычное подмножество U можно рассматривать как его размытое подмножество с функцией принадлежности, принимающей только значения 0 или 1.

Размытое подмножество A универсального множества U может быть подмножеством другого размытого или обычного подмножества U.

A есть подмножество B или содержится в B тогда и только тогда, когда $\mu_A(u) \leq \mu_B(u)$ для любого $u \in U$, т.е.

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Longleftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(u) \leq \mu_{\mathcal{B}}(u), \quad u \in U.$$

Пример (2.3).

Если

$$U = \{a, b, c, d\},$$

$$\mathcal{A} = \{(0{,}5/a), (0{,}8/b), (0{,}3/d)\},$$

$$\mathcal{B} = \{(0{,}7/a), (1/b), (0{,}3/c), (1/d)\},$$

тогда $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Размытое множество $\mathcal{A}$ нормально, если его высота равна единице, т.е. $\sup\limits_{U} \mu_{\mathcal{A}}(u) = 1$.

В противном случае $\mathcal{A}$ субнормально /2/.

Размытое множество в примерах (2.1) и (2.2) нормально.

Пример (2.4).

Пусть $U = \{1, 2, \ldots, 10\}$, размытое множество

"не малое и не большое" = $\{(0{,}2/2), (0{,}3/3), (0{,}4/4), (0{,}5/5), (0{,}4/6), (0{,}3/7), (0{,}2/8)\}$,

субнормально. Надо отметить, что субнормальное размытое множество может быть нормировано путем деления функции $\mu_{\mathcal{A}}$ на величину $\sup\limits_{U} \mu_{\mathcal{A}}(u)$.

3. Операции над размытыми множествами.

Представление размытых множеств

Определим операции объединения, пересечения и дополнения размытых множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, обозначаемые соответственно $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}$, $\neg \mathcal{A}$ /1,2/.

Множества $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B}$ должны определяться через

A и B, т.е. $\mu_{A\cup B}(u)$ и $\mu_{A\cap B}(u)$ зависят только от $\mu_A(u)$ и $\mu_B(u)$, т.е.

$$\mu_{A\cup B}(u) = f(\mu_A(u), \mu_B(u)),$$

$$\mu_{A\cap B}(u) = g(\mu_A(u), \mu_B(u)).$$

Относительно функций f и g делаются естественные предположения:

I. f и g – неубывающие функции своих аргументов.

2. f и g симметричны, т.е. $f(x,y)=f(y,x)$ и $g(x,y)=g(y,x)$.

3. $f(x,x)$ и $g(x,x)$ – строго возрастающие функции от x.

4. $f(x,y) \leq \min(x,y)$ и $g(x,y) \geq \max(x,y)$.

5. $f(1,1)=1$ и $g(0,0)=0$.

6. Логически эквивалентные выражения должны иметь одинаковые функции принадлежности, т.е.

$$\mu_{A\cap(B\cup C)}(u) = \mu_{(A\cup B)\cup(A\cap C)}(u).$$

При этих ограничениях f и g определяются однозначно:

$f(x,y) = \max(x,y)$, $g(x,y) = \min(x,y)$. Поэтому:

I. Объединение размытых множеств A и B определяется слудующим образом:

$$\mu_{A\cup B}(u) = \max(\mu_A(u), \mu_B(u)) \quad \text{для всех } u \in U.$$

Объединение соответствует логической связке "или";

2. Пересечение размытых множеств A и B определяется

следующим образом:

$$\mu_{A \cap B}(u) = \min(\mu_A(u), \mu_B(u)) \text{ для всех } u \in U .$$

Пересечение соответствует логической связке "и" /5,6/.

Дополнение размытого множества A определяется через функцию принадлежности следующим образом:

$$\mu_{\neg A}(u) = 1 - \mu_A(u) \text{ для всех } u \in U \quad /2/.$$

Аргументацию выбора такого определения операции дополнения мы рассмотрим ниже.

Исходя из вышеприведенных операций и включения ($\subset$), для размытых множеств, дадим важное представление размытых множеств.

Одноточечное размытое подмножество универсального множества U есть его размытое подмножество, носитель которого есть одноточечное подмножество U в обычном смысле, т.е. это есть такое размытое множество, $\mu_A(u)$ которого равны нулю, кроме одного элемента U .

Например, если $U = \{u_1, \cdots, u_n\}$, то его размытое подмножество $A = \{(\mu_1/u_1)\} = \{(\mu_1/u_1), (0/u_2), \cdots, (0/u_n)\}$ есть одноточечное размытое подмножество.

Из определения включения ($\subset$) следует, что данное одноточечное множество $\{(\mu_1/u_1)\}$ содержит континуальное число всех одноточечных множеств вида $\{(\mu'_1/u_1)\}$, для которых $\mu'_1 \leq \mu_1$. Любое одноточечное размытое множество представляется в виде бесконечного (континуального) объединения (в смысле $\cup$) убывающих одноточечных размытых множеств, пересечение которых равно пустому множеству

$$\{(\mu_1/u_1)\} = \bigsqcup_{\mu_1' \leq \mu_1} \{(\mu_1'/u_1)\}, \quad \bigsqcap_{\mu_1' < \mu_1} \{(\mu_1'/u_1)\} = \phi.$$

Данное одноточечное размытое множество является максимальным (по включению $\sqsubset$), представляющим членом этого континуального семейства одноточечных множеств.

Ясно, что это понятие размытого одноточечного множества есть существенное обобщение понятия обычного одноточечного множества, которое сводится к обычному понятию, если $\mu_A(u_1)$ принимает только два значения $\{0,1\}$. Отметим, что в записи одноточечного множества $\{(\mu_1/u_1)\}$ фигурирует только представляющий член соответственного семейства одноточечных размытых множеств (в силу определения объединения $\sqcup$).

Из вышесказанного следует, что одноточечному размытому множеству, т.е. каждому элементу $u_i \in U$, соответствует не одно число μ_i , а подмножество $[0,1]$ интервала, нижняя граница которого всегда находится в точке 0 , $[0, \mu_i]$ (см. рис. I).

Другому элементу U соответствует другой интервал с нижней границей в точке 0.

Размытые множества A и B называются непересекающимися, если их пересечение – пустое множество $A \sqcap B = \phi$.

Очевидно, можно дать эквивалентное определение: размытые множества называются непересекающимися, если их носители не пересекаются ($\cap$) в обычном смысле.

Очевидно, что если размытые множества A и B не пересекаются, $A \sqcap B = \phi$, то их объединение в смысле Заде, $A \sqcap B$, совпадает с обычным объединением множеств ($\bigcup$). Например,

$$U=\{u_1, u_2, u_3\},$$

$$A=\{(\mu_1/u_1)\}, \quad B=\{(\mu_2/u_2),(\mu_3/u_3)\}, \quad \text{тогда}$$

$$A \sqcup B=\{(\mu_1/u_1),(\mu_2/u_2),(\mu_3/u_3)\}.$$

Из всего вышесказанного следует, что можно дать важное представление размытых множеств. Обычное множество U можно представить в виде объединения составляющих его одноточечных множеств или элементов. Аналогично, размытое множество можно представить в виде объединения (в смысле Заде $\bigcup$) непересекающихся одноточечных размытых множеств (μ_i/u_i) или в виде объединения ($\sqcup$) соответствующих непересекающихся континуальных семейств убывающих одноточечных размытых множеств. Таким образом, размытое множество можно записать в виде объединения ($\sqcup$) представляющих членов этих семейств.

Если размытое множество A конечное, т.е. если $U=\bigcup\limits_{i=1}^{n} u_i$, тогда A представляется так:

$$A=\bigsqcup_{i=1}^{n} \mu_i/u_i \,. \tag{3.I}$$

Одноточечное размытое множество представим так: μ_i/u_i.

Из определения объединения размытого множества следует, что если $u_i=u_j$, то A можно записать в преобразованном виде $\mu_i/u_i \sqcup \mu_j/u_j=(\mu_i \vee \mu_j)/u_i$.

Здесь и далее $\vee \triangleq max$ и $\wedge \triangleq min$ /I0/.

Если носитель A имеет мощность континуума, то используем запись:

$$\mathcal{A} = \bigsqcup_{u \in U} \mu_{\mathcal{A}}(u)/u. \qquad (3.2)$$

Из определения подмножества размытого множества следует, что любое размытое множество (как конечное, так и бесконечное) имеет бесконечное (континуальное) число подмножеств.

Запишем в этом представлении объединение и пересечение размытых множеств.

Объединение размытых множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ определяется так:

$$\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} = \bigsqcup_{u \in U} (\mu_{\mathcal{A}}(u) \vee \mu_{\mathcal{B}}(u))/u, \qquad (3.3)$$

а пересечение - следующим образом:

$$\mathcal{A} \sqcap \mathcal{B} = \bigsqcup_{u \in U} (\mu_{\mathcal{A}}(u) \wedge \mu_{\mathcal{B}}(u))/u. \qquad (3.4)$$

Для размытых множеств можно определить ряд операций (так называемые алгебраические операции), аналогов которых для обычных множеств не существует. Определим алгебраические операции произведения, алгебраической суммы, прямой суммы и умножения на число для размытых множеств /2,4,7,8/.

Если α - любое неотрицательное число, такое, что $\alpha \sup\limits_{U} \mu_{\mathcal{A}}(u) \leq 1$, то произведение числа α на размытое множество $\mathcal{A}$ определяется так:

$$\alpha \mathcal{A} = \bigsqcup_{u \in U} \alpha \mu_{\mathcal{A}}(u)/u. \qquad (3.5)$$

Произведение $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначается $\mathcal{A}\mathcal{B}$ и определяется формулой

$$AB = \bigsqcup_{u \in U} \mu_A(u)\mu_B(u)/u. \qquad (3.6)$$

Алгебраическая сумма A и B обозначается $A+B$ и определяется формулой

$$A+B = \bigsqcup_{u \in U} (\mu_A(u)+\mu_B(u))/u, \qquad (3.7)$$

где $\mu_A(u)+\mu_B(u) \leq 1$ для всех $u \in U$. Когда $\mu_A(u)+\mu_B(u)>1$, объект u не включается в алгебраическую сумму.

Операция, двойственная произведению, является прямой суммой, которая обозначается $A \oplus B$ и определяется так:

$$A \oplus B = \neg(\neg A \neg B) = A+B-AB.$$

Для обычных множеств пересечение и алгебраическое произведение является эквивалентными операциями, также как и объединение и алгебраическая сумма.

Любое размытое множество A^{α}, где α - положительное число, следует понимать так:

$$A^{\alpha} = \bigsqcup_{u \in U} (\mu_A(u))^{\alpha}/u. \qquad (3.8)$$

Частными случаями операции возведения в степень (3.8) являются операции концентрирования

$$CON(A) = A^2$$

и растяжения

$$DIL(A) = A^{0,5}.$$

Надо отметить, что Заде операцию $A \sqcap B$ считает "жесткой" в том смысле, что в ней недостаточно учитываются функция принадлежности обоих множеств. В противоположность этому операция AB является "мягкой".

Абсолютная разность A и B обозначается $|A-B|$ и определяется так:

$$|A-B| = \bigsqcup_{u\in U} \left| \mu_A(u) - \mu_B(u) \right| / u . \tag{3.9}$$

Пример (3.I).

Если $U = \bigcup_{n=1}^{10} n$,

$A = 0{,}8/3 \sqcup 1/5 \sqcup 0{,}6/6$ и $B = 0{,}7/3 \sqcup 1/4 \sqcup 0{,}5/6$,то

$$\neg A = 1/1 \sqcup 1/2 \sqcup 0{,}2/3 \sqcup 1/4 \sqcup 0{,}4/6 \sqcup 1/7 \sqcup 1/8 \sqcup 1/9 \sqcup 1/10,$$

$$A \sqcup B = 0{,}8/3 \sqcup 1/4 \sqcup 1/5 \sqcup 0{,}6/6, \quad A \sqcap B = 0{,}7/3 \sqcup 0{,}5/6,$$

$$A_2 = 0{,}64/3 \sqcup 1/5 \sqcup 0{,}36/6,$$

$$AB = 0{,}5/3 \sqcup 0{,}3/6, \quad A + B = 1/4 \sqcup 1/5,$$

$$0{,}4A = 0{,}32/3 \sqcup 0{,}4/5 \sqcup 0{,}6/6,$$

$$A \oplus B = 0{,}94/3 \sqcup 1/4 \sqcup 1/5 \sqcup 0{,}8/6.$$

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – соответственно размытые подмножества универсальных множеств $U_1, \ldots, U_n$. Декартово произведение этих множеств обозначается $A_1 \times \cdots \times A_n$ и определяется как размытое подмножество множества $U_1 \times \cdots \times U_n$ с функцией принадлежности

$$\mu_{A_1 \times \cdots \times A_n}(u_1, \ldots, u_n) = \mu_{A_1}(u_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_n}(u_n) . \tag{3.10}$$

Таким образом,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \bigsqcup_{U_1 \times \cdots \times U_n} (\mu_{A_1}(u_1) \wedge \cdots \wedge \mu_{A_n}(u_n)) / (u_1, \ldots, u_n).$$

Пример (3.2).

Пусть $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 = 3 \cup 5 \cup 7$, $A_1 = 0{,}5/3 \cup 1/5 \cup 0{,}6/7$ и $A_2 = 1/3 \cup 0{,}6/5$, то

$$A_1 \times A_2 = 0{,}5/(3,3) \cup 1/(5,3) \cup 0{,}6/(7,3) \cup 0{,}5/(3,5) \cup 0{,}6/(5,5) \cup 0{,}6/(7,5).$$

Оператор увеличения размытости /2/ используется обычно для преобразования обычного множества в размытое или для увеличения размытости размытого множества. Результатом действия оператора F на размытое подмножество A множества $\mathcal{U}$ является размытое подмножество $F(A;K)$ вида

$$F(A;K) = \bigcup_{\mathcal{U}} \mu_A(u) K(u), \tag{3.11}$$

где размытое множество $K(u)$ является ядром оператора F , т.е. результатом действия оператора F на одноточечное множество $1/u$:

$$K(u) = F(1/u; K).$$

$\mu_A(u) K(u)$ – произведение числа на размытое множество, а объединение берется по размытым множествам вида $\mu_A(u) K(u)$, $u \in \mathcal{U}$.

Пример (3.3).

Пусть $\mathcal{U} = 1 \cup 2 \cup 3 \cup 4$, $A = 0{,}8/1 \cup 0{,}6/2$, $K(1) = 1/1 \cup 0{,}4/2$, $K(2) = 1/2 \cup 0{,}4/1 \cup 0{,}4/3$, тогда

$$F(A;K) = 0{,}8(1/1 \cup 0{,}4/2) \cup 0{,}6(1/2 \cup 0{,}4/1 \cup 0{,}4/3) =$$
$$= 0{,}8/1 \cup 0{,}6/2 \cup 0{,}24/3.$$

4. Множества уровня размытого множества.

Множеством α - уровня размытого множества A является множество в обычном смысле A_α всех таких элементов универсального множества U, степень принадлежности которых A больше или равна α:

$$A_\alpha = \{u \mid \mu_A(u) \geq \alpha\}. \tag{4.I}$$

Размытое множество A можно разложить по множествам уровня следующим образом:

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha, \tag{4.2}$$

где αA_α понимается в смысле (3.5), а объединение размытых множеств по α от 1 до 0 /3,9/.

Это разложение можно рассмотреть как результат группировки членов в выражении A по подмножествам, каждое из которых соответствует определенному множеству уровня.

В случае конечного размытого множества ясно, что число множеств в объединении (т.е. число различных уровней) совпадает с числом различных степеней принадлежности, присутствующих в записи множества A как объединения одноточечных непересекающихся размытых множеств.

Разложение (4.2) иногда называют также условием разрешимости размытого множества A.

Пример (4.I).

Пусть $U = \bigcup_{n=1}^{10} n$ и $A = 0{,}1/2 \cup 0{,}3/1 \cup 0{,}5/7 \cup 0{,}9/6 \cup 1/9$.

Тогда A представится так:

$$A = 0{,}1/2 \cup 0{,}1/1 \cup 0{,}1/7 \cup 0{,}1/6 \cup 0{,}1/9 \cup$$

$$\cup 0{,}3/4 \cup 0{,}3/7 \cup 0{,}3/6 \cup 0{,}3/9 \cup$$
$$\cup 0{,}5/7 \cup 0{,}5/6 \cup 0{,}5/9 \cup$$
$$\cup 0{,}9/6 \cup 0{,}9/9 \cup$$
$$\cup 1/9,$$

или

$$A = 0{,}1(1/2 \cup 1/4 \cup 1/7 \cup 1/6 \cup 1/9) \cup$$
$$\cup 0{,}3(1/4 \cup 1/7 \cup 1/6 \cup 1/9) \cup$$
$$\cup 0{,}5(1/7 \cup 1/6 \cup 1/9) \cup$$
$$\cup 0{,}9(1/6 \cup 1/9) \cup$$
$$\cup 1(1/9),$$

т.е. в виде (4.2) с множествами уровня

$$A_{0,1} = 2 \cup 4 \cup 7 \cup 6 \cup 9,$$
$$A_{0,3} = 4 \cup 7 \cup 6 \cup 9,$$
$$A_{0,5} = 7 \cup 6 \cup 9,$$
$$A_{0,9} = 6 \cup 9,$$
$$A_1 = 9.$$

Для размытых множеств существует так называемый принцип обобщения (он будет рассмотрен ниже). Разложение по множествам уровня в комбинации с принципом обобщения позволяет обобщать различные понятия теории обычных множеств на размытые множества. Такое обобщение лежит в основе многих из вышеприведенных операций.

5. Принцип обобщения.

Если $A_1, \dots, A_n$ - размытые подмножества универсального множества U, а $\omega_1, \dots, \omega_n$ - неотрицательные весовые коэффи :енты, сумма которых равна 1, то выпуклой комбинацией /2.11/ размытых множеств $A_1, \dots, A_n$ называется размытое множество A с функцией принадлежности вида

$$\mu_A(u) = \omega_1 \mu_{A_1}(u) + \cdots + \omega_n \mu_{A_n}(u) \qquad \text{для всех } u \in U.$$

Принцип обобщения /2/ для размытых множеств представляет собой основное равенство, позволяющее расширить область определения U отображения или отношения, включив в нее, наряду с точками, произвольные размытые подмножества U.

Предположим, что f – отображение $U \to V$, а A – размытое подмножество вида

$$A = \mu_1/u_1 \cup \cdots \cup \mu_n/u_n .$$

Тогда принцип обобщения утверждает, что

$$f(A) = f(\mu_1/u_1 \cup \cdots \cup \mu_n/u_n) \equiv \mu_1/f(u_1) \cup \cdots \cup \mu_n/f(u_n). \qquad (5.1)$$

Итак, образ множества A при отображении f можно получить зная образы элементов $u_1, \ldots, u_n$ при этом отображении.

Если носитель подмножества A имеет мощность континуума, т.е.

$$A = \bigcup_U \mu_A(u)/u,$$

то принцип обобщения имеет вид

$$f(A) = f\left(\bigcup_U \mu_A(u)/u\right) \equiv \bigcup_V \mu_A(u)/f(u), \qquad (5.2)$$

при этом необходимо учитывать, что $f(u)$ – точка V, а $\mu_A(u)$ – степень принадлежности $f(u)$ размытому подмножеству $f(A)$ множества V.

При разложении A на множества уровня удобно использовать принцип обобщения в другой форме.

Если $A = \bigsqcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$, где A_α - соответствующее множество α - уровня, получим принцип обобщения:

$$f(A) = f\Big(\bigsqcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha\Big) \equiv \bigsqcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha f(A_\alpha)$$

или

$$f(A) = f\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} \alpha_i A_{\alpha_i}\Big) \equiv \bigsqcup_{i=1}^{n} \alpha_i f(A_{\alpha_i}). \qquad (5.3)$$

Замечание. Принцип обобщения в форме (5.2) позволяет расширить область определения $\mathcal{U}$ отображения f, включив в нее наряду с точками произвольные размытые подмножества $\mathcal{U}$. А в форме (5.3) он позволяет расширить область определения f, включив в нее, наряду с обычными подмножествами $\mathcal{U}$, произвольные размытые подмножества $\mathcal{U}$. Обе эти формы, естественно, эквивалентны.

Во многих приложениях принципа обобщения возникает следующая проблема. Имеются функции n переменных $f: U_1 \times \cdots \times U_n \to V$ и размытое множество (отношение) A в $U_1 \times \cdots \times U_n$, характеризующееся функцией принадлежности $\mu_A(u_1, \ldots, u_n)$, где $u_i \in U_i$, $i = 1, \ldots, n$. Непосредственное применение принципа обобщения в этом случае дает

$$f(A) = f\Big(\bigsqcup_{U_1 \times \cdots \times U_n} \mu_A(u_1, \ldots, u_n)/(u_1, \ldots, u_n)\Big) =$$

$$= \bigsqcup_{V} \mu_A(u_1, \ldots, u_n)/f(u_1, \ldots, u_n),$$

однако во многих случаях нам известно не само A, а его проекции $A_1, \ldots, A_n$ на $U_1, \ldots, U_n$. В связи с этим возникает вопрос: какое выражение для μ_A взять здесь?

В таких случаях будем предполагать, что μ_A имеет вид

$$\mu_A(u_1,\dots,u_n)=\mu_{A_1}(u_1)\wedge\mu_{A_2}(u_2)\wedge\dots\wedge\mu_{A_n}(u_n), \tag{5.4}$$

где μ_{A_i}, $i=1,\dots,n$ – функция принадлежности отношения A_i. Это эквивалентно предположению о том, что A – декартово произведение своих проекций, т.е.

$$A=A_1\times\dots\times A_n,$$

откуда в свою очередь следует, что A – наибольшее множество, проекции которого на $U_1,\dots,U_n$ суть $A_1,\dots,A_n$ соответственно.

Пример (5.I).

$U_1=U_2=1\cup 2\cup 3\cup\dots\cup 10$ и

$A_1=\underset{\sim}{2}\triangleq$ примерно $2=1/2\cup 0{,}6/1\cup 0{,}8/3,$

$A_2=\underset{\sim}{6}\triangleq$ примерно $6=1/6\cup 0{,}8/5\cup 0{,}7/7,$

$f(u_1,u_2)=u_1\times u_2$ – арифметическое произведение u_1 и u_2.

Используя (5.4) и принцип обобщения, получим

$$\underset{\sim}{2}\times\underset{\sim}{6}=(1/2\cup 0{,}6/1\cup 0{,}8/3)\times(1/6\cup 0{,}8/5\cup 0{,}7/7)=$$

$$=1/12\cup 0{,}8/10\cup 0{,}7/14\cup 0{,}6/6\cup 0{,}6/5\cup 0{,}6/7\cup 0{,}8/18\cup 0{,}8/15\cup 0{,}7/21=$$

$$=0{,}6/5\cup 0{,}6/6\cup 0{,}6/7\cup 0{,}8/10\cup 1/12\cup 0{,}7/14\cup 0{,}8/15\cup 0{,}8/18\cup 0{,}7/21,$$

т.е. умножение размытых чисел "примерно 2" и "примерно 6" есть полученное размытое число.

Вообще пусть $*$ обозначает некоторую бинарную операцию на $\mathcal{U}\times V$, со значениями в W. Если $u\in\mathcal{U}$ и $v\in V$, то

$$\omega = u * v,\quad \omega\in W.$$

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – размытые подмножества $\mathcal{U}$ и V:

$$\mathcal{A} = \mu_1/u_1 \sqcup \cdots \sqcup \mu_n/u_n ,$$

$$\mathcal{B} = \nu_1/v_1 \sqcup \cdots \sqcup \nu_n/v_n .$$

Используя принцип обобщения и (5.4), операцию $*$ можно обобщить на размытые подмножества $\mathcal{U}$ и V, определив это отношение

$$\mathcal{A}*\mathcal{B} = \Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} \mu_i/u_i\Big) * \Big(\bigsqcup_{j=1} \nu_j/v_j\Big) = \bigsqcup_{i,j=1}^{n} (\mu_i \wedge \nu_j)/(u_i * v_j). \quad (5.5)$$

<u>Замечание</u>. Надо отметить, что применимость (5.5) зависит от предположения (5.4), т.е. что

$$\mu_{\mathcal{A}*\mathcal{B}}(u,v) = \mu_{\mathcal{A}}(u) \wedge \mu_{\mathcal{B}}(v),$$

следствием которого является отсутствие взаимодействия между переменными U° и V (отсутствие взаимодействия между переменными U и V подразумевает отсутствие каких бы то ни было ограничений, в которых присутствуют обе величины u_i и v_j, т.е. отсутствие всякого ограничения $\mathcal{R}(u,v)$ в $\mathcal{U}\times V$). Если же существует ограничение на (u,v), которое выражается отношением $\mathcal{R}$ с функцией принадлежности $\mu_{\mathcal{R}}$, то выражение для $\mathcal{A}*\mathcal{B}$ имеет вид

$$\mathcal{A}*\mathcal{B} = \Big(\Big(\bigsqcup_{i=1}^{n} \mu_i/u_i\Big) * \Big(\bigsqcup_{j=1} \nu_j/v_j\Big)\Big) \sqcap \mathcal{R} =$$

$$= \bigsqcup_{i,j=1}^{n} \big(\mu_i \wedge \nu_j \wedge \mu_{\mathcal{R}}(u_i, v_j)\big)/(u_i * v_j). \quad (5.6)$$

Простой иллюстрацией случая, когда переменные взаимодействуют, может служить следующий пример:

Пусть $\omega = z \times (x + y)$, где $+$ и $\times$ - арифметические операции. Если x, y и z - невзаимодействующие, то для вычисления $A \times (B + C)$ надо применить (5.5), где A, B и C - размытые подмножества действительной прямой. С другой стороны, если написать $\omega = z \times x + z \times y$, то члены $z \times x$ и $z \times y$ взаимодействуют благодаря наличию общего множителя z и, следовательно,

$$A \times (B + C) \neq A \times B + A \times C. \tag{5.7}$$

Из этого факта можно сделать важный вывод о том, что произведение размытых чисел недистрибутивно, если оно вычисляется по формуле (5.5). Чтобы получить равенство, можно левую часть (5.7) вычислить по (5.5), а правую - по (5.6).

<u>Замечание</u>. Принцип обобщения можно применить не только к функцим, но также и к отношениям, или, что то же самое, к предикатам.

Пусть $f : U \to V$ есть отображение в обычном смысле. Применяя принцип обобщения, мы расширили область определения f, включив размытые подмножества. Определим для них понятия образа и прообраза.

Прообразом A размытого множества B при отображении f называется размытое подмножество в U с функцией принадлежности вида $\mu_A(u) = \mu_B(f(u)), \ \forall u \in U.$

Образ B размытого множества A при отображении f описывается функцией принадлежности вида

$$\mu_B(v) = \begin{cases} \sup\limits_{z \in [f^{-1}(v)]} \mu_A(z) & \text{при } [f^{-1}(v)] \neq \emptyset \\ 0 & \text{при } [f^{-1}(v)] = \emptyset, \ [f^{-1}(v)] = \{z \mid f(z) = v\}. \end{cases}$$

При размытом отображении $T: U \to V$, которое описывается функцией принадлежности μ_T элементу $u \in U$ соответствует не значение функции $f(u)$, а размытое подмножество T_u в V с функцией принадлежности $\mu_T : U \times V \to [0,1]$.

Прообразом размытого множества C при размытом отображении T называется максимальное (по включению) размытое множество C_u, такое, что образ множества C_u в V при размытом отображении T входит в C.

Справедлива следующая теорема:

Пусть $C \subset V$,

$$N = \{(u,v) \mid (u,v) \in U \times V, \ \mu_T(u,v) > \mu_C(v)\},$$

$$N_u = \{v \mid v \in V, \ (u,v) \in N\}, \quad U^{\circ} = \{u \mid u \in U, \ N_u \neq \emptyset\},$$

тогда прообраз C. C_u, характеризуется функцией принадлежности

$$\mu_{C_u}(u) = \begin{cases} \inf\limits_{v \in N_u} \mu_C(v) & \text{при } u \in U^{\circ} \\ 1 & \text{при } u \in U - U^{\circ} \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы смотри в /I3/.

6. Эффективная мощность размытого множества.

Пусть дано конечное размытое множество A. Очевидно, что некорректно ставить вопрос о числе элементов A, поскольку в случае размытого множества не существует четкой границы между принадлежностью и непринадлежностью элемента множеству. Тем не менее понятие эффективной мощности размытого множества, определяемое как

$$|\mathcal{A}| \triangleq \sum_{i} \mu_{\mathcal{A}}(u_i), \qquad (6.\mathrm{I})$$

является естественным обобщением понятия числа элементов $\mathcal{A}$ /2,I2/. $|\mathcal{A}|$ можно интерпретировать как эквивалентное число принадлежащих $\mathcal{A}$ объектов u_i, со степенью принадлежности I.

Отметим, что, согласно принципу обобщения, в случае конечных, или счетных размытых множеств, если между их универсальными множествами установлено взаимно однозначное соответствие, одно размытое множество $\mathcal{A}$ всегда отображается в равномощное (в смысле (6.I)) ему множество $\mathcal{B}$. В этом смысле можно сказать, что между размытыми множествами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}$ установлено взаимно однозначное соответствие. Если же соответствие между универсальными множествами не однозначное, то $\mathcal{A}$ всегда отображается в размытое множество $\mathcal{B}$ меньшей мощности.

По формуле (6.I) можно вычислять мощность конечных или даже счетных размытых множеств. Но ясно, что в случае бесконечных (несчетных) размытых множеств вопрос остается открытым и нужны дальнейшие исследования в этом направлении.

7. Алгебраические свойства размытых множеств.

Функции принадлежности размытых множеств, как легко можно доказать, удовлетворяют следующим законам /I4/:

I. $\mu_{\mathcal{A}} \leq \mu_{\mathcal{A}}$ (рефлексивный закон).

2. $\mu_A \le \mu_B,\ \mu_B \le \mu_A \Rightarrow \mu_A = \mu_B$ (закон антисимметричности).

3. $\mu_A \le \mu_B,\ \mu_B \le \mu_C \Rightarrow \mu_A \le \mu_C$ (закон транзитивности).

4. $\left.\begin{aligned} \mu_A \vee \mu_A &= \mu_A \\ \mu_A \wedge \mu_A &= \mu_A \end{aligned}\right\}$ (законы идемпотентности).

5. $\left.\begin{aligned} \mu_A \vee \mu_B &= \mu_B \vee \mu_A \\ \mu_A \wedge \mu_B &= \mu_B \wedge \mu_A \end{aligned}\right\}$ (законы коммутативности).

6. $\left.\begin{aligned} (\mu_A \vee \mu_B) \vee \mu_C &= \mu_A \vee (\mu_B \vee \mu_C) \\ (\mu_A \wedge \mu_B) \wedge \mu_C &= \mu_A \wedge (\mu_B \vee \mu_C) \end{aligned}\right\}$ (законы ассоциативности)

7. $\left.\begin{aligned} \mu_A \wedge (\mu_A \vee \mu_B) &= \mu_A \\ \mu_A \vee (\mu_A \wedge \mu_B) &= \mu_A \end{aligned}\right\}$ (законы поглощения).

8. $\left.\begin{aligned} \mu_A \wedge (\mu_B \vee \mu_C) &= (\mu_A \wedge \mu_B) \vee (\mu_A \wedge \mu_C) \\ \mu_A \vee (\mu_B \wedge \mu_C) &= (\mu_A \vee \mu_B) \wedge (\mu_A \vee \mu_C) \end{aligned}\right\}$ (законы дистрибутивности).

9. $\mu_{\neg(\neg A)} = \mu_A$ (закон инволюции).

10. $\left.\begin{aligned} \neg(\mu_A \vee \mu_B) &= \mu_{\neg A} \wedge \mu_{\neg B} \\ \neg(\mu_A \wedge \mu_B) &= \mu_{\neg A} \vee \mu_{\neg B} \end{aligned}\right\}$ (законы Деморгана).

11. $\left.\begin{aligned} \mu_A \vee 0 = \mu_A,\ \ \mu_A \wedge 1 = \mu_A \\ \mu_A \vee 1 = 1\ ;\ \ \mu_A \wedge 0 = 0 \end{aligned}\right\}$ (законы тождественности).

12. $\left.\begin{aligned} \mu_A \vee \mu_{\neg A} &\ne 1 \\ \mu_A \wedge \mu_{\neg A} &\ne 0 \end{aligned}\right\}$ (нарушение законов дополнительности).

(все законы удовлетворяются для $\forall u \in U$).

Отметим, что роль 0 и 1 играют соответственно функции принадлежности пустого размытого множества и самого U (как размытого множества с $\mu_u \equiv 1$).

Степени принадлежности размытых множеств, удовлетворяющие перечисленным свойствам, составляют дистрибутивную решетку относительно операций $\vee$, $\vee$, $\neg$, отличную от булевой, ввиду нарушения законов дополнительности.

Ясно, что то же самое справедливо и для размытых множеств: класс всех размытых подмножеств универсального множества U образует дистрибутивную решетку с нулем и единицей относительно $\sqcup$, $\sqcap$, $\neg$. Роль нуля играет пустое размытое множество, а единицы - само U .

Подчеркнем, что любая дистрибутивная решетка изоморфна кольцу множеств (теорема Биркгофа /15/). В частности, если решетка булевая, то она изоморфна полю множеств (теорема Стоуна). Это значит, что мы всегда можем рассматривать отношение частичного упорядочения $\leqslant$ в дистрибутивной решетке как теоретико-множественное отношение упорядочения $\subseteq$, а $\vee$ и $\wedge$ - как теоретико-множественное объединение $\bigcup$ и пересечение $\bigcap$. Таким образом, любое соотношение теории Заде можно выразить на языке теории классических множеств.

Установленный факт получает свою реализацию посредством рассмотрения нашего представления размытых множеств. Мы уже отмечали, что каждому одноточечному размытому множеству соответствует определенный подинтервал $[0,\mu_i]$ интервала $[0,1]$ с левой границей в точке 0. Тогда любому размытому множеству, которое представляется в виде объединения ($\sqcup$) одноточечных размытых множеств, соответствует совокупность таких подинтервалов интервала $[0,1]$, с левой границей в точке 0. Таким образом, определение размытого подмножества A универсального множества U можно сформулировать и так: размытое подмножество универсального множества U определяется функцией принадлежности

$$\mu_A : U \to [0,1],$$

которая ставит в соответствие каждому элементу $u \in U$ подинтервал $[0,1]$ с левой границей в точке 0, длина которого характеризует степень принадлежности элемента u подмножеству A.

Вспоминая определение операции объединения размытых подмножеств и учитывая вышесказанное, мы в самом деле можем рассматривать операцию объединения размытых множеств ($\sqcup$) как поточечную операцию теоретико-множественного объединения ($\cup$) соответствующих подинтервалов с левыми границами в точке 0, вследствие чего получаем новую совокупность таких же интервалов, т.е. новое размытое множество.

Аналогично пересечение размытых множеств ($\sqcap$) можем рассматривать как поточечную операцию теоретико-множественного пересечения ($\cap$) соответствующих подинтервалов с началами в точке 0, вследствие чего получаем новую совокупность таких же интервалов, т.е. результирующее размытое множество.

Операция включения ($\sqsubset$) размытых множеств рассматривается как поточечная операция обычного включения для соответствующих подинтервалов.

Из такого рассмотрения следует также, что размытые множества (т.е. функции принадлежности) составляют дистрибутивную небулевую решетку, поскольку таковой является множество подинтервалов интервала $[0,1]$ с началом в точке 0. Отсюда же становится понятным и обоснование определения операции дополнения размытого множества ($\neg$), данное Заде /I/. Заметим, что это единственно возможный путь такого определения дополнения размытого множества A, при котором $\neg A$ является размытым множеством, т.е. совокупностью подинтервалов $[0,1]$ с началами в точке 0 (см. рис. 2.).

Для получения булевой решетки дополнение A (дополнение с обычными свойствами) следует определить так: дополнение A есть множество A^c с функцией принадлежности μ^c соответствующей совокупности подинтервалов типа $[\mu_1, 1]$, начала которых не совпадают с точкой 0. Это множество, естественно, не будет размытым множеством в нашем смысле. Таким образом, определить дополнение размытого множества со свойствами обычного дополнения невозможно.

Любую функцию принадлежности $\mu(u)$ можно выразить с помощью классических характеристических функций. В общем, требуемое количество этих функций бесконечно, однако, для любой фиксированной точности $\mu(u)$ можно вычислить с помощью конечного числа классических характеристических функций (независимо от данного u).

Действительно, любую функцию $\mu(u)$ можно представить в виде двоичного разложения:

$$\mu(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(u) 2^{-i}, \qquad (7.I)$$

где ψ_i - классические характеристические функции. Отметим, что это разложение использует функции-константы 2^{-i} $(i=1,2,\ldots)$ и обычные операции + (сумма) и x (умножение), которые индуцированы на множество всех размытых подмножеств U (алгебраические сумма и умножение размытых множеств):

$$(\mu\cdot\nu)(u)=\mu(u)\cdot\nu(u)$$

и

$$(\mu+\nu)(u)=\mu(u)+\nu(u),$$

если $\mu(u)+\nu(u)\leq 1$ для всех u .

Если прервать разложение на n-ом члене, то мы допустим погрешность в оценке $\mu(u)$, меньшую или равную 2^{-n} .

В заключение отметим, что невозможно дать определенный ответ на такие вопросы, как анализ связи с классической теорией множеств или даже связи с теорией вероятностей, так как они строго связываются с частными алгебраическими структурами рассматриваемых классов обобщенных характеристических функций /I6/.

8. Размытые отношения.

Если U - декартово произведение n универсальных множеств $U_1, U_2, \ldots, U_n$, то n - арное размытое отношение R в U определяется как размытое подмножество универсального множества U /2,3/.

R можно представить в форме объединения составляющих его размытых одноточечных множеств $\mu_R(u_1,\ldots,u_n)/(u_1,\ldots,u_n)$, т.е.

$$R = \bigsqcup_{U_1\times\cdots\times U_n} \mu_R(u_1,\ldots,u_n)/(u_1,\ldots,u_n), \qquad (8.1)$$

где μ_R - функция принадлежности R.

В связи с тем, что частным случаем отношений считаются и функции, приведем ряд определений /7/.

Областью значений размытого отношения R ($\operatorname{ran} R$) называется размытое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{\operatorname{ran} R}(v) = \bigvee_u \mu_R(u,v).$$

Областью определения размытого отношения R ($\operatorname{dom} R$) называется размытое множество с функцией принадлежности

$$\mu_{\operatorname{dom} R}(u) = \bigvee_v \mu_R(u,v).$$

Вес размытого отношения R ($h(R)$) определяется так:

$$h(R) = \bigvee_u \bigvee_v \mu_R(u,v).$$

Размытое отношение называется поднормальным, если $h(R)<1$, и нормальным, если $h(R)=1$.

Поясним необходимость перебора на примере. Пусть бинарное размытое отношение R задано матричным образом и степени принадлежности пар (u_i, v_j) сведены в таблицу:

	v_1	v_2	...	v_k
u_1	$\mu_R(u_1,v_1)$	$\mu_R(u_1,v_2)$	...	$\mu_R(u_1,v_k)$
u_2	$\mu_R(u_2,v_1)$	$\mu_R(u_2,v_2)$	...	$\mu_R(u_2,v_k)$
...	...	...	...	...
u_k	$\mu_R(u_k,v_1)$	$\mu_R(u_k,v_2)$	...	$\mu_R(u_k,v_k)$

Область значений $\text{ran}\,R$ - размытое множество, объекты которого V заданы степенями принадлежности, полученными нахождением наибольших значений в каждом столбце, тогда как область определения размытого множества $-\text{dom}\,R$, объекты которого u заданы своими степенями принадлежности, полученными путем нахождения наибольших значений по всем строкам.

Пример (8.I).

Пусть $U_1 = U_2 = (-\infty; \infty)$, тогда отношение "близко к" можно определить так:

$$\text{"близко к"} \triangleq \bigsqcup_{U_1 \times U_2} e^{-a|u_1 - u_2|} / (u_1, u_2),$$

где a - масштабный коэффициент.

Если R - отношение в $U \times V$, а S - отношение в $V \times W$, то композицией R и S является размытое отношение в $U \times W$, обозначаемое $R \circ S$ и определяемое формулой

$$R \circ S = \bigsqcup_{U \times W} \bigvee_{v} (\mu_R(u, v) \wedge \mu_S(v, \omega)) / (u, \omega). \qquad (8.2)$$

Это выражение определяет $maxmin$ - композицию R и S. Аналогично определяется max - композиция, только в ней вместо минимизации производится арифметическое умножение.

Если U, V, W - конечные множества, то матрица отношения $R \circ S$ есть максиминное произведение (в максиминном произведении матриц вместо сложения и умножения используются операции $\vee$ и $\wedge$ соответственно) матриц отношений R и S.

Пример (8.2).

$$\begin{bmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,6 & 0,9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0,5 & 0,9 \\ 0,4 & \mathrm{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,8 \\ 0,5 & 0,9 \end{bmatrix}$$

$$\qquad R \qquad\qquad\qquad S \qquad\qquad\qquad R\circ S$$

Содержательный смысл такого определения отношения состоит в том, что выбор подмножества R в U определяет, какие пары (u, v) и с какой степенью принадлежности входят в R. Другими словами, для каких пар справедливо соотношение uRv, где R – размытое множество.

Ви и Фу ввели другое определение композиции двух отношений R и S:

$$R * S = \bigsqcup_{U\times W} \bigwedge_{V} \left(\mu_R(u,v) \vee \mu_S(v,\omega)\right)/(u,\omega). \qquad (8.2)'$$

Надо отметить, что оба определения равноправны. При использовании (8.2) Заде называет объект "пессимистическим", а при (8.2) – "оптимистическим" /2/.

Если R есть n-арное размытое отношение в $U_1\times\cdots\times U_n$, то его проекция (тень) на $U_{i_1}\times\cdots\times U_{i_k}$ есть K-арное размытое отношение R_q в U, которое определяется следующим образом:

$$R_q \triangleq Proj\, R \text{ на } U_{i_1}\times\cdots\times U_{i_k} \triangleq P_q R \triangleq$$
$$\triangleq \bigsqcup_{U_{i_1}\times\cdots\times U_{i_k}} \left(\bigvee_{u(q')} \mu_R(u_1,\ldots,u_n)\right)/(u_{i_1},\ldots,u_{i_k}) \qquad (8.3)$$

где q – последовательность индексов $(i_1, \ldots, i_k)$, $u(q) \triangleq (u_{i_1}, \ldots, u_{i_k})$, q' – дополнение q, а

$$\bigvee_{u(q')} \mu_R(u_1,\dots,u_n) = \sup \mu_R(u_1,\dots,u_n),$$

где верхняя грань берется по значениям тех u_j, которые входят в $u(q')$. P_q обозначает операцию проектирования на $U_{i_1}\times\dots\times U_{i_k}$, $q=(i_1,\dots,i_k)$ /2/.

Ясно, что различные размытые отношения в $U_1\times\dots\times U_n$ могут иметь идентичные проекции на $U_{i_1}\times\dots\times U_{i_k}$. Однако для данного размытого отношения R_q в $U_{i_1}\times\dots\times U_{i_k}$ существует единственное наибольшее (т.е. содержащее все другие) отношение $\bar{R}_q$ в $U_1\times\dots\times U_n$, проекция которого на $U_{i_1}\times\dots\times U_{i_k}$ есть R_q. Из (8.3) следует, что функция принадлежности отношения $\bar{R}_q$ имеет вид

$$\mu_{\bar{R}_q}(u_1,\dots,u_n) = \mu_{R_q}(u_{i_1},\dots,u_{i_k}), \tag{8.4}$$

при этом следует учитывать, что (8.4) справедливо для всех $u_1,\dots,u_n$, таких, что i_1-й,... , i_k-й аргумент $\mu_{\bar{R}_q}$ равен соответственно первому, второму, ..., k-му аргументу μ_{R_q}. Отсюда следует, что значение этой функции в точке $(u'_1,\dots,u'_n)$ равно значению функции в точке $(u_1,\dots,u_n)$, если только $u_{i_1}=u'_{i_1},\dots,u_{i_k}=u'_{i_k}$. Исходя из этого будем называть отношение $\bar{R}_q$ цилиндрическим продолжением R_q, причем само R_q является основанием отношения $\bar{R}_q$. Это изображено на рис. 3.

Предположим, что R — n - арное отношение в $U_1\times\dots\times U_n$, R_q - проекция на $U_{i_1}\times\dots\times U_{i_k}$, $\bar{R}_q$ - цилиндрическое продолжение R_q. Поскольку $\bar{R}_q$ - наибольшее отношение в $U_1\times\dots\times U_n$, проекция которого равна R_q, то $\bar{R}_q$ удовлетворяет отношению включения (вложенности)

$$R \subseteq \bar{R}_q$$

для всех q , и, следовательно,

$$R \subseteq \bar{R}_{q_1} \sqcap \bar{R}_{q_2} \sqcap \cdots \sqcap \bar{R}_{q_k} \qquad (8.5)$$

для произвольных $q_1, \dots, q_k$ (подпоследовательность индексов из $(1, \dots, n)$).

В частности, если положить $q_1 = 1$, ... , $q_k = n$, то выражение (8.5) примет вид:

$$R \subseteq \bar{R}_1 \sqcap \bar{R}_2 \sqcap \cdots \sqcap \bar{R}_n ,$$

где $R_1, \dots, R_n$ - проекции R на $U_1, \dots, U_n$ соответственно, а $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_n$ - их цилиндрические продолжения. Но из определения декартова произведения следует, что

$$\bar{R}_1 \sqcap \cdots \sqcap \bar{R}_n = R_1 \times \cdots \times R_n ,$$

откуда вытекает

Предложение. Если R есть n-арное размытое отношение в $U_1 \times \cdots \times U_n$ и $R_1, \dots, R_n$ - его проекции на $U_1, \dots, U_n$, то

$$R \subseteq R_1 \times \cdots \times R_n \qquad (8.6)$$

(см. рис. 4.)

С помощью понятия цилиндрического продолжения можно дать интуитивную интерпретацию композиции размытых отношений. Пусть R и S - бинарные размытые отношения в $U_1 \times U_2$ и $U_2 \times U_3$. Пусть $\bar{R}$ и $\bar{S}$ - цилиндрические продолжения R и S в $U_1 \times U_2 \times U_3$. Тогда из определения композиции $R \circ S$ следует, что

$$R \circ S = \mathrm{Proj}\, \bar{R} \sqcap \bar{S} \text{ на } U_1 \times U_3 .$$

Если R и S таковы, что

$$\mathrm{Proj}\ R \text{ на } U_2 = \mathrm{Proj}\ S \text{ на } U_2 ,$$

то $\bar{R} \sqcap \bar{S}$ становится соединением R и S. Основное свойство соединения R и S можно сформулировать так:

Предложение. Если R и S - размытые отношения в $U_1 \times U_2$, $U_2 \times U_3$ соответственно, а $\bar{R} \sqcap \bar{S}$ - соединение R и S, то

$$R = \mathrm{Proj}\ \bar{R} \sqcap \bar{S} \text{ на } U_1 \times U_2 ,$$

$$S = \mathrm{Proj}\ \bar{R} \sqcap \bar{S} \text{ на } U_2 \times U_3 .$$

Таким образом, R и S можно восстановить, зная соединение R и S (доказательство можно найти в /2/).

Приведем основное свойство проекции:

Предложение. Если R -нормальное отношение, то и каждая из его проекций - нормальное отношение (доказательство см. в /2/).

Исходя из определений операций над размытыми множествами, можно определить операции над размытыми отношениями. Можно также ввести определения некоторых операций над размытыми отношениями, не сводящихся непосредственно к теоретико-множественным.

Если R - размытое отношение в U, то обратное размытое отношение R^{-1} определяется так: $\mu_{R^{-1}} = 1 - \mu_R$.

Произведение размытых отношений R и S обозначается RS и определяется так: $\mu_{RS} = \mu_R \cdot \mu_S$. Для этого произведения справедливы ассоциативный и дистрибутивный законы:

$$(RS)Q = R(SQ), \quad (R \sqcup S)Q = (RQ) \sqcup (SQ).$$

Заметим, что степень размытого отношения R^n мы определяем на основе введенного понятия композиции отношений $R \circ S$.

Операция транзитивного замыкания $R|$: отношение $uR|v$ считается выполненным, если существует цепочка элементов из $U(u_0, \dots, u_n)$, такая, что между соседями в этой цепочке выполнено отношение R, т.е. заданы степени принадлежности пар (u_i, u_{i+1}) во множестве R :

$$\mu_R(u_0, u_1); \ \mu_R(u_1, u_2); \cdots \mu_R(u_{n-1}, u_n).$$

Можно показать /7/, что эта операция представима в виде объединения всех степеней этого отношения —

$$R = R| = R \sqcup R^2 \sqcup R^3 \sqcup \cdots \sqcup R^e \sqcup \cdots.$$

По определению, сила связи цепочки ($u_0, u_1, \dots u_n$) равна $min\{\mu_R(u_0, u_1), \dots \mu_R(u_{n-1}, u_n)\}$. Условие транзитивности формулируется следующим образом: степень принадлежности u_i и u_j в R ($\langle i, j \rangle$ - элемент композиции R^e) равна силе связи цепи наибольшей длины из u_i в u_j.

Особенность размытых отношений заключается в том, что с их помощью можно определить уровневые множества и записать условие разрешимости: $R = \bigsqcup_\alpha \alpha R_\alpha$, где $0 < \alpha \leq 1$ и αR_α есть размытое множество, определяемое через функцию принадлежности

$$\mu_{\alpha R_\alpha}(u,v)=\begin{cases}\alpha, & \text{для } (u,v)\in R_\alpha\\ 0, & \text{для } (u,v)\notin R_\alpha .\end{cases}$$

Конструктивно отношение эквивалентности (симметричное, рефлексивное, транзитивное) определяется заданием системы непересекающихся подмножеств. Но во многих задачах условие непересечения подмножеств оказывается слишком жестким и приходится строить последовательность пересекающихся классов. Формально это можно сделать "ослаблением" транзитивности в определении эквивалентности /7/.

Отношение R называется отношением размытого подобия, если оно рефлексивно: $\mu_R(u,u)=1$ для всех u, принадлежащих области задания, симметрично: $\mu_R(u,v)=\mu_R(v,u)$ для всех u, v, транзитивно: $\mu_R(u,\omega)\geq \max_v \min \times$ $\times[\mu_R(u,v),\mu_R(v,\omega)]$ для всех u, v, ω. Последнее условие равносильно записи $R = R\circ R$.

Пример (8.3).

Приведем матрицу подобия для шести элементов $U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$.

$$[\mu_R]=\begin{bmatrix} I & 0,2 & I & 0,6 & 0,2 & 0,6\\ 0,2 & I & 0,2 & 0,2 & 0,8 & 0,2\\ I & 0,2 & I & 0,6 & 0,2 & 0,6\\ 0,6 & 0,2 & 0,6 & I & 0,2 & 0,8\\ 0,2 & 0,8 & 0,2 & 0,2 & I & I,2\\ 0,6 & 0,2 & 0,6 & 0,8 & 0,2 & I \end{bmatrix}$$

Выпишем уровневые множества, соответствующие $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$:

$R_{0,2} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6)\}$, $R_{0,8} = \{(u_2 u_5), (u_4 u_6), (u_1 u_3)\}$,

$R_{0,6} = \{(u_2 u_5), (u_1 u_2 u_4 u_6)\}$, $R_1 = \{(u_1 u_3), (u_4), (u_6), (u_2), (u_5)\}$.

Легко показать /7/, что если R есть отношение размытого подобия, то множества R_α являются классами эквивалентности.

Рассматривая отношение размытого подобия на множестве объектов, можно получить разбиение его на классы эквивалентности с формально определенными границами между ними; при этом в классы включаются те пары объектов (u, v), степени принадлежности которых лежат в данном интервале $0 \leq \alpha_i \leq \mu_R(u,v) \leq \alpha_{i+1} \leq 1$, где α_i, α_{i+1} – пороги отбора в классы эквивалентности. На практике, когда матрица подобия имеет очень большую размерность, пороги отбора определяются с помощью весов размытых множеств-классов подобия (см. /7/).

Отношение R в пространстве U называется отношением размытого частичного порядка (или размытым частичным порядком), если оно рефлексивно: $\mu_R = (u, u) = 1$ для всех u, антисимметрично: $\mu_R(u, v) > 0$ и $\mu_R(v, u) > 0 \Longrightarrow u, v$ для всех u, v, транзитивно: $\mu_R(u, \omega) \geq \max_v \min \times [\mu_R(u,v), \mu_R(v,u)]$ для всех u, v, ω.

Пример (8.4).

В качестве примера приведем матрицу отношения размытого частичного порядка на множестве из шести элементов /7/.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Основное свойство отношения размытого частичного порядка следующее: пусть $R = \bigsqcup_{\alpha} \alpha R_{\alpha}$ и $0 < \alpha \leq 1$ является условием разрешимости множества с введенным в нем отношением размытого частичного порядка R. Тогда каждое отношение R_{α} является частичным порядком в U.

Отношение размытого частичного порядка называется совершенным, если для любой пары (u, v) верно либо $\mu_R(u,v) > 0$, либо $\mu_R(v,u) > 0$.

Отношение R в U называется отношением размытого квазипорядка (или размытым предпорядком), если оно рефлексивно и транзитивно.

Пример такого отношения в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 1 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 1 & 0{,}8 & 1 & 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}6 & 1 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}2 & 1 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}6 & 0{,}9 & 0{,}9 & 1 \end{bmatrix}$$

Соответствующее условие разрешимости записывается в виде:

8

Отношение R в U называется отношением размытого строгого порядка, если оно антирефлексивно: $\mu_R(u,v)>0 \Rightarrow u \neq v$, транзитивно: $\mu_R(u,\omega) \geq \max_v \min[\mu_R(u,v), \mu_R(v,\omega)]$.

Содержательными примерами размытого строгого порядка могут служить размытое отношение $<$ для целых или вещественных чисел и размытое отношение включения $\subset$ для множеств.

Отношение размытого строгого порядка R в U называется совершенным (линейным), если для всякой пары несовпадающих элементов u , v верно $\mu_R(u,v)>0$ и $\mu_R(v,u)>0$.

Условие разрешимости для размытых строгих порядков позволяет задавать множества с введенными на них отношениями строгих порядков /7/.

Отношение размытого строгого порядка $<$ на U называется отношением размытого древесного порядка, если:

1. Из того, что $u_i < u_j$ и $u_j < u_k$, следует, что u_j и u_k сравнимы.

2. Во множестве $\langle U, < \rangle$ существует наибольший элемент.

Тогда пару $\langle U, < \rangle$ называют размытым деревом, а наибольший элемент - корнем дерева /7/.

В заключение приведем теорему о существовании биективного отображения σ между множествами с различными размытыми порядками.

Теорема. Пусть P - размытый частичный порядок на U. Тогда существует размытый совершенный строгий порядок L в равномощном множестве V и биективное отображение $\sigma: U \rightarrow V$

так, что

$$\forall (u,v)\in U \text{ и } \mu_P(u,v)>0 \Rightarrow \mu_L(\sigma(u),\sigma(v))=\mu_P(u,v).$$

(доказательство см. в /3/).

9. Выпуклость, ограниченность и отделимость размытых множеств в евклидовом пространстве.

Пусть пространство U является евклидовым пространством размерности K, обозначим его E^K /7/.

Пусть далее $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, Λ – произвольные размытые множества. Выпуклая комбинация обозначается через $(\mathcal{A}, \mathcal{B}; \Lambda)$ и определяется соотношением $(\mathcal{A},\mathcal{B};\Lambda)=\Lambda\mathcal{A}\sqcup\neg\Lambda\mathcal{B}$.

Размытое множество $\mathcal{A}$ в E^K называется выпуклым, если уровневые множества $\Gamma_\alpha=\{x\mid\mu_{\mathcal{A}}(u)\geq\alpha\}$ выпуклы для всех $\alpha\in[0,1]$.

Можно доказать (см. /I/), что этому равносильно другое определение выпуклости: размытое множество $\mathcal{A}$ называется выпуклым, если $\mu_{\mathcal{A}}[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\geq\min[\mu_{\mathcal{A}}(x_1),\mu_{\mathcal{A}}(x_2)]$ для всех $x_1, x_2\in E^K$ и $\lambda\in[0,1]$.

Второе определение никак не связано с выпуклостью функции $\mu(x)$. Основное свойство выпуклых размытых множеств состоит в том, что если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выпуклые, то их пересечение также выпукло.

Размытое множество $\mathcal{A}$ ограничено в E^K, если множества $\Gamma_\alpha=\{x\mid\mu_{\mathcal{A}}(x)\geq 0\}$ ограничены для всех $\alpha>0$.

Возможны две интерпретации этого определения. Во-первых, для каждого $\alpha > 0$ существует множество $R(\alpha)$ такое, что $\|x\| < R(\alpha)$ для всех $x \in \Gamma_\alpha$. Во-вторых, для каждого $\varepsilon > 0$ существует гиперплоскость H такая, что $\mu_A(x) \leq \varepsilon$ для x, лежащих по ту сторону от H, которая не содержит начала координат /7/.

Лемма. Пусть A - ограниченное размытое множество и пусть $M = \sup_x \mu_A(x)$. Тогда существует по меньшей мере одна точка x_0, на которой принимается значение M в том смысле, что любая ε-окрестность точки x_0 содержит точки множества $Q(\varepsilon) = \{x \mid \mu_A(x) \geq \mu - \varepsilon\}$ (доказательство см. в /7/).

Размытое множество A в пространстве E^K слабо выпукло, если точка, лежащая посредине двух размытых точке в Γ_α, лежит вне множества Γ_α.

Размытое множество A в E^K сильно выпукло, если для любых двух различных точек x_1 и x_2 для любого λ в открытом интервале (0,I) $\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] > \min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)]$.

Понятно, что из сильной выпуклости не следует слабой и наоборот. Можно показать, что если A и B - слабо выпуклы (сильно выпуклы, ограничены), то их пересечение (а для последнего и объединение) является слабовыпуклым (сильно выпуклым, ограниченным). Можно также доказать, что если A - ограниченное, сильно выпуклое множество, то x_0 (см. лемму) единственна, и что если A - выпукло, то его проекция на любую гиперплоскость является также выпуклой /I/.

Пусть A и B - ограниченные размытые множества и H - гиперплоскость в E^K, определенная уравнением $h(x)=0$.

Пусть K_H – числовая переменная, зависящая от H, такая, что $\mu_A(x) \leq K_H$ по одну сторону от H и $\mu_B(x) \leq K_H$ – по другую. Обозначим $\mu_H = \inf K_H$. Число $D = 1 - \mu_H$ называется степенью отделимости.

Теорема отделимости. Пусть A и B – ограниченные выпуклые размытые множества в E^K с наибольшими степенями принадлежности μ_A и μ_B. Пусть μ – максимальная степень пересечения A и B. Тогда $D = 1 - \mu$ – степень отделимости A и B (доказательство см. в /I/).

Эта теорема играет особо важную роль при распознавании образов.

Поступила 28.I. 1979

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

I. L.A.Zadeh, Fuzzy sets, Inf. Control, 8, N3, 1965.

2. Л.Заде. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М., "Мир", 1976.

3. L.A.Zadeh, Similarity relations, and fuzzy orderings. Inf .Sci., 3.N1-2 1971.

4. A. Kaufmann, Theory of fuzzy sets, Masson, Paris, 1972.

5. Л.Заде. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений. В сб. "Математика сегодня", "Знание", 1974.

6. J.G.Brown, A note on fuzzy sets, Inf. Control, 18, 1971.

7. М.П.Реброва. Размытые множества в теории классификации. НТИ, информационные процессы и системы, 10, 1976.

8. Л.А.Гусев, И.М.Смирнова. Размытые множества. Теория и приложения. "Автоматика и телемеханика", 1973, № 5.

9. L.A.Zadeh, Proc. of. inter. conference on man and computer, France, S.Kanger, Basel 1972.

10. R.E.Bellman, M.Giertz, On the analitic formalism of the theory of fuzzy sets, Inf. Sci, 5, 1973

11. L.A. Zadeh, A fuzzy-set-theoretic interpretation of linguistic hadges, Jour. of Cybernetics, 2, 1972.

12. A.De Luca, S.Termini, A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory. Inf. Contr., 20, 1972.

13. С.А.Орловский. Об одной задаче принятия решений в нечетко определенной обстановке. В сб. "Вопросы прикладной математики", вып. I, Иркутск, 1976.

14. M.Mizumoto, K.Tanaka. Some properties of fuzzy sets of type 2, Inf. Control, 31, 1976.

15. G.Birkhoff, Lattice theory, 3-rd ed. American Math. Society Colloquium Publications, vol. XXV, Providence, RI, 1967.

16. A.De Luca, S.Termini, Algebraic properties of fuzzy sets, J. Math. Anal. Appl., 40, 1972.

თ. მანჯაფარაშვილი

ფიზიკურ გაზომვათა თეორია და არამკაფიო სიმრავლეები

რეზიუმე

ნაშრომში არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის საფუძველზე განხილულია გაზომვათა ზოგადი თეორიის უმთავრესი ნაწილი – ფიზიკურ გაზომვათა თეორია.

ნაშრომი შედგება ორი ნაწილისაგან. პირველ ნაწილში მოცემულია არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებების, არამკაფიო ხდომილებებისა და არამკაფიო პროცესების აღწერის ზოგადი მიმოხილვა, ნაშრომის მეორე ნაწილში განხილულია ფიზიკურ გაზომვათა თეორია.

T.Manjaparashvili

THE THEORY OF PHYSICAL MEASUREMENTS AND FUZZY SETS

Summary

The theory of physical measurements – the principal part of the general theory of measurements – is considered on the basis of the theory of fuzzy sets.

The paper consists of two parts. In the first part the main concepts of the theory of fuzzy sets, fuzzy events and fuzzy processes are reviewed. In the second part the theory of physical measurements is considered.

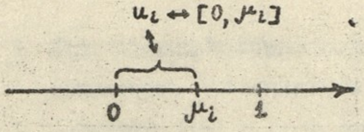

Рис. I

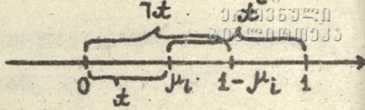

Рис. 2

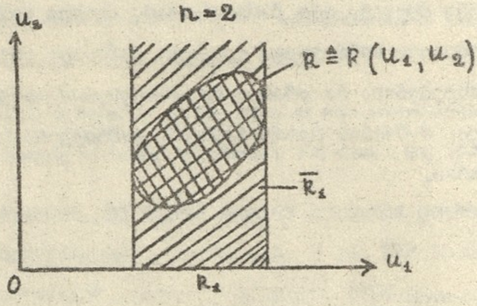

Рис. 3

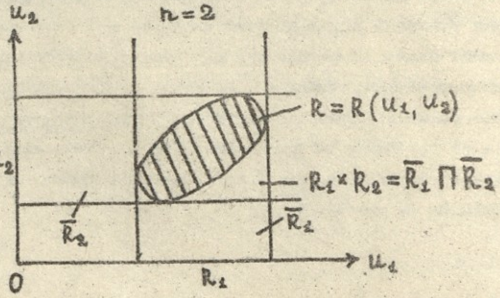

Рис. 4

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

И.И.Шуштакашвили

Задача оптимизации систем массового обслуживания заключается в определении наилучших по выбранному критерию эффективности значений характеристик системы, поддающихся управляющему воздействию. В современных АСУ критерий эффективности, как правило, должен достаточно полно характеризовать экономическую эффективность работы системы, включающей систему массового обслуживания, источники требований, а также другие системы, связанные с характером исходящего потока обслуженных требований.

Для современных систем массового обслуживания характерно наличие большого числа взаимосвязей между отдельными элементами системы. Внешние связи систем массового обслуживания можно условно разделить на две большие группы. К первой группе отнесем те из внешних связей, с помощью которых данная система влияет на функционирование других систем. Связи, входящие в эту группу, назовем "выходами" из системы. Ко второй группе отнесем внешние связи, с помощью которых осуществляется влияние других систем на данную. Такие связи назовем "входами" в систему.

Прежде чем приступить к оптимизации системы массового обслуживания, необходимо выделить ее из состава более крупной экономической системы (предприятия, отрасли народного хозяйства). При моделировании системы массового обслуживания необходимо заменить сложные модели связанных с ней систем моделями их связей. Среди входов выделенной системы необходимо выявить поддающиеся нашему воздействию, то есть входы, основные характеристики которых могут служить в качестве оптимизируемых параметров. Кроме характеристик входов в систему при решении задачи оптимизации в качестве оптимизируемых параметров могут рассматриваться практически все основные характеристики самой системы (состав каналов обслуживания, дисциплина обслуживания и т.д.). Выбор критерия эффективности должен обеспечить возможность оценки качества работы системы массового обслуживания с учетом влияния "выходов" системы на качество работы других подсистем, связанных с данной.

После того, как выбран критерий эффективности, определен состав оптимизируемых параметров, допустимые границы их измерения и имеющиеся ограничения, должны быть построены модели или моделирующие алгоритмы, имитирующие работу системы массового обслуживания и ее внешние связи, а также позволяющие проводить оценку критерия эффективности по известному значению вектора оптимизируемых параметров.

Общий алгоритм решения задачи оптимизации системы массового обслуживания, наряду с "блоком моделирования", в котором производятся анализ работы системы при определенных значениях оптимизируемых параметров и оценка значения функции качества, включает также "блок-оптимизатор". Этот блок осуществляет управление движением по пространству оптимизируемых параметров, обеспечивая улучшение значений функции качества и приближение к зоне оптимума.

Примем, что в общем виде качество функционирования системы массового обслуживания можно оценить с помощью функционала

$$\Phi=\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k),$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – выходные параметры СМО, а на величины x_i накладываются ограничения типа

$$f_j(x_1,\dots, x_n)\geq 0, \quad a_i \leq x_i \leq b_i, \quad 1\leq j\leq m, \qquad (\mathrm{I})$$

где a_i и b_i в общем случае зависят от $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Отметим, что величины $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ нередко носят случайный характер и в ряде случаев зависят от $x_1, \dots, x_n$

Задача оптимизации состоит в определении таких значений оптимизируемых параметров x_i, чтобы значение функционала Φ приняло оптимальное значение при выполнении всех ограничений.

Таким образом, задача оптимизации системы массового обслуживания может быть сведена к задаче оптимизации многомерного функционала. Проанализируем работу алгоритма оптимизации более подробно, приведя его поэтапное описание.

Этап I. Как правило, этот этап заключается в реализации методом Монте-Карло значений оптимизируемых параметров $x_1, \dots, x_n$ по формулам $x_i = \xi_i (b_i - a_i) + a_i$, где ξ_i, $1 \le i \le n$ – значение случайной величины, равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$.

Этап II. На этом этапе для "разыгранных" значений $x_1, \dots, x_n$ производится проверка ограничений $f_j(x_1, \dots, x_n) \ge 0$, $1 \le j \le m$. В случае удовлетворения всем ограничениям, управление передается на этап III; в противном случае необходимо перейти к новому розыгрышу $x_1, \dots, x_n$, передав управление на этап I.

Этап Ш. Этот этап состоит в многократной (N раз) реализации блока моделирования, где величина N определяется представительностью выборки и достоверностью проводимого на основе выборки статистического анализа. В результате работы этапа Ш мы получаем выборочную совокупность значений $\Phi_1^{(1)}, \dots, \Phi_N^{(1)}$, где индекс сверху означает номер точки поиска, а индекс снизу - порядковый номер разыгранного значения критерия качества работы системы. В дальнейшем управление передается на этап IУ, если реализация этапа Ш имела место непосредственно после выполнения этапа II, и на этап УI в случае, если передача управления на этап Ш имела место с этапа У.

Этап IУ. На этом этапе осуществляется шаговой поиск в пространстве оптимизируемых параметров $x_1, \dots, x_n$. Такого рода поиск может быть осуществлен либо методами шагового локального случайного поиска, либо известными методами математического программирования.

В результате проведения поиска по пространству параметров $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$, переходим в новую точку $x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}$, которую в векторном виде обозначим $\vec{X}_2$ (в отличие от старой точки поиска $\vec{X}_1$).

Этап У. Этот этап заключается в проверке ограничений (I) для точки $\vec{X}_2$. Если хотя бы одно из ограничений не выполняется, управление передается на этап IУ с последующим шагом поиска вновь из старой точки $\vec{X}_1$. Если все ограничения выполнены и точка $\vec{X}_2$ принадлежит пространству решений, управление передается на этап III.

Этап УI. Этот этап заключается в проверке гипотезы о том, какая из двух точек $\vec{X}_2$ и $\vec{X}_1$ ближе к оптимальной в смысле принятия критерием Φ оптимального значения. Для простоты и удобства изложения примем, что оптимальность критерия Φ принимается в смысле максимума. В этом случае необходимо выбрать одну из трех статистических гипотез:

$$H_1 : x > 0,$$
$$H_2 : x = 0,$$
$$H_3 : x < 0,$$

где $x > 0$ означает, что в требуемом смысле значение функционала $\Phi(\vec{X})$ в точке $\vec{X}_1$ больше, чем в точке $\vec{X}_2$; $x = 0$ означает, что значения функционалов в точках $\vec{X}_1$ и $\vec{X}_2$ совпадают и, наконец, $x < 0$ означает, что следует перейти в точку $\vec{X}_2$, так как значение функционала в точке $\vec{X}_2$ в среднем больше, чем в точке $\vec{X}_1$. Проверку статистических гипотез на этапе УI, на наш взгляд, лучше всего производить с помощью критерия Стьюдента. Если нами принимается гипотеза H_3, то управление передается на этап УII. В противном случае переходим к выполнению этапа IУ, реализуя поиск из старой точки $\vec{X}_1$.

Этап УII. Определяем абсолютную (либо относительную) величину отклонения $\Phi(\vec{X}_2)$ от $\Phi(\vec{X}_1)$ на основе вводимой нами метрики в пространстве N переменных. Если

$$\Phi(\vec{X}_2)-\Phi(\vec{X}_1) \geqslant \varepsilon ,$$

либо для случая относительного отклонения

$$\frac{\Phi(\vec{x}_2)-\Phi(\vec{x}_1)}{\Phi(\vec{x}_1)} \geqslant \varepsilon ,$$

управление передается на этап IУ, причем поиск производится из новой точки $\vec{X}_2$, которая становится на место $\vec{X}_1$. В противном случае управление передается на этап УIII. В дальнейшем работа этапов III-УII происходит циклически, причем каждый раз точка $\vec{X}_2$ становится на старой $\vec{X}_1$.

Этап УIII. На этом этапе происходит печать значений оптимизируемых параметров $x_1, \dots, x_n$ (для последней точки поиска) и значений соответствующей выборки $\Phi(\vec{X})$.

Этап IX. Этап состоит в многократной (r раз) реализации этапов I-УIII с получением наборов локально-оптимальных значений $x_1, \ldots, x_n$.

Этап X. На основе статистического анализа происходит сравнение r локально-оптимальных выборок и выбор на основе критерия Стьюдента наиболее оптимальной из них. Соответствующее значение функционала Φ принимается в качестве оптимума, что и завершает реализацию алгоритма.

Для большинства современных систем массового обслуживания весь процесс обслуживания является многофазным, так как обслуживающая система состоит из некоторого количества подсистем, работающих последовательно. Следующая подсистема приступает к обслуживанию заявки лишь тогда, когда обслуживание на предыдущей фазе полностью закончено (система с ожиданием).

Сначала на основе обработки статистического материала необходимо построить законы распределения, которые адекватны распределению входного потока заявок, а также распределению каналов обслуживания. При моделировании системы массового обслуживания на ЭВМ методом Монте-Карло входной поток заявок обычно аппроксимируется пуассоновским потоком с плотностью $\rho(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, где λ - плотность потока заявок, а каналы обслуживания аппроксимируются нормальным законом распределения.

В качестве аппарата поиска в область оптимизируемых переменных наилучшим является алгоритм случайного поиска с "парными пробами". Последний основан на комбинации поискового и рабочих шагов оптимизируемой системы. Сначала делаются две пробы $\vec{X}_i + \alpha\vec{\xi}$ и $\vec{X}_i - \alpha\vec{\xi}$, где $\vec{\xi}$ – случайный единичный вектор в пространстве оптимизируемых переменных, α – величина пробного шага, $\vec{X}_i$ – i -ая точка поиска. Если значение $\Phi(\vec{X}_i + \alpha\vec{\xi})$ оптимальнее $\Phi(\vec{X}_i - \alpha\vec{\xi})$, то система делает рабочий шаг $\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \beta\vec{\xi}$, где β – величина рабочего шага; и наоборот, при оптимальности $\Phi(\vec{X}_i - \alpha\vec{\xi})$ более удачный рабочий шаг β делается в направлении $\vec{X}_i - \beta\vec{\xi}$.

Таким образом, алгоритм случайного поиска с парными пробами позволяет осуществить сходимость к экстремальной точке пространства решений.

Поступила I.II.1979

Кафедра теоретической механики

ЛИТЕРАТУРА

I. Н.Н.Бек, Д.И.Голенко, Статистические методы оптимизации в экономических исследованиях, М., Статистика, 1971.

2. Д.И.Голенко, Статистические методы в экономических системах, М., Статистика, 1970.

ი.მუშტაკაშვილი

მასობრივი მომსახურების სისტემების იმიტაციის ზოგიერთი საკითხი

რეზიუმე

განიხილება მასობრივი მომსახურების სისტემის სტატისტიკური ტიპის იმიტაციური მოდელი, მოდელი შეიცავს სპეციალურ ბლოკ-ოპტიმიზატორს, რომელიც ემყარება ლოკალური შემთხვევითი ძებნის გამოყენებას,

I.Shushtakashvili

SOME QUESTIONS OF OPTIMIZATION OF QUEUING SYSTEMS

Summary

A statistical-type simulation model of a queuing system is constructed. It contains a special optimizing block based on the use of local random search.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

К ВОПРОСУ ОПТИМАЛЬНОСТИ СЖАТИЯ ДИСКРЕТНОЙ ИНФОРМАЦИИ В ЧЕТЫРЕХЗНАЧНОЙ СИСТЕМЕ КОДИРОВАНИЯ

Н.Д.Нанобашвили

Введение

В работе рассматривается схема сжатия, которая реализуется в результате предварительного расширения исходной информационно-кодирующей системы / I,2 /. Говоря иначе, в принятую систему представления информации необходимо ввести некоторую избыточность. Основной целью введения избыточности, среди других возможных[I] факторов, является образование в коде символов - признаков и параметров, которые обеспечили бы возможность построения не только схемы сжатия, но и однозначного декодирования сжатой информации.

При такой постановке задачи сжатия информации понятие / 3,4 / "источник кодирования" становится в определенной мере неоднозначным. Точнее, возникает необходимость наличия, по крайней мере, двух источников кодирования. Первый -

---

I Например, надежность и помехозащищенность кода.

- это источник, генерирующий исходную кодовую последовательность, характеризующуюся универсальностью, простотой представления и реализацией. Например, двоичная кодовая последовательность. Можно считать, что эта кодовая последовательность отображает связь источника с внешней средой.

Второй источник - это преобразователь исходной кодовой последовательности во вторичную - расширенную систему, содержащую специфические признаки в буквах и фрагментах, необходимых для их дальнейшей переработки по схеме сжатия.

Очевидно, что при таком подходе к вопросу синтеза схемы сжатия, одной из основных проблем должен являться вопрос выбора и определения второго источника-преобразователя. В данной работе в основе критерия выбора второго источника-преобразователя положено выполнение следующих условий:

А) Получение больших значений коэффициента сжатия информации путем построения оптимального выходного алфавита источника-преобразователя.

Б) Операторы преобразования первичного алфавита во вторичную с точки зрения реализации должны быть простейшими[I].

В) Преобразование исходной информации в источнике-преобразователе во вторичный - выходной алфавит - должно осуществляться перестановочной схемой.

Целесообразность требований (А) и (В) является очевидной. Уточним в этом аспекте целесообразность (В). Получение

I Степень сложности не должна превышать сложность таких элементарных операций, как сложение, умножение.

на выходе источника такого универсального алфавита, который позволял бы в течение одного цикла получать большие числовые значения коэффициента сжатия K_c для всех возможных случаев представления дискретной информации, является не простой задачей.

Решение этой задачи можно найти в многоциклических процессах сжатия информации. С этой точки зрения интересными моделями, позволяющими осуществлять циклические процессы сжатия, являются перестановочные схемы записи и сжатия дискретной информации.

ПОИСК МИНИМАЛЬНОГО АЛФАВИТА

Введем некоторые обозначения и определения: n - число букв в искомом алфавите $A(n)$; V_{mn} - кодовый вектор-фрагмент в n-буквенном алфавите, состоящем из m букв; $\ell_{k=2}(V_{mn})$ - длина вектора фрагмента V_{mn} в битах; K - модуль; $R(V_{mn})p$ - кодовая последовательность из p совокупности фрагментов V_{mn}.

Определение I. Количество неэквивалентных состояний вектора V_{mn}, соответствующее числу битов, записанных в V_{mn} перестановочной схемой, называется информационной емкостью $M(V_{mn})$ вектора V_{mn} в алфавите $A(4)$.

Пример I. Этот пример интересен, в основном, с точки зрения познавательного значения.

Пусть вектор - фрагмент V_{mn} в четырехбуквенном алфавите $A(4) \to (a_0 a_1 a_2 a_3) \to (0123) \bmod 4$ состоит из двух букв, т.е.

$$V_{mn} = V_{24} \rightarrow a_0 a_3 \rightarrow 03 \ (mod\, 4); \quad a_i \in \{0,1,2,3\}.$$

Допустим также, что имеется исходная двоичная кодовая последовательность $B = b_{11} b_{10} b_9 \dots b_2 b_1 b_0 \rightarrow 111111111111$, равная двенадцати битам. Основными законами композиции, лежащими в основе перестановочной схемы записи информации, примем операции сложения $\overset{4}{+}$ по $mod\, 4$ и замещения $\overleftrightarrow{A}$, которые в совокупности образуют некомутативную систему

$$\overset{4}{+} \cdot \overleftrightarrow{A} \neq \overleftrightarrow{A} \cdot \overset{4}{+}$$

Последовательность записи перестановочной схемой представим в двух этапах.

I. Операция суммирования: один "бит" информации суммируется по $mod\, 4$ без переноса с элементом a_3 вектора V_{24} и образуется новый элемент $a_3' = a_3 \overset{4}{+} 1$.

2. Если $a_3' = a_0$, то элементы a_3' и a_0 переставляются, замещая друг друга в исходных позициях. Число неэквивалентных состояний, полученных в результате записи кодовой последовательности $B = b_1 b_2 \cdots b_n$ в фрагменте V_{24}, равно $N = 12$. При этом переходы между состояниями характеризуются следующей последовательностью:

$$a_0 a_3 \rightarrow a_3 a_0 \rightarrow a_3 a_1 \rightarrow a_3 a_2 \rightarrow a_2 a_3 \rightarrow a_2 a_0 \rightarrow a_2 a_1 \rightarrow a_1 a_2 \rightarrow$$
$$\rightarrow a_1 a_3 \rightarrow a_1 a_0 \rightarrow a_0 a_1 \rightarrow a_0 a_2 \rightarrow a_0 a_3;$$

информационная емкость фрагмента при рассматриваемой схеме записи равна

$$M(V_{mn}) = n(n-1).$$

Определение 2. Коэффициентом сжатия информации K_c в классе фрагмента V_{mn} называется соотношение информационной емкости $M(V_{mn})$ к длине самого фрагмента, т.е.

$$K_c = \frac{M(V_{mn})}{\ell_{k=2}(V_{mn})} . \qquad (I)$$

Примечание: Нетрудно показать, что (I) справедливо также в классе кодовой последовательности $R(V_{mn})\rho$.

Очевидно, что процесс сжатия реализуется, когда

$$K_c > 1, \qquad (2)$$

чему соответствует

$$\ell_{k=2}(V_{mn}) < M(V_{mn}); \qquad (3)$$

условие (3) будем считать основным условием сжатия при перестановочной схеме записи дискретной информации.

Схемы сжатия, основанные на использовании условия (3), позволяют:

I) реализовать циклические схемы сжатия информации для получения больших значений коэффициента сжатия информации;

2) реализовать цепи сжатия, где каждый предыдущий фрагмент, в котором завершен цикл сжатия, будет преобразован в двоичную последовательность и записан далее в последующий фрагмент согласно принятой схеме сжатия.

Без существенного ограничения общности можно принять, что $M(V_{mn}) = const$. Примем также, что $1 < m \leq n$, тогда можно показать, что максимальное значение коэффициента сжатия K_ρ согласно (I) будет определяться только количеством букв в алфавите $A(n)$, что в свою очередь, определяет длину $\ell_{k=2}(V_{mn})$ фрагмента V_{mn} в алфавите $A(n)$.

Далее, поскольку схема записи информации является перестановочной, то значение информационной емкости $M(V_{mn})$ целесообразно выразить с точностью до факториального закона

$$M(V_{mn}) = n! - an; \quad a = 0,1,2; \quad m = n - a. \qquad (4)$$

Примечание: В общем смысле, выбор факториального закона (4) не ограничивает область применения условия (3).

Однако этот закон достаточно хорошо отражает реализуемость неравенства (3).

Имеет место

Теорема I. Если информационная емкость $M(V_{mn})$ вектора фрагмента V_{mn} определяется как

$$M(V_{mn}) = n! - an ,$$

то минимальное количество n букв в алфавите $A(n)$, при котором условие сжатия

$$\ell_{k=2}(V_{mn}) < M(V_{mn})$$

является реализуемым, равно $n = n_{min} = 4$.

Доказательство теоремы сводится к решению неравенства $\ell_{k=2}(V_{mn}) < M(V_{mn})$. Представим его в развернутом виде:

$$m(\lg_2[n] + c) < n! - an,$$

последнее неравенство в свою очередь приводится к виду:

$$\begin{cases} m(\lg_2[n]+1)<n!-an; & n\neq 2^k;\ n\neq 0 \\ m(\lg_2[n])<n!-an; & n=2^k;\ k=1,2,3\ldots \end{cases} \qquad (5)$$

Для $a=0,1,2$ в целых неотрицательного числа неравенство (5) имеет смысл, когда

$$3<n<\infty,$$

чему соответствует минимальное значение

$$n=n_{min}=4.$$

Таким образом, теорема доказана.

Следствие I. Согласно теореме I нижней границей реализуемости условия $\ell_{k=2}(V_{mn})<M(V_{mn})$ является четырехбуквенный алфавит $A(4)$. Следовательно, в алфавите $A(4)$ кодовый фрагмент V_{mn} обладает наименьшей длиной, чему согласно (5) соответствует возможность получения максимального значения коэффициента сжатия K_c в алфавите $A(4)$.

Примечание: Поскольку запись информации в V_{mn} происходит перестановочным законом, то в любом другом алфавите $A(n)$, где $n>4$, информационная емкость кодовых фрагментов V_{mn} в $A(n)$ будет больше, чем таковая фрагментов V_{m4} в алфавите $A(4)$, т.е.

$$M(V_{m4})<M(V_{mn}) \quad \text{при } n>4. \qquad (6)$$

Однако неравенство (6) носит непринципиальный характер. Это объясняется тем, что в результате реализации циклических цепей сжатия кодовых фрагментов всегда можно достичь равенства

$$M(V_{mn})=q\cdot(V_{m4}), \qquad (7)$$

где q -количество циклов, реализуемых по отношению фрагментов в алфавите $A(4)$. Возможность реализации (7) утверждает истинность выводов, сделанных в следствии I.

Следствие 2. Когда $a=0$, кодовая последовательность $R(V_{mn})_P$ состоит из четырехбуквенных фрагментов-векторов V_{44} в алфавите $A(4)\to(a_3,a_2,a_1,a_0)\to(3,2,1,0)\bmod 4$. Информационная емкость фрагмента V_{44} равна $M(V_{mn})=n!=24$. Условие сжатия реализуемо:

$$\ell_{k=2}(V_{mn})=8<M(V_{44})=24.$$

При трехбуквенном алфавите $A(3)\to(a_2,a_1,a_0)\to(2,1,0)\bmod 3$ сжатие не реализуется, так как $\ell_{k=2}(V_{43})=8>M(V_{43})=6$.

Следствие 3. При $a=1$ последовательность $R(V_{mn})_P$ состоит из трехбуквенных фрагментов-векторов V_{34} в алфавите $A(4)$. Информационная емкость $M(V_{34})=20$, что означает, что исходный вектор V_{34}^{1} может принять максимум 20 состояний, соответствующих 20 битам информации, записанных в V_{34}^{1}. Условие сжатия реализуемо, так как $\ell_{k=2}(V_{34})=6<M(V_{34})=20$. В трехбуквенном алфавите сжатие нереализуемо: $\ell_{k=2}(V_{33})=6>M(V_{33})=3$.

Следствие 4. При $a=2$ $R(V_{mn})_P$ состоит из двухбуквенных ($m=2$) фрагментов V_{24}, информационная емкость $M(V_{24})=16$, условие сжатия реализуемо: $\ell_{k=2}(V_{23})=$ $=4>M(V_{23})=0$.

Следствия, вытекающие из теоремы I, позволяют оценить потенциальные возможности перестановочной схемы сжатия информации, заключающейся в возможности записи в каждом фрагменте V_{mn}, по сравнению с его длиной $\ell_{k=2}(V_{mn})$, дополнительного количества информации, равной

$$\Delta M(V_{mn}) = M(V_{mn}) - \ell_{k=2}(V_{mn}) = n! - an - m\, lg_2 [n]. \quad (8)$$

Однако вопросы однозначного декодирования, требующие введения предварительной избыточности при реализации записи и сжатия информации перестановочной схемой, накладывают некоторые дополнительные ограничения как на (8), так и на выбор структуры кодовых фрагментов в схеме сжатия информации.

<u>Определение 3</u>. Последовательность фрагментов $R(V_{mn})\rho$ в алфавите $A(n)$ называется вырожденной, если для сжатия или декодирования становится необходимым с помощью регулярных операторов преобразования приведение последовательности $R(V_{mn})\rho$ к подклассу фрагментов специальной конструкции $R(V^*_{mn})\rho$, где $\{V^*_{mn}\} \subset \{V_{mn}\}$.

Понятие вырожденности, являющееся при перестановочной схеме записи одним из необходимых условий сжатия и однозначного декодирования, определяет также причину необходимого сужения информационной емкости от величины n^m до $M(V_{mn}) = n! - an, \ m \leq n$, при которой среднее значение коэффициента вырожденности K_ℓ будет определяться соотношением

$$K_\ell = \frac{n^m}{n! - an}. \quad (9)$$

В общем случае значение информационной емкости можно выразить как

$$M(V_{mn}) = \frac{n^m}{K_в},$$

где $K_в$ – коэффициент вырожденности, где $K_в = 2, 3, 4 \ldots$

<u>Теорема 2</u>. Если представленная в четырехбуквенном алфавите $A(4)$ кодовая последовательность $R(V_{mn})_p$ является вырожденной, то максимальными значениями коэффициента сжатия K_c будут обладать такие кодовые комбинации, когда в $R(V_{mn})_p$ каждый фрагмент-вектор будет представлен в виде $V_{mn} = V_{34}$, т.е. когда код является триплетным.

Поскольку количество букв в алфавите $A(n)$ и фрагменте V_{mn} является фиксированным $(1 < m \leq 4,\ n = 4)$, доказательство теоремы можно представить непосредственно в числовых результатах. В связи с этим рассмотрим три случая.

I. $m = 2$, $V_{mn} = V_{24}$, т.е. векторы-фрагменты состоят из двух букв. Тогда согласно теореме I, $a = 2$, $M(V_{mn}) = 16$, среднее значение коэффициента вырожденности

$$K_в = \frac{n^m}{n! - an} = \frac{4^2}{4! - 2 \cdot 4} = 1.$$

Поскольку $K_в = 1$, дуплетный код $(m = 2)$ не вырожден и, согласно условию теоремы, в данном случае он выпадает из сферы поставленной задачи.

2. $m = 3$, $V_{mn} = V_{34}$, т.е. фрагменты кодовой последовательности $R(V_{mn})_p$ образованы из трех букв. Тогда $a = 1$, $M(V_{mn}) = 20$, коэффициент вырожденности $K_в > 1$, т.к.

$$K_в = \frac{n^m}{n! - an} = \frac{4^3}{4! - 4} \cong 3,$$

коэффициент сжатия информации

$$K_c = \frac{n! - an}{\ell_{k=2}(V_{mn})} = \frac{4! - 4}{6} \cong 3{,}3.$$

3. $m=4$, $V_{mn} = V_{44}$, т.е. кодовая последовательность образована из четырехбуквенных фрагментов. Тогда $a=0$, $M(V_{mn})=24$, коэффициент вырожденности

$$K_в = \frac{n^m}{n! - an} = \frac{4^4}{4! - 0\cdot 4} \cong 10,$$

коэффициент сжатия информации

$$K_c = \frac{n! - an}{\ell_{k=2}(V_{mn})} = 3.$$

Таким образом, теорема доказана.

<u>Следствие I</u>. Согласно доказательству теоремы $K_c(V_{34}) = 3{,}3 > K_c(V_{44}) = 3$. Следовательно, при перестановочной схеме записи и сжатия информации кодовая последовательность $\mathcal{R}(V_{mn})\rho$ в четырехбуквенном алфавите $\mathcal{A}(4)$ характеризуется наибольшим значением коэффициента сжатия K_c, когда при среднем значении коэффициента вырожденности $K_в = \frac{n^m}{M(V_{mn})} = 3$ каждый вектор-фрагмент V_{mn} состоит из трех букв $(m=3)$, т.е. когда код является триплетным.

СХЕМА СЖАТИЯ

Рассмотрим один из возможных вариантов схемы сжатия информации в алфавите $\mathcal{A}(4)$. Схема сжатия основана на склеивании монотонных пар кодовых фрагментов в последовательности $\mathcal{R}(V_{mn})\rho$.

Введем следующие обозначения и понятия: $B=b_1 b_2 \cdots b_i \cdots b_n$ – вектор двоичной последовательности длины n, $b_i \in \{0,1\}$, $i=1,2..n$, $C=c_{11} c_{12} \cdots c_{1K}; \cdots c_{J1} c_{J2} \cdots c_{Ji} \cdots c_{JK}; \cdots c_{\frac{n}{J}1} c_{\frac{n}{J}2} \cdots c_{\frac{n}{J}K}$;

n – элементная кодовая последовательность, состоящая из $\frac{n}{J}$ количества слов, где $\frac{n}{J}=1,2,3,4\ldots$, $c_{Ji} \in \{0,1,2,3\}$, $K=2,4,6,8$ определяет возможное число элементов в слове.

$$V=V_{11} V_{12} \cdots V_{1\frac{K}{J}}; \cdots V_{J1} V_{J2} \cdots V_{J\frac{K}{2}}; \cdots V_{\frac{n}{J}1} V_{\frac{n}{J}2} \cdots V_{\frac{n}{J}\cdot\frac{K}{2}}$$

является n – элементной кодовой последовательностью, состоящей из $\frac{n}{J}$ количества фрагментов-векторов.

Основные законы композиции определяются на множестве операторов

$$E=\{\xRightarrow{m_1}, \overset{m_1}{X}, \overset{m_1}{+}, \zeta\},$$

где $\xRightarrow{m_1}$ – оператор преобразования из двоичной последовательности $B=b_1 b_2 \ldots b_n$ в m_1-ную кодовую систему $R(V_{mn})$; $\overset{m_1}{X}$, $\overset{m_1}{+}$ – соответственно операторы умножения и суммирования по $mod\ m_1$; ζ – оператор расчленения слов на две соответствующие части в кодовой последовательности C. Кодовые последовательности C и V являются промежуточными результатами, полученными после обработки последовательности B во втором источнике-преобразователе. Выходным результатом считается определенный подкласс $V^* \subset V$, фрагменты которого удовлетворяют условиям внутренней и внешней монотонности.

<u>Определение I.</u> Фрагменты $V_{J1}^{*} V_{J2}^{*} \cdot\cdot V_{Ji}^{*} \cdot\cdot V_{J,\frac{K}{2}}^{*}$ являются внутренне монотонными, если между элементами фрагмента выполняются следующие условия:

$$V_{Ji} = V_{J,i+1} (mod\ 4) \qquad (II)$$

или

$$V_{J,i} \overset{4}{+} 1 = V_{J,i+1} (mod\ 4).$$

<u>Определение 2</u>. Два любых смежных фрагмента $V_{J1} V_{J2} \cdots V_{J\frac{K}{2}}$ и $V_{(J+1)1} \cdots V_{(J+1)\frac{K}{2}}$ являются в отношении друг друга внешне монотонными, если между соседними элементами этих фрагментов выполняются следующие условия:

$$V_{J,\frac{K}{2}} = V_{(J+1),1} (mod\ 4)$$

или

$$V_{J,\frac{K}{2}} + 1 = V_{(J+1),1} \qquad (I2)$$

Для реализации подкласса фрагментов со свойствами внутренней и внешней монотонности используется схема перекодирования, состоящая из следующих этапов:

I) Образование кодовой последовательности

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 \\ c_2 &= (b_2 \overset{4}{+} c_1) \bmod 4 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_n &= (b_n \overset{4}{+} c_{n-1}) \bmod 4 \end{aligned} \qquad (I3)$$

Образованная по (I3) кодовая последовательность C удовлетворяет условиям внутренней и внешней монотонности. Далее задача заключается в образовании кодовой последовательности V из фрагментов, удовлетворяющих условиям внутренней и внешней монотонности, и, что существенно, состоящей из меньшего количества букв $n_1 < n$ по сравнению с последовательностью C.

2) На последующих этапах схемы сжатия используется условие монотонности (I) и (2), из которых вытекают следующие особенности кодирующей схемы в $A(4)$:

а) при удвоении кодовой последовательности C образуется двухкомпонентная последовательность A_2.

$$A_2 = a_1 a_2 a_3 \cdots a_i \cdots a_n = C \overset{4}{\times} 2; \quad a_i \in \{0, 2\};$$

б) из последовательности A_2 можно произвести однозначное восстановление первичной информации (B), записанной в векторе C.

Теорема 3. Оба свойства (а) и (б) одновременно реализуемы для монотонной кодовой последовательности, образованной только в четырехзначной системе кодирования.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что по крайней мере хотя бы одно из свойств (а) или (б) не реализуется ни в одной системе счисления, кроме с $mod\,4$.

Рассмотрим с этой целью общий случай, когда указанной схемой перекодирования образована монотонная кодовая последовательность в системе счисления с модулем m_1, где $m_1 \geqslant 3$ (случай $m_1 = 2$ очевиден ввиду его тривиальности). Допустим, далее, что по крайней мере в одном фрагменте $C_J = C_{J1} C_{J2} \cdots C_{JK} \subset C$ все элементы отличны друг от друга. В таком случае, если рассмотреть произведение $(2 \overset{m_1}{\times} C_J)$, то двухкомпонентный вектор A_2 не образуется ни в одной системе счисления, кроме системы с $\mod 4$, что вытекает из следующих известных /5/ соотношений:

$$2 \overset{4}{\times} 2 \equiv 0 \pmod 4,$$

$$2 \overset{4}{\times} 0 \equiv 0 \pmod 4,$$

что и доказывает теорему.

<u>Следствие</u>. Рассматриваемая схема перекодирования позволяет произвольный вектор-фрагмент в четырехзначной системе кодирования представить в виде следующей суммы:

$$C_J = C_{J(1,\frac{K}{2})} + C_{J(\frac{K}{2},K)}, \tag{I4}$$

где $C_{J(1,\frac{K}{2})}$ – расщепленная часть фрагмента, состоящая от I до $\frac{K}{2}$ элемента, $C_{J(\frac{K}{2},K)}$ – часть, состоящая от $\frac{K}{2}$ до K элемента.

Рассмотренная теорема и вытекающие из нее следствия позволяют реализовать сжатие дискретной информации, основанной на циклическом преобразовании с последующим сжатием произвольного фрагмента-вектора в монотонный по следующей схеме:

$$\text{I)}\ \mathcal{B} \overset{4}{\Longrightarrow} C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_K \end{bmatrix} \begin{array}{l} \nearrow\ C_{1,\frac{K}{2}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{\frac{K}{2}} \end{bmatrix} \\[2ex] \searrow\ C_{\frac{K}{2},K} = \begin{bmatrix} c_{\frac{K}{2}} \\ \vdots \\ c_K \end{bmatrix} \longrightarrow C_{\frac{K}{2},K} \overset{4}{\times} 2 = A_K \end{array} \tag{I5}$$

2) $C_{1,\frac{K}{2}} \overset{4}{+} A_2 = V_{1,\frac{K}{2}}$. (16)

(I5) и (I6) повторяются циклически до тех пор, пока элементы фрагмента $V_{1,\frac{K}{2}}$ не образуют монотонную последовательность.

Пример: Пусть задана двоичная кодовая последовательность $B_1 = 1110011000111100$; количество фрагментов примем $J=4$, а длину $K=4$.

Проследим схему сжатия

$$B_1 = 1110.0110.0111.1100 \overset{4}{\Longrightarrow} \overbrace{1233, 3011, 1230, 1222}^{C} \rightarrow [12 \overset{4}{+} (33 \overset{4}{\times} 2)],$$
$$[30 \overset{4}{+} (11 \overset{4}{\times} 2)], [12 \overset{4}{+} (30 \overset{4}{\times} 2)], [12 \overset{4}{+} (22 \overset{4}{\times} 2)] \rightarrow 1100, 0110, 1110, 0110 \overset{4}{\Longrightarrow}$$
$$\overset{4}{\Longrightarrow} 1223, 3012 \rightarrow 1001, 1010.$$

Цикл сжатия, состоящий из двух шагов, образовывает кодовую последовательность I2233012, состоящую из двух фрагментов I223 и 3012, удовлетворяющих условиям внутренней и внешней монотонности. В данном примере, в теоретическом плане, в течение одного цикла сжатия, количество символов уменьшается в два раза. Однако, в практическом отношении, в многоциклических процессах сжатия и для однозначного декодирования целесообразно добавлять несколько символов в конце каждого цикла сжатия. Такая процедура только увеличивает количество циклов для достижения искомого значения коэффициента сжатия информации.

Рассмотрим теперь специфичность отражения понятия вырожденности в рассматриваемой схеме сжатия и перекодирования.

12

С этой целью, без существенного ограничения общности, рассмотрим для ясности полный цикл схемы перекодирования из двоичной последовательности B в последовательность двухзначных фрагментов V в алфавите $A(4)$. Эта последовательность фрагментов V образует замкнутую систему со свойствами группоида / 6 /.

$$11 \to 0101 \xRightarrow{4} 21 \to 1001 \xRightarrow{4} 31 \to 1101 \xRightarrow{4} 10 \to 0100 \xRightarrow{4} 23 \to 1011 \xRightarrow{4} 13 \to$$

$$\to 0111 \xRightarrow{4} 20 \to 1000 \xRightarrow{4} 33 \to 1111 \xRightarrow{4} 32 \to 1110 \xRightarrow{4} 30 \to 1100 \xRightarrow{4} 12 \to$$

$$\to 0110 \xRightarrow{4} 01 \to 0001 \xRightarrow{4} 02 \to 0010 \xRightarrow{4} 22 \to 1010 \xRightarrow{4} 11.$$

В этой последовательности только пять фрагментов II, 23, 33, I2, 0I удовлетворяют условиям внутренней монотонности. Остальные фрагменты являются необходимыми звеньями в цепи образования монотонных фрагментов и разбиваются на следующие группы вырожденных фрагментов 11(21, 31, 10); 23(13. 03, 20); 33(32); 30(0); 12(0); 01(02, 22).

Здесь одни нули в скобках указывают, что соответствующие монотонные фрагменты, как, например, 30 и I2, не содержат вырожденные фрагменты.

Вырожденные фрагменты играют важную роль в процессе декодирования. Они указывают направление процесса декодирования при восстановлении исходной информации, сжатой и представленной в цепях монотонных кодовых фрагментов.

В заключение следует отметить, что рассматриваемую в работе схему сжатия можно модифицировать в многочисленных вариантах. Основной целью модификации, среди других возможных, является уменьшение среднего времени циклов сжатия и декодирования.

Поступила 9.II.1979. Кафедра кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Д.Нанобашвили, Сообщения АН ГССР, 83, № 2, август, 1976.
2. Н.Д.Нанобашвили, Сообщения АН ГССР, 85, № 3, март, 1977.
3. E.N.Gilbert and E.F.Moore, Variable-length binary encodings, Bell sys. Tech. J., vol. 28, July, 1959.
4. J.W.Schwartz and R.C.Barker, Bit-plane encoding: a technique for source encoding. IEEE Transactions on aerospace and electronic systems, vol. AES-2, N4, july, 1966.
5. И.Н.Виноградов, Основы теории чисел, М., 1975.
6. В.Магнус и др., Комбинаторная теория групп, М., 1974.

ნ.ნანობაშვილი

დისკრეტული ინფორმაციის შეკუმშვის ოპტიმალურობის საკითხი ორნიშნა კოდირების სისტემაში

რეზიუმე

განხილულია ინფორმაციის შეკუმშვის კოეფიციენტის მაქსიმალური მნიშვნელობის მიღების საკითხი ორნიშნა სისტემებში, ნაჩვენებია აგრეთვე შეკუმშვის კოეფიციენტის მინიმალური ზღვრის. შესაძლებლობა ციკლური პროცესების გამოყენების საფუძველზე.

N.Nanobashvili

CONCERNING THE OPTIMALITY OF DATA COMPRESSION IN FOUR-LETTER CODING

Summary

The feasibility of obtaining the maximum coefficient of ata compression by coding information with a four-letter alphabet is shown.

Recording and data compression is realized by using a transposition scheme of coding. It is shown that when the code is degenerate a four-letter coded sequence has a maximum coefficient of data compression when each coded word consists of three letters. A special property of the transformation scheme permits to obtain a monotonous increase of the data compression coefficient by using a cyclic process.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
212, 1980

О ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ КОНЦЕПТУАЛЬНОГО СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА К ЗАДАЧАМ МАРКЕТИНГА

З.Ю.Кочладзе

Слово "маркетинг" в современном буржуазном деловом мире чаще понимают как функцию администрации фирмы, состоящую в организации и управлении всем комплексом деловой деятельности, связанной с выявлением и превращением покупательной способности потребителя в реальный спрос на определенный товар или услугу, а также с доведением данного товара или данной услуги до конечного потребителя, с тем чтобы обеспечить получение намеченных фирмой прибылей или достижения других целей /I/. Другими словами, можно сказать, что маркетинг - это программа деятельности фирмы, которая начинается с изучения спроса потребителей и заканчивается его удовлетворением. При этом фирма, естественно, преследует одну единственную цель - получить максимальную, а точнее максимальную монополистическую прибыль.

Хотя в целом маркетинг и не приемлем для социалистического образа производства, но методы организации сбыта, изучения спроса потребителей с целью их максимального удовлетворения успешно могут быть использованы и в социалистическом производстве, особенно сейчас, когда при планомерном насыщении рынка товарами особое внимание обращается на качество этих товаров, на их внешний вид и упаковку.

При разработке и внедрении комплексных мероприятий маркетинга основными являются методы изучения и прогнозирования рынка, так как вся деятельность фирмы при реализации программы маркетинга определяется знанием рынка и малейшие неточности в этих знаниях могут оказаться губительными для деятельности и жизнеспособности фирмы. Поэтому, естественно, повышаются и требования надежности к методам изучения рынка. При комплексном изучении рынка основным является определение "потребительских требований", предъявляемых потребителями к готовой продукции.

Можно сказать, что понятие "потребительские требования" является достаточно сложным и расплывчатым, поскольку в зависимости от социальных, экономических, психологических и других факторов разные покупатели по-разному оценивают один и тот же товар. Но нельзя отрицать того факта, что существуют какие-то критерии, признаки, свойства, по которым покупатели производят свой выбор и которые являются одинаковыми для всех (или же для некоторой группы) потребителей. Однако очень трудно получить информацию о таких критериях, так как не существует общих, формальных методов формирования и обобщения этих требований.

Для решения такой задачи мы предлагаем использовать методы концептуального системного анализа (КСА) /2,3,4,5/, имеющие известные преимущества перед другими методами /4,5/.

Из них для осуществления поставленных перед нами целей важнейшими являются следующие: I) Методы, разрешающие работать единообразно как о количественными, так и о качественными признаками (факторами). Это очень важно, так как при определении потребительских требований наряду с количественными факторами приходится иметь дело и с качественными факторами. 2) Методы вычисления концепт-моделей /3/. Они разрешают выделить единообразно все основные, существенные факторы, которые определяют суть явления. Такое выделение происходит вполне объективно, автоматически, без вмешательства экспериментатора. 3) Методы КСА. Они разрешают обрабатывать любое количество информации, с гарантией, что не возникнет проблема перебора. Поэтому при решении задач маркетинга можно не производить предварительного отбора информации, не включать в описание модели все факторы, характеризующие объект, и быть уверенным, что ни один из существенных факторов не выпадет из нашей модели.

Рассмотрим модель применения КСА при определении покупательских требований. Пример касается определения основных характеристик упаковки моющих средств. Как известно, основной функцией упаковки является защита содержимого при перевозке, хранении и эксплуатации. Однако в последнее время упаковка несет и информацию о содержимом, имеет рекламный характер и содержит в себе некоторый эстетический элемент, способствуя, тем самым, реализации продукции. Эти функции в некотором смысле даже оттесняют на второй план основную функцию и поэтому упаковка как бы становится самостоятельной частью, основным элементом всей продукции /I/.

Для вычисления концепт-модели упаковочной коробки применялся метод аналитических эвристик /3/. Упаковочные коробки описывались тринадцатью признаками. Перечисление этих признаков со своими значениями дано в таблице № I. Затем были рассмотрены "реальные траектории" /3/ упаковочных коробок. Их число достигло двадцати. Описание этих коробок со своими оценками дано в таблице № 2. Здесь $\mathcal{E}_п$ означает оценку потребителей, а $\mathcal{E}_т$ – оценку работников торговли. Оценка траектории производилась следующим образом. Реальные траектории предъявлялись отдельным лицам (в первом случае потребителям, во втором – работникам торговли) с просьбой высказать мнение об упаковочной коробке (нравится, не нравится). Затем производили простое суммирование этих оценок и выводили окончательную оценку. Символы "+" и "-" означают, что данная коробка, соответственно, нравится или не нравится большинству опрошенных людей.

Обработав эти траектории с помощью метода аналитических эвристик, мы получили бифункционалы /3/ как для концепта потребителей, так и для концепта работников торговли:

$$\mathcal{S}_п = (A_2 A_3 A_8 A_{11} \bar{A}_{12} \check{A}_1 \check{A}_4 \check{A}_5 \check{A}_6 \check{A}_7 \check{A}_9 \check{A}_{10} \check{A}_{13}) \qquad (I)$$

$$\mathcal{S}_т = (A_2 A_3 A_8 A_{11} \check{A}_2 \check{A}_4 A_5 \check{A}_6 \check{A}_7 \check{A}_9 \check{A}_{10} \check{A}_{12} \check{A}_{13})$$

Как видно из приведенных выражений, разница между требованиями потребителей и работников торговли состоит лишь в признаке $\check{A}_{12}$ – выходит или нет данное моющее средство в другой упаковке (в выражениях (I) $\vee$ означает, что данный признак является несущественным и не определяет структуру концепт-модели). Для работников торговли не имеет значения, выходит или нет данное моющее средство в другой упаковке, а потребителей устраивает, чтобы это средство не выпускали в другой упаковке (состояние признака соответствует именно этому значению). Нетрудно увидеть, что

$$\mathcal{S}_{\varepsilon_т \cap \varepsilon_п} = \mathcal{S}_п ,$$

где $\mathcal{S}_{\varepsilon_т \cap \varepsilon_п}$ – объединенные требования покупателей и работников торговли. Проведем анализ полученной формулы.

$\check{A}_1$ – внешняя форма упаковки, этому символу соответствуют следующие значения: параллелепипед, конус, усеченный конус, цилиндр и т.д.; $\check{A}_3$ – материал упаковочной коробки, ему соответствуют значения: пластмасса, картон. $\check{A}_в$ – степень твердости коробки, ему соответствуют значения от 0,3 до 0,5 кГ/см^2. $\check{A}_н$ обозначает возможно или нет удобно выставить коробку в витрине, ему соответствует значение "да". $\check{A}_{11}$ – выходит или нет данное моющее средство в другой упаковке, ему соответствует значение "нет". Таким образом, мы видим, что потребителям нравятся коробки, изготовленные из пластмассы или картона, имеющие правильную геометрическую форму. Степень твердости такой коробки дает гарантию, что она не испортится во время эксплуатации, ее можно удобно выставить в витрине, её сразу заметит потребитель, поскольку моющее средство не выходит в другой упаковке.

Этот пример наглядно показывает преимущества применения методов КСА при решении подобных задач в системе маркетинга И действительно, требования покупателей выражены формально, при этом наглядно видна вся структура этих требований, и мы знаем, какие признаки являются существенными и обязательными для упаковочных коробок моющих средств.

Такие объективные и формализованные модели потребительских требований могут найти широкое применение в процессах производства и продажи. В первую очередь они окажут большую услугу конструкторам и создателям новых товаров. Зная существенные свойства, которые являются обязательными для потребителя, их можно будет использовать при конструировании новых товаров. Кроме того, эти модели помогут составлять наиболее оптимальные и выполнимые программы маркетинга.

ТАБЛИЦА № I.

№№	Обозначение признака	Содержание	Значение признака
I.	A_1	Цвет упаковочной коробки	I.Белый; 2.Черный; 3.Синий; 4.Красный; 5.Зеленый; 6.Коричневый; 7.Желтый; 8.Комбинированный
2.	A_2	Внешняя форма упаковочной коробки	I.Прямоугольный параллелепипед; 2.Конус; 3.Усеченный конус; Цилиндр; 5.Сфера; 6.Упаковка не имеет определенной формы.

ТАБЛИЦА № I (продолжение)

3.	A_3	Материал упаковочной коробки	I.Бумага; 2.Стекло; 3.Целофан; 4.Пластмасса; 5.Металл; 6.Картон.
4.	A_4	Полный вес (вместе с содержимым, в кг)	I.Меньше 0,2; 2. 0,2-0,3; 3.0,3-0,4; 4.0,4-0;5; 5.0,5-0,6: 6. 0,6-0,7; 7.0,7-0,8; 8. 0,8 и больше.
5.	A_5	Вес крупных партий, упакованных в стандартных контейнерах (60x45x40)	I.Меньше 50 кг 2.Больше 50 кг
6.	A_6	Количество информации	I.Полная информация о составе содержимого, названии, назначении, правилах эксплуатации и хранения, сфере использования, вес, цена. 2. Информация только о сфере использования, название,вес, цена. 3. Название, вес, цена.
7.	A_7	Устойчивость упаковки к влаге	I.Защищает от влаги 2.Не защищает от влаги
8.	A_8	Степень твердости коробки (кг/см^2)	I.Меньше 0,I; 2. 0,I-0,2; 3. 0,2-0,3; 4. 0,3-0,4; 5. 0,4-0,5; 6. 0,5 и больше
9.	A_9	Объем упаковочной коробки (дм^3)	I.Меньше 0,2; 2. 0,2-0,3; 3. 0,3-0,4; 4. 0,4-0,5; 5. 0,5-0,6; 6. 0,6-0,7; 7. 0,7-0,8; 8. 0,8-0,9; 9. 0,9 и больше.

10.	A_{10}	Принцип пользования коробкой	1. Коробка с пробкой; 2. Крышка с резьбой; 3. Коробка без пробки и без крышки с резьбой.
11.	A_{11}	Можно или нет удобно выставить коробку в витрине?	1. Да 2. Нет
12.	A_{12}	Выходит или нет данное моющее средство в другой упаковке?	1. Да 2. Нет
13.	A_{13}	Художественное оформление коробки	1. В художественном оформлении коробки указано назначение ее содержимого 2. В художественном оформлении коробки не указано назначение ее содержимого.

ТАБЛИЦА № 2

№№	Название	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	$\mathcal{E}_T$	$\mathcal{E}_n$
I	БАРФ	3	I	6	3	I	I	2	4	8	3	I	I	I	+	+
2	ДАРЯ	4	I	6	3	I	I	2	4	8	3	I	I	I	+	+
3	ЛОТОС	5	I	6	3	2	2	2	4	7	3	I	I	2	+	+
4	ЦЫПЕКС	8	I	6	3	2	2	2	4	8	3	I	I	2	+	−
5	НОВОСТЬ	I	I	6	2	I	I	2	4	8	3	I	2	2	+	−
6	АЕЛИТА	I	4	4	4	2	2	I	5	7	I	I	I	2	−	+
7	ЛАНДЫШ	I	4	4	4	2	2	I	5	7	I	I	I	2	−	+
8	АЙНА	I	I	6	I	I	I	2	4	9	3	I	I	2	+	−
9	ЧАЙКА	3	I	6	I	I	I	2	4	9	3	I	I	2	+	+
I0	ЛУГА	I	4	6	I	I	2	2	4	7	I	I	I	2	+	+
II	МАТЕТРЕБЕЛИ	4	6	I	I	2	2	2	I	I	3	2	2	2	−	−
I2	ПЕРСОЛЬ	I	6	I	I	2	2	2	I	I	3	2	2	2	−	−
I3	БЕРЕЗКА	I	4	4	4	I	2	I	4	7	I	I	I	2	+	+
I4	АЛЬФИЯ	I	4	4	4	2	2	I	5	7	2	I	I	2	+	+
I5	АЙНА (ГССР)	8	6	I	6	I	I	I	5	7	3	2	2	2	−	−
I6	СВЕЖЕСТЬ	3	I	6	I	I	2	2	2	7	3	I	I	2	−	−
I7	ЛОСК	3	I	6	I	2	I	2	5	7	3	I	I	2	+	+
I8	МЕЧТА	I	4	4	4	2	2	I	4	7	2	I	I	2	−	+
I9	ПЛАНЕТА	3	I	I	I	2	I	2	4	7	I	I	2	2	−	−
20	КАШТАН	I	4	4	4	2	2	I	5	7	2	I	I	2	+	+

Поступила I6.II.I979.

Проблемная лаборатория физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркетинг. Сб.статей, "Прогресс", М., 1974.
2. В.В.Чавчанидзе, К вероятностным механизмам формирования понятий и образов естественным интеллектом. Сообщения АН ГССР, т. 76, № 3, 1974.
3. В.В.Чавчанидзе, Аналитическое решение задачи формирования понятий и распознавания образов, Сообщения АН ГССР, т.61, № 1, 1971.
4. В.В.Чавчанидзе, К теории естественного и искусственного концептуального интеллекта, Материалы IУ международной конференции по искусственному интеллекту (Тбилиси, 3-8 сентября 1975 г.), Тбилиси, 1976.
5. З.Ю.Кочладзе, Н.Ш.Цикарадзе, Концептуальное моделирование производственных систем, Материалы IУ МОКИИ (Тбилиси 3-8 сентября 1975 г.), Тбилиси, 1976.

ზ.ქოჩლაძე

მარკეტინგის ამოცანებში კონცეპტუალური სისტემური ანალიზის გამოყენების შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში განხილულია კონცეპტუალური სისტემური ანალიზის მეთოდების გამოყენების შესაძლებლობა მარკეტინგის სისტემაში ზოგიერთი ამოცანების ამოხსნის დროს. კერძოდ, სარეცხ საშუალებათა შესაფუთი კოლოფების ფორმის დადგენის მაგალითზე ნაჩვენებია, რომ კონცეპტუალური სისტემური ანალიზის გამოყენებით შესაძლებელია მივიღოთ ზუსტი და ფორმალური მიდგომი მომხმარებელთა მოთხოვნილებები-

სა ამა თუ იმ საგანზე. ასეთი ფორმალური მოდელები შეიძლება გამო-ყენებული იქნას ფართო მოხმარების საგნების ახალი მოდელების შექ-მნის დროს.

Z. Kochladze

CONCERNING THE USE OF CONCEPTUAL SYSTEMS ANALYSIS IN MARKETING PROBLEMS

Summary

The paper discusses the possible use of conceptual systems analysis (CSA) in solving some problems in marketing. In particular, the example of determining the shape of packing boxes for washing-machines is ised to demonstrate the feasibility of obtaining a precise and formal model of consumer needs for different commodities by recourse to CSA. Such formal models can be used in constructing new models of consumer goods.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
212, 1980

О СИНТЕЗЕ УКРУПНЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Д.И.Башалейшвили

Построение математической модели укрупняющего объекта / I / не является самоцелью и предпринимается с целью решения различных задач, в том числе задач проектирования и управления.

Значительный практический интерес представляет получение на выходе реального укрупняющего объекта $\mathcal{A}$ такого потока частиц, который обладает желаемыми характеристиками, что равносильно созданию объекта $\mathcal{A}$ с желаемыми свойствами в том случае, когда характеристики входного потока частиц не поддаются изменению.

Заданными (желаемыми) исчерпывающими характеристиками выходного потока частиц могут быть функция или плотность распределения, а более "бедными" - начальные и центральные моменты или семиинварианты.

Задача получения желаемых характеристик выходного потока частиц в принципе может быть решена следующими возможными путями.

Один из путей состоит в том, чтобы при фиксированных характеристиках укрупняющей системы найти такие характеристики входного распределения, которые преобразуются системой в желаемые характеристики выходного распределения. Данную задачу назовем задачей управления укрупняющей системой.

Задача управления укрупняющей системой по желаемой выходной плотности распределения $\varphi(x)$ сводится к решению относительно входной плотности $f(x)$ интегрального уравнения первого рода типа Вольтерра

$$\varphi(x)=\int_0^x K(x-y,y)f(y)dy, \quad x>0,$$

а по желаемому начальному моменту первого порядка выходного распределения γ_1 – к решению элементарного алгебраического уравнения

$$\gamma_1=\beta_1+\alpha_1$$

относительно начального момента первого порядка входного распределения β_1 при заданном начальном моменте первого порядка α_1 функции укрупнения $K(x)$ однородной системы.

В случае неоднородной укрупняющей системы задача управления по желаемому начальному моменту первого порядка не имеет единственного решения, так как задача сводится к решению уравнения

$$\gamma_1=\beta_1+\int_0^\infty \alpha_1(y)f(y)dy$$

относительно неизвестных β_1 и $f(x)$.

Аналогично ставятся задачи управления для желаемых моментов любого другого порядка и семиинвариантов. К сожалению, на практике изменение свойств распределения входного потока частиц не всегда возможно. Поэтому реальные укрупняющие объекты могут оказаться не управляемыми в указанном выше смысле.

Второй путь заключается в следующем. Заданы характеристики входного распределения и желаемые характеристик.. выходного распределения. Надо менять физические параметры укрупняющего объекта таким образом, чтобы на выходе получить поток частиц с желаемыми характеристиками. А это, со своей стороны, означает изменение характеристики самого объекта до нужных величин или функций. Данную задачу назовем задачей параметрического синтеза системы. Однако на практике если и возможно изменение физических параметров, то области их изменения всегда ограничены. Задача осложняется и тем, что желаемые значения физических параметров объекта заранее не известны и их надо искать методом "проб и ошибок". Таким образом, решение задачи параметрического синтеза укрупняющей системы не всегда дает желаемый результат.

Третий путь применяется в том случае, когда решение указанных выше задач невозможно или не дает желаемого результата. В определенных условиях к данному объекту необходимо присоединить один или несколько объектов из заданного класса с целью получения желаемых характеристик выходного распределения. Данную задачу назовем задачей сложной укрупняющей системы. В самом общем случае эту задачу можно сформулировать следующим образом. Заданы укрупняющие системы $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$, т.е. заданы их характеристики и требуется подобрать определенное количество $\nu \leq n$ определенных систем из заданного класса таким образом, чтобы их последовательное соединение давало сложную систему, преобразующую существующую характеристику входного распределения в желаемую характеристику выходного распределения.

Очевидно, что не во всех случаях ставится задача синтеза сложной системы. Она правомерна только при выполнении определенных условий, точнее - соотношений между характеристиками заданных систем, входного и желаемого выходного распределений. Ниже для конкретных характеристик будут указаны такие соотношения.

Степень сложности решаемых задач зависит от требований, предъявляемых к создаваемой сложной системе. В зависимости от желаемой характеристики выходного распределения задача синтеза решается по-разному. Чем "беднее" желаемая характеристика выходного распределения, тем проще решается поставленная задача. Например, решение задачи синтеза по желаемой плотности сложнее, чем по желаемому моменту первого порядка. Однако соответствующие результаты решения задач синтеза могут не совпадать друг с другом, если сравнивать их по одинаковым характеристикам. Ценой простоты решения задачи является неучет некоторых свойств выходного распределения, так как никакие ограничения не накладываются на другие характеристики, кроме начального момента первого порядка. Какие ограничения являются нужными зависит от использования полученного потока частиц на последующем этапе технологии. Дело в том, что "желаемая плотность" не всегда точно или всегда неточно указывается технологом или исследователем, в то время как "бедные" характеристики могут быть указаны точнее, что позволяет решить практическую задачу синтеза проще, быстрее и с меньшими затратами сил и средств. Кроме того, по-видимому, имеющимися средствами желаемая плотность на практике почти никогда не достижима, в то время как желаемая "бедная" характеристика может быть получена сравнительно легко. Такое решение задач параметрического синтеза или сложной системы не обязательно из-за незнания точных "желаний", тем более, если любое приближенное решение улучшает существующий производственный или непроизводственный процесс. Однако это не означает того, что мы в последующих разделах отказываемся от точных решений, если указаны точные "желания".

Для получения точных желаемых характеристик выходного потока легче сочетать методы синтеза сложной системы и параметрического синтеза.

Следует отметить, что в случае производства задача синтеза сложной системы решается на базе реальных укрупняющих объектов, выпускаемых промышленностью. Так что под заданным классом укрупняющих систем можно понимать математические модели имеющихся в нашем распоряжении реальных укрупняющих объектов.

Параметрический синтез укрупняющей системы

Задача параметрического синтеза укрупняющей системы заключается в изменении физических параметров укрупняющего объекта до нужных значений с целью получения желаемых характеристик выходного распределения.

Поставленная задача может быть решена исключительно с помощью экспериментов. Эксперимент заключается в следующем. При существующих значениях параметров (которые для нас могут быть неизвестными) определяется характеристика выходного распределения (с помощью измерения размеров частиц и методов математической статистики). Направление изменения значений физического параметра объекта определяется в результате сравнения двух значений характеристики выходного распределения, а величина шага изменения физического параметра зависит от расстояния между достигнутым и желаемым значениями характеристики. Выбор основных параметров и указанного шага зависит от знаний и интуиции экспериментатора. Однако возможен такой случай, когда "желение" не достигается изменением физических параметров (интервал изменения параметров для реальных объектов всегда ограничен). В таком случае для получения желаемой характеристики выходного распределения надо заменить объект другим объектом или применить метод решения задачи синтеза сложной укрупняющей системы.

Очевидно, что при изменении значения физических параметров объекта изменяется функция укрупнения соответствующей укрупняющей системы, однако из-за того, что связь между ними неизвестна, решение задачи параметрического синтеза является достаточно трудной, так как требуется многократное определение оценок характеристик выходного распределения. Степень сложности решения задачи зависит еще от типа характеристики выходного распределения. Действительно, определение оценки начального момента первого порядка легче, чем других порядков или плотности распределения. Кроме того, степень сложности зависит от типа системы. Задача параметрического синтеза в случае однородной укрупняющей системы решается легче, чем в случае неоднородной, поскольку в результате изменения физических параметров объекта легче следить за изменением функции укрупнения однородной системы, чем неоднородной.

Для того чтобы сделать решение поставленной задачи независимым от квалификации экспериментатора и его "удачи", требуется установление количественной связи между физическими параметрами объекта и характеристиками соответствующей системы, что позволяет управлять "поведением" выходного потока частиц. Как мы увидим ниже, определение указанной связи возможно с помощью экспериментов, проведенных над конкретным объектом A.

Рассмотрим однородную линейную укрупняющую систему $\mathcal{A}$, представленную математической моделью / 2 /:

$$\varphi(x)=\int_0^x K(x-y)f(y)dy. \tag{1}$$

Алгебраическая модель для семиинвариантов однородной системы имеет вид / 3 /

$$\tilde{\gamma}_k=\tilde{\beta}_k+\tilde{\alpha}_k. \tag{2}$$

Обозначим векторный физический параметр через $c=(c_1, c_2, \dots, c_m)$, возможными значениями которого является c^i в эксперименте с номером i, $i=\overline{1,n}$, где m - число физических параметров, n - число эксперимен тов. Каждый эксперимент заключается в следующем. В объекте A устанавливается значение c^i и на вход объекта подается поток частиц с имеющимися характеристиками $\tilde{\beta}_\kappa^i$ (в частном случае $\tilde{\beta}_\kappa$ может быть независимой от i). В результате укрупнения частиц на выходе объекта появляется поток с характеристиками $\tilde{\gamma}_\kappa^i$.

По экспериментальным данным $\tilde{\gamma}_\kappa^i - \tilde{\beta}_\kappa^i$ и c^i можно определить (например, методом наименьших квадратов) связь

$$\tilde{\alpha}_\kappa = \Psi_\kappa(c), \quad \kappa = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Следовательно, выражение (2) имеет вид

$$\tilde{\gamma}_\kappa = \Psi_\kappa(c) + \tilde{\beta}_\kappa.$$

Правая часть последнего выражения зависит от векторного параметра c и, следовательно, левая часть должна зависеть от c . В результате получим

$$\tilde{\gamma}_\kappa(c) = \Psi_\kappa(c) + \tilde{\beta}_\kappa. \tag{4}$$

В частных случаях при $\kappa = 1$ и $\kappa = 2$ из выражения (4) следует, что математическое ожидание и дисперсия выходного распределения принимают соответственно вид

$$\gamma_1(c) = \Psi_1(c) + \beta_1,$$

$$\hat{\gamma}_2(c) = \Psi_2(c) + \hat{\beta}_2.$$

Пусть задан желаемый семиинвариант $\tilde{\varkappa}_\kappa$ выходного распределения. Тогда требуется выполнение условия

$$\tilde{\varkappa}_\kappa - \Psi_\kappa(c) - \tilde{\beta}_\kappa = 0, \quad \kappa = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Решение c уравнения (5) будет значением физического параметра, при котором объект на выходе дает желаемый поток частиц.

Возможен случай, когда "желание" не достигается изменением физических параметров (интервал изменения физических параметров для реальных объектов всегда ограничен), т.е. уравнение (5) не имеет решения. Тогда надо заменить объект другим или применить метод решения задачи синтеза сложной укрупняющей системы.

Синтез сложной однородной укрупняющей системы по желаемому семиинварианту

Задача синтеза сложной однородной укрупняющей системы по желаемому семиинварианту $\tilde{\gamma}_k$ порядка k выходного распределения решается легче и компактнее, чем по желаемо му начальному и центральному моменту того же порядка, так как связь между семиинвариантами входного и выходного рас пределений и функций укрупнения подсистем $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ имеет простой вид, а именно

$$\tilde{\gamma}^n_k = \tilde{\beta}'_k + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}^i_k , \quad k=1,2,\dots \qquad (I)$$

Решение задачи синтеза сложной системы $\mathcal{A}$ по желае мому семиинварианту порядка k выходного распределения заключается в минимизации разности $\tilde{\gamma}_k - \tilde{\gamma}^i_k$ по i, т.

$$\underset{o}{\tilde{\gamma}_k} - \tilde{\beta}'_k - \sum_{j=1}^{i} \tilde{\alpha}^j_k = \mu_i(i) \longrightarrow \min_i . \qquad (2)$$

Условие (2) может выполняться при одном фиксированном расположении подсистем в последовательном соединении подсистем $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$. Однако из указанных подсистем можно образовать, кроме указанного выше, еще $n!-1$ расположений подсистем и, следовательно, кроме условия (2) будет еще $n!-1$ аналогичных условий, т.е.

$$\mu_j(i) \to \min_i, \quad j = 2, 3, \dots n! \qquad (3)$$

В результате минимизации будут определены числа $\nu_1, \nu_2, \dots \nu_n$ и $\mu_1(\nu_1), \mu_2(\nu_2), \dots \mu_{n!}(\nu_{n!})$. Из последней группы чисел выбирается наименьшее, т.е. $\min_j \mu_j(\nu_j)$, и соответствующее расположение подсистем. Таким образом, происходит выбор подсистем из заданного класса и их общего количества.

Мерой точности решения поставленной задачи является $\min \mu_j(\nu_j)$.

В частном случае, когда все однородные подсистемы одинаковы, вместо $n!$ условий типа (2) будет одно, а именно

$$\tilde{\gamma}_\kappa - \tilde{\beta}'_\kappa - i\tilde{\alpha}_\kappa = 0; \qquad (4)$$

откуда нужное число подсистем определяется как

$$i = \frac{\tilde{\gamma}_\kappa - \tilde{\beta}'_\kappa}{\tilde{\alpha}_\kappa}. \qquad (5)$$

Очевидно, что когда i - натуральное число, задача решается точно, в противном случае - приближенно.

При $\kappa = 1$ из рассмотренной задачи получается задача синтеза по желаемому начальному моменту первого порядка выходного распределения.

При $\kappa = 2$ получается задача синтеза однородной сложной системы по желаемой дисперсии выходного распределения.

При $\kappa = 3$ получается задача синтеза однородной сложной системы по желаемому центральному моменту третьего порядка выходного распределения и т.д.

Следует отметить, что задача синтеза сложной однородной системы по желаемому семиинварианту любого конечного порядка выходного распределения может быть поставлена только при выполнении условия

$$\tilde{\beta}'_\kappa + \min_i \alpha^i_\kappa < \gamma_\kappa \leq \tilde{\beta}'_\kappa + \sum_{i=1}^{n} \alpha^i_\kappa, \quad i = \overline{1,n}, \tag{6}$$

или, в случае одинаковых подсистем, при

$$\tilde{\beta}'_\kappa + \alpha_\kappa < \gamma_\kappa \leq \tilde{\beta}'_\kappa + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}^i_\kappa . \tag{7}$$

В случае, если в выражениях (6) и (7) выполняются обратные неравенства, требуется решение задачи параметрического синтеза системы с характеристикой $\min\limits_i \tilde{\alpha}^i_\kappa$. Однако не исключен случай, когда решение задачи параметрического синтеза системы также не даст желаемого результата. Тогда надо искать укрупняющий объект вне заданного класса, у которого семиинвариант порядка κ функции укрупнения будет меньше $\min\limits_i \tilde{\alpha}^i_\kappa$.

Более рациональным является другой метод, а именно – поэтапное вычисление ошибки (разностей)

$$\tilde{\Delta}_{\eta}(2)=\tilde{\gamma}_{\kappa}-\tilde{\beta}'_{\kappa}-\sum_{j_\eta=1_\eta}^{2_\eta}\tilde{\alpha}_{\kappa}^{j_\eta}, \quad \eta=1,2,\dots C_n^2$$

$$\tilde{\Delta}_{\eta}(3)=\tilde{\gamma}_{\kappa}-\tilde{\beta}'_{\kappa}-\sum_{j_\eta=1_\eta}^{3_\eta}\tilde{\alpha}_{\kappa}^{j_\eta}, \quad \eta=1,2,\dots C_n^3 \qquad (8)$$

$$\text{-------------------------------}$$

$$\tilde{\Delta}_{\eta}(n)=\tilde{\gamma}_{\kappa}-\tilde{\beta}'_{\kappa}-\sum_{j_\eta=1_\eta}^{n_\eta}\tilde{\alpha}_{\kappa}^{j_\eta}, \quad \eta=C_n^n=1$$

Если на первом этапе (первая строка выражения (8)) среди сложных систем, состоящих из двух подсистем, нет оптимальной то на следующем этапе (вторая строка выражения (8)) оптимальная сложная система ищется среди сложных, состоящих из трех подсистем и т.д.

Под оптимальной понимается сложная система с нулевой ошибкой или с ошибкой меньше заданной величины C. Данная процедура остается в силе и в частном случае векторного критерия оптимальности, точнее, когда под оптимальной сложной системой понимается сложная система с минимальной ошибкой и с минимальным числом составляющих подсистем. Данная процедура нахождения оптимальной проектируемой системы в худшем случае дойдет до вычисления разности $\tilde{\Delta}_{\eta}(n)$. Следовательно, число разностей будет $2^n-(n+1)$. Среди этих разностей наименьшее определяет оптимальную (в смысле минимума ошибки) сложную однородную укрупняющую систему.

Если число сложных систем $2^n-(n+1)$ достаточно большое, то предварительным анализом можно его уменьшить, если указать по отдельности сегменты задания желаемого значения семиинварианта κ -го порядка на выходе сложных систем, состоящих из двух подсистем, из трех и т.д.

Расположим однородные подсистемы по возрастанию семиинвариантов k-го порядка функций укрупнения, т.е.

$$\tilde{\alpha}_k^1 < \tilde{\alpha}_k^2 < \cdots < \tilde{\alpha}_k^n, \quad k=1,2,\ldots$$

Расположение подсистем может меняться в зависимости от k, но для фиксированного k оно будет единственным.

Для фиксированного k желаемое значение семиинварианта k-го порядка на выходе сложной системы может быть выбрано из сегментов

$$\left[\tilde{\beta}_k + \sum_{j=1}^{m} \tilde{\alpha}_k^j, \ \tilde{\beta}_k + \sum_{j=n-m+1}^{n} \tilde{\alpha}_k^j\right], \quad m=\overline{2,n-1},$$

где m - число подсистем, составляющих сложную систему.

Желаемая точка $\tilde{\gamma}_k$ может принадлежать одному или нескольким из этих сегментов, поэтому оптимальная сложная система ищется среди соответствующих этим сегментам сложных систем, а число последних будет меньше, чем $2^n-(n+1)$, так как обычно желаемая точка $\tilde{\gamma}_k$ не принадлежит одновременно всем сегментам. Даже в худшем случае, когда точка $\tilde{\gamma}_k$ принадлежит пересечению всех сегментов, число сложных систем будет $2^n-(n+2)$, так как возможное значение $\tilde{\beta}_k + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_k^j$ не принадлежит ни одному из сегментов. Процедура определения числа сложных систем становится наглядной и простой, если построить указанные выше все сегменты на оси абсцисс.

Длина каждого сегмента

$$\tilde{L}_n^k(m) = \left| \sum_{j=n-m+1}^{n} \tilde{\alpha}_k^j - \sum_{j=1}^{m} \alpha_k^j \right|, \quad k=1,2,\ldots$$

Следует заметить, что при $k>2$ семиинвариант k го порядка может иметь отрицательное значение, например, семиинвариант третьего порядка совпадает с центральным моментом третьего порядка и, в зависимости от вида асимметричности кривой унимодальной плотности распределения, он может иметь как положительное, так и отрицательное значение. Так что указанный выше сегмент может расположиться на отрицательной полуоси при $k>2$. Ниже приводится утверждение, доказательство которого не представляет большого труда.

<u>Утверждение.</u> Функция $\tilde{L}_n^k(m)$, $m=\overline{1,n}$, где $\tilde{\alpha}_k^1<\tilde{\alpha}_k^2<\dots<\tilde{\alpha}_k^n$, обладает следующими свойствами:

1. $\tilde{L}_n^k(m)=\tilde{L}_n^k(n-m)$

2. $\tilde{L}_n^k(m)<\tilde{L}_n^k(m+1)$ при $\begin{cases} m=1,2,\dots\frac{n}{2}, \text{ когда } n=2k \\ m=1,2,\dots\frac{n-1}{2}, \text{ когда } n=2k+1 \end{cases}$

3. $\tilde{L}_n^k(m)>\tilde{L}_n^k(m+1)$ при $\begin{cases} m=\frac{n}{2}+1,\dots n, \text{ когда } n=2k \\ m=\frac{n+1}{2},\frac{n+3}{2},\dots n, \text{ когда } n=2k+1 \end{cases}$

4. $\tilde{L}_n^k\left(\frac{n-1}{2}\right)=\tilde{L}_n^k\left(\frac{n+1}{2}\right)$ при $n=2k+1$, где k – целое положительное число.

В том случае, когда все заданные однородные подсистемы одинаковы, т.е. $\mathcal{A}_1=\mathcal{A}_2=\dots=\mathcal{A}_n$, приведенные выше оба метода нахождения оптимальной сложной системы эквивалентны.

Поступила 23.II.1979

Кафедра кибернетики ТГУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Д.И.Башалеишвили, Идентификация укрупняющей системы. Сообщения АН ГССР, 79, № 2, 1975.
2. Д.И.Башалеишвили, Определение оператора связи между законами распределения (I), Автоматика и телемеханика, № 12, 1964.
3. Д.И.Башалеишвили, Идентификация и синтез укрупняющей и уменьшающей систем, 3. Seminar o experimentalnim modelovani a reseni pravdepodobnostnich problemu.Liblice u Prahy, 1976.

დ.ბაშალეიშვილი

გამამსხვილებელი სისტემის სინთეზის შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში დასმულია გამამსხვილებელი სისტემის პროექტირების ამოცანები - კერძო პარამეტრიული სინთეზისა და რთული სისტემის სინთეზის ამოცანები. მოცემულია ამ ამოცანების ამოხსნის ზოგიერთი მეთოდი.

D.Bashaleishvili

ON THE SYNTHESIS OF AN INTEGRATING SYSTEM

Summary

The paper deals with problems of designing an integrating system. In particular, problems of parametric synthesis and synthesis of complex systems are posed. Certain technique of solving these problems are presented.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

О НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

Г.В.Меладзе, Т.Г.Окроашвили, Н.М.Схиртладзе

Многие задачи современной науки и техники в той или иной мере связаны с решением уравнений газовой динамики (ГД).

Нелинейный характер уравнений ГД, отсутствие хорошо разработанного аналитического аппарата их исследования приводят к тому, что численные методы оказываются фактически единственным эффективным способом их решения.

Для численного решения задач ГД в основном используется метод конечных разностей. Как правило, для одной и той же дифференциальной задачи можно построить большое количество различных разностных схем. Саму дифференциальную задачу в ГД можно сформулировать используя подходы Лагранжа или Эйлера.

В настоящее время при исследовании одномерных нестационарных задач ГД часто вводятся так называемые лагранжевы массовые координаты / I / . Однако существует класс задач, для которых из-за физических соображений необходимо построение математической модели (запись дифференциальных уравнений, постановка начальных и краевых условий) в эйлеровых координатах / 2 /. Например, при изучении процессов вылета из области "горения" α - частиц, нейтронов, и т.д., сопровождающих термоядерную реакцию, при учете оттока массы через торцы плазменного цилиндра во время образования θ - пинча и т.д.

В настоящей работе предлагаются разностные схемы для решения нестационарных задач ГД в эйлеровых координатах. Эти результаты являются частью той работы, которая ведется под руководством академика А.А.Самарского коллективом авторов (Давид Гордезиани, Гамлет Меладзе, Тамаз Окроашвили, Нугзар Схиртладзе - Тбилисский государственный университет; Петр Волосевич, Сергей Курдюмов, Евгений Леванов, Юрий Попов - Институт прикладной математики АН СССР; Анатолий Кузьмин, Владимир Макаров - Киевский государственный университет).

Как известно (см., например, / 3 /), изменения в выделенном объеме газодинамических величин (скорости v , плотности ρ , удельной внутренней энергии ε и т.д.) происходят в результате процессов двоякого рода:

а) потоков этих величин через поверхность, ограничивающую выделенный объем,

б) наличия объемных источников и стоков этих величин. Поэтому, если ввести матрицу плотностей G , матрицу плотностей потоков Q и матрицу удельных мощностей источников (стоков) Ω , то систему одномерных уравнений ГД в общем случае можно представить в виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{r^{\nu}} \frac{\partial}{\partial r} r^{\nu} Q = \Omega , \qquad (1)$$

$$G = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) \end{vmatrix}, \; Q = \begin{vmatrix} \rho v \\ p + \rho v^2 \\ v[\rho(\varepsilon + \frac{v^2}{2}) + p] \end{vmatrix}, \; \Omega = \begin{vmatrix} \Phi \\ \frac{\nu}{2} p + \Psi \\ F \end{vmatrix} \qquad (2)$$

здесь Φ , Ψ , F – функции, выражающие соответственно источники (стоки) массы, импульса и энергии, ν = = 0,1, 2 для случаев плоской осевой и центральной симметрии, соответственно. Остальные обозначения общеприняты (см.,например, / I /).

Величины Φ , Ψ , F могут иметь различную природу происхождения. Так, функция F может представлять собой энергию, вносимую химическими реакциями или уносимую объемным излучением, функция Φ – изменение массы за счет термоядерных реакций или излучения, Ψ – гравитационную силу и т.д.

При определенных предположениях с помощью источников и стоков можно моделировать влияние на движение газа эффектов, обусловленных неодномерностью процессов.

В данной работе Φ трактуется как удельная мощность объемных источников ($\Phi > 0$) или стоков ($\Phi < 0$) массы. Следовательно, $\Psi = v\Phi$ – удельная мощность источников (стоков) импульса, а $F = (\varepsilon + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho})\Phi$ – удельная мощность "производства" суммы кинетической энергии и энтальпии.

Система уравнений ГД (I) – (2) описывает самый общий случай одномерных нестационарных движений газа как сплошной среды. Ниже рассматривается одна частная задача из общего класса – задача о движении газа, вытесняемого поршнем, с учетом источников и стоков при следующих предположениях:

I) газ является совершенным, т.е.

$$p = R\rho T, \quad \varepsilon = \frac{1}{\gamma-1} RT; \tag{3}$$

2) удельная мощность источников (стоков) массы является степенной функцией давления и плотности

$$\Phi = A_0 p^{n_1} \rho^{n_2}; \tag{4}$$

3) в начальный момент времени $t=0$ выполняются условия

$$v(r,0)=0, \quad T(r,0)=0, \quad \rho(r,0)=\rho_0 r^2; \tag{5}$$

4) скорость поршня является степенной функцией времени, т.е.

$$v[r_*(t),t] = v_0 t^{n_0}, \tag{6}$$

где $r_*(t) = \frac{v_0}{n_0+1} t^{n_0+1}$ – закон движения поршня.

При использовании лагранжевых массовых переменных в одномерных задачах, где рассматривается эволюция фиксированной массы газа, упрощается формулировка краевых условий. Здесь лагранжевы координаты границ области неизменны во времени, в то время как в переменных Эйлера эта область заранее, вообще говоря, не известна и $r_*(t)$ в (6) подлежит определению в процессе решения задачи.

Уравнения ГД (I) - это математическое выражение основных законов сохранения (массы, импульса и энергии). Поэтому разумно строить разностную схему так, чтобы в ней также выполнялись аналоги этих законов. Схемы этого типа называются консервативными / I /. Требование консервативности следует считать одним из основных принципов построения разностных схем.

Дальнейшее развитие принципа консервативности привело к понятию полной консервативности / I /. Полностью консервативные схемы для уравнений ГД характеризуются тем, что в них выполняются не только разностные аналоги основных законов сохранения, но также дополнительные соотношения, выражающие баланс отдельных видов энергии.

Однако следует отметить, что справедлива теорема: не существует двухслойных полностью консервативных схем первого порядка аппроксимации для уравнений ГД в переменных Эйлера / 4 /. Поэтому в случае двухслойных разностных схем, рассматриваемых в эйлеровых переменных, мы вынуждены ограничиться так называемыми квазиполностью консервативными схемами.

Предлагаемые ниже разностные схемы предназначены в общем случае для решения одномерных задач ГД с учетом наличия объемных стоков масс в эйлеровых координатах в случае плоской симметрии для политропного газа $(\nu=1,\ \chi\equiv r)$.

Для возможности "сквозного счета" ударных волн вводится искусственная математическая вязкость ("псевдовязкость") вида:

$$\omega = -\frac{\lambda}{2}\rho \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|^{\mu}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \varkappa \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|\right), \qquad (7)$$

где λ , μ , $\varkappa$ - постоянные.

Ниже в разностных уравнениях приняты следующие обозначения: τ_j - временной шаг, h - шаг по пространству:

$$\rho \equiv \rho(x_i, t_j), \ \hat{\rho} \equiv \rho(x_i, t_{j+1}), \ \rho(+1) \equiv \rho(x_{i+1}, t_j),$$

$$\rho(-1) \equiv \rho(x_{i-1}, t_j), \ \rho^{(\sigma)} \equiv \sigma\hat{\rho} + (1-\sigma)\rho,$$

$$q_{(\beta)} \equiv \beta q^j_{i} + (1-\beta) q^j_{i-1} ; \ f^{(\sigma,\sigma_2)} \equiv \sigma f_i^{j+1} + (1-\sigma_1-\sigma_2) f_i^j + \sigma_2 f_i^{j-1} .$$

Следуя / 3 / , / 4 / , можно получить различные варианты разностных схем.

Различие видов схем "а" и "б" в каждом случае (см.ниже) диктуется соображениями устойчивости.

Iа) при $v < 0$

$$\begin{aligned} &\rho_t + \left(v^{(0,5)}(-1)\rho^{(\sigma_1)}\right)_x + A_0\left(\rho^{(\sigma_5)}\rho^{(\sigma_5)}\right)^{1/2} = 0, \\ &\hat{\rho} v_t + \rho^{(\sigma_1)}(+1) v^{(0,5)} \cdot v_x + \left(p^{(\sigma_1)} + \omega\right)_x = 0, \\ &p_t + v^{(0,5)} p_x^{(\sigma_1)} + \gamma p^{(\sigma_1)} v_{\bar{x}}^{(0,5)} + \rho^{(\sigma_5)} A_0 \left(\frac{p^{(\sigma_5)}}{\rho^{(\sigma_5)}}\right)^{1/2} = 0 ; \end{aligned} \qquad (8)$$

Iб) при $v > 0$

$$\begin{aligned} &\rho_t + \left(v^{(0,5)}(-1)\rho^{(\sigma_1)}\right)_x + A_0\left(\rho^{(0,5)}\rho^{(\sigma_5)}\right)^{1/2} = 0, \\ &\hat{\rho} v_t + \rho^{(\sigma_1)}(+1) v_*(+1) v_x + \left(p^{(\sigma_1)} + \omega\right)_x = 0, \\ &p_t + v^{(0,5)} p_x^{(\sigma_1)} + \gamma p^{(\sigma_1)} v_{\bar{x}}^{(0,5)} + \rho^{(\sigma_5)} A_0 \left(\frac{p^{(\sigma_5)}}{\rho^{(\sigma_5)}}\right)^{1/2} = 0. \end{aligned} \qquad (9)$$

В схеме (8), (9) выполнены законы сохранения массы, импульса, а также баланс внутренней энергии, однако они не удовлетворяют закону сохранения полной энергии.

2а) при $v<0$

$$\rho_t + \left(v^{(0,5)}(-1)\rho^{(6_1)}\right)_x + A_0\left(\rho^{(6_5)}\rho^{(6_5)}\right)^{1/2} = 0,$$

$$\hat{\rho} v_t + \rho^{(6_1)}(+1) v_*(+1) v_x + \left(\rho^{(6_1)} + \omega\right)_x = 0, \qquad (10)$$

$$p_t + v^{(0,5)} p_x^{(6_1)} + \gamma p^{(6_1)} v_{\bar{x}}^{(0,5)} + p^{(6_5)} A_0\left(\frac{\rho^{(6_5)}}{\rho^{(6_5)}}\right) = 0,$$

где $v_*(+1) = \dfrac{v_{i+1}+v_i}{2}$ – на равномерной сетке;

2б) при $v>0$

$$\rho_t + \left(v^{(0,5)}(-1)\rho^{(6_1)}\right)_x + A_0\left(\rho^{(6_5)}\rho^{(6_5)}\right)^{1/2} = 0,$$

$$\hat{\rho} v_t + \rho^{(6_1)}(-1) v_* v_{\bar{x}} + p_{\bar{x}}^{(6_1)} + \omega_{\bar{x}} = 0, \qquad (11)$$

$$p_t + v^{(0,5)} p_{\bar{x}}^{(6_1)} + \gamma p^{(6_1)} v_x^{(0,5)} + p^{(6_5)} A_0\left(\frac{\rho^{(6_5)}}{\rho^{(6_5)}}\right) = 0.$$

Уравнения (10), (11) выражают закон сохранения массы, импульса для единицы массы, а также полной и внутренней энергии.

Недостатком схем (10), (11) является то, что она не удовлетворяет закону сохранения импульса для единицы объема.

3а) при $v<0$

$$\rho_t + \left(v^{(0,5)}(-1)\rho^{(6_1)}\right)_x + A_0\left(\rho^{(6_5)}\rho^{(6_5)}\right)^{1/2} = 0,$$

$$\hat{\rho} v_t + \rho^{(6_1)}(+1) v^{(0,5)} v_x + p_{\bar{x}}^{(6_1)} = 0, \qquad (12)$$

$$\left(\frac{p}{\gamma-1} + \rho\frac{v^2}{2}\right)_t + \left[v^{(0,5)}(-1)\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p^{(6_1)} + \rho^{(6_1)}\frac{v^2}{2}\right)\right]_x +$$

$$+A_0\left(\frac{p^{(\sigma_5)}}{\rho^{(\sigma_5)}}\right)^{1/2}\left(\frac{p^{(\sigma_5)}}{\gamma-1}+\rho^{(\sigma_5)}\frac{v^2}{2}\right)=0;$$

3б) при $v>0$

$$\rho_t+\left(v^{(0,5)}(-1)\rho^{(\sigma_1)}\right)_x+A_0\left(p^{(\sigma_5)}\rho^{(\sigma_5)}\right)^{1/2}=0,$$

$$\hat{\rho}v_t+\rho^{(\sigma_1)}(-1)v^{(0,5)}v_{\bar{x}}+p_{\bar{x}}^{(\sigma_1)}=0, \qquad (I3)$$

$$\left(\frac{p}{\gamma-1}+\rho\frac{v^2}{2}\right)_t+\left[v^{(0,5)}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}p^{(\sigma_1)}(-1)+\rho^{(\sigma_1)}(-1)\frac{v^2(-1)}{2}\right)\right]_x+$$

$$+A_0\left(\frac{p^{(\sigma_5)}}{\rho^{(\sigma_5)}}\right)^{1/2}\left(\frac{p^{(\sigma_5)}}{\gamma-1}+\rho^{(\sigma_5)}\frac{v^2}{2}\right)=0.$$

Уравнения (I2), (I3) выражают закон сохранения массы, импульса, полной энергии.

Недостатком схем (I2), (I3) является то, что не выполняется автоматически закон сохранения внутренней энергии.

От перечисленных выше недостатков двуслойных схем можно избавиться с помощью следующих трехслойных схем / 4 / :

$$\left(\rho^{(0,5)}\right)_t+\left[(\rho v)_{(\alpha_1)}^{(\sigma_1,\sigma_2)}\right]_x=0,$$

$$\left(\hat{\rho}^{(0,5)}v_t\right)^{0,5}+\left[(\rho v)_{(\alpha_1)}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(+1)v_x\right]_{(0,5)}+\left(p_{(\alpha_2)}^{(\sigma_3,\sigma_4)}\right)_x=0,$$

$$\left(\hat{\rho}^{(0,5)}\varepsilon_t\right)_t+\left[(\rho v)_{(\alpha_1)}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(+1)\varepsilon_x\right]_{(0,5)}+\left(p_{(\alpha_2)}^{(\sigma_1,\sigma_2)}(+1)v_x\right)_{(0,5)}=0. \qquad (I4)$$

При любых значениях параметров $\alpha_1, \alpha_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ разностная схема (I4) является полностью консервативной. Из этого семейства разностных схем, при соответствующем подборе параметров, можно получить как явные, так и неявные разностные схемы.

Поступила 5.Ш.1979.

Кафедра математического обеспечения ЭВМ

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Самарский, Ю.П.Попов, Разностные схемы газовой динамики, М., "Наука", 1975.
2. П.П.Волосевич, Д.Г.Гордезиани, С.П.Курдюмов, Г.С.Лацабидзе, Е.Н.Леванов, Г.В.Меладзе, Т.Г.Окроашвили, Ю.П. Попов, Н.М.Схиртладзе, О задачах газодинамики и магнитной гидродинамики с учетом источников массы, Препринт ИПМ АН СССР, № 45, 1978.
3. Н.М.Схиртладзе, Об автомодельных решениях уравнений газовой динамики с объемными источниками и стоками. Сообщения АН Грузинской ССР, 90, № 3, 1978.
4. А.В.Кузьмин, В.Л.Макаров, Г.В.Меладзе, О полностью консервативных трехслойных разностных схемах для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера, Доклады семинара ИПМ ТГУ, 12-13, 1978.

ჰ.მელაძე, თ.ოქროაშვილი, ნ.სხირტლაძე

გაზური დინამიკის განტოლებათა ამოხსნის ზოგიერთი რიცხვითი მეთოდის შესახებ ეილერის კოორდინატებში

რეზიუმე

შრომაში აგებულია სხვაობიანი სქემები გაზური დინამიკის ერთგანზომილებიანი ბრტყელი სიმეტრიის კოორდინატებში პოლიტროპული გაზისათვის გარემოში ჩამჭერების (წყაროების) არსებობისას.

H.Meladze, T.Okroashvili, N.Skhirtladze

ON SOME NUMERICAL METHODS OF SOLVING GAS DYNAMICS EQUATIONS WITHIN EULER'S COORDINATES

Summary

Difference schemes are constructed in one-dimensional plane summetry coordinates of gas dynamics for politropic gas in the presence of trappers (sources) in the environment.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

კადრების დენადობის პრობლემების ფსიქოლოგიური საკითხები მრეწველობაში

ი. ფილიაშვილი, ნ. ბერიძე, დ. გოგლიძე, ლ. კაკაბაძე,
მ. მეტრეველი

თანამედროვე პირობებში შრომის ნაყოფიერების ზრდა ძირითადად ახალი ტექნიკის, პროგრესული ტექნოლოგიისა და შრომის მეცნიერული ორგანიზაციის ფუნქციას წარმოადგენს. მათ შორის შრომის მეცნიერული ორგანიზაცია (შმო) განსაკუთრებულ როლს ასრულებს. ვ.ი.ლენინი მას მნიშვნელოვან მიმართულებად მიიჩნევდა წარმოების ახალი ორგანიზაციის შექმნის საქმეში.

შმო კომპლექსურ პრობლემათა რიგს მიეკუთვნება, რომლის გადაწყვეტაში წამყვანი ადგილი ფსიქოლოგიას ეკუთვნის. შრომა ხომ პირველ რიგში ადამიანის ფსიქოფიზიკური აქტიობაა და მისი ორგანიზაცია მეცნიერული ვერ იქნება, თუ მხედველობაში არ მივიღებთ თანამედროვე ფსიქოლოგიის ექსპერიმენტული კვლევის შედეგები.

შრომის მეცნიერული ორგანიზაციის პრობლემატიკაში მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია საკითხს კადრების დენადობის შესახებ. მის აქტუალობაზე მეტყველებს შემდეგი ფაქტი: არასრული მონაცემებით საბჭოთა კავშირში ყოველწლიურად სამუშაოს იცვლის 2–3 მილიონი ადამიანი, მათგან 60% ახალ პროფესიას ეუფლება, რაც სახელმწიფოს წლიურად 3–4 მილიარდი მანეთი უჯდება[1].

როგორც ცნობილია კადრების დენადობასა თუ დაკავებაზე უამრავი ფაქტორი მოქმედებს. წინამდებარე შრომაში ლაპარაკი იქნება ამ მოვლენის ფსიქოლოგიურ საკითხებზე.

1. Н а з и м о в И.Н., Профориентация и профотбор в социалистическом обществе, изд-во "Экономика", Москва, 1972, стр. 66.

რას წარმოადგენს კადრების დენადობა ფსიქოლოგიური თვალსაზრისით? სამწუხაროდ დენადობის ფსიქოლოგიურ საკითხებს არ ექცევა სათანადო ყურადღება და არა აქვს მიჩნეული სათანადო ადგილი. წინამდებარე შრომაში ჩვენ ამოვდივართ შემდეგი მოსაზრებიდან:

1. შესაძლებელია კადრების დენადობაზე მოქმედი ისეთი მნიშვნელოვანი ფაქტორები, როგორიცაა ეკონომიკური, სოციალური, სანიტარულ-ჰიგიენური და სხვ. თვით იყოს განპირობებული ფსიქოლოგიური ფაქტორების მოქმედებით;

2. კადრების დენადობა წარმოადგენს გამოვლენას იმ შეუსატყვისობისა, რასაც ხშირად აქვს ადგილი ადამიანის ინდივიდუალურ-ფსიქოლოგიურ თავისებურებებსა და პროფესიათა პროფესიოგრაფიულ მახასიათებლებს შორის. ეს იმით უნდა იყოს გამოწვეული, რომ კადრების შერჩევისას არ იყო გათვალისწინებული პროფესიული შერჩევისა და პროფესიული სწავლების ფსიქოლოგიური და სხვ. მეცნიერული საკითხები;

3. სხვა ფაქტორთა იდენტურობის შემთხვევაში მაინც მუშახელის დენადობა თუ დაკავება დამოკიდებული უნდა იყოს ცალკეული პიროვნების ტიპოლოგიურ-ფსიქოლოგიურ თავისებურებებზე.

განწყობის ფსიქოლოგიის თვალსაზრისით საკითხი შეიძლება შემდეგნაირად წარმოვიდგინოთ: მუშაკი იმიტომ იცვლის სამუშაო ადგილსა თუ პროფესიას, რომ მის მოთხოვნილებათა, მოტივთა, ღირებულებათა და პიროვნებისეულ თავისებურებათა სისტემა ვერ პოულობს სამუშაო გარემოში (ფართო მნიშვნელობით) რეალიზაციის საშუალებებს. ამის გამო ვერ აღმოცენდება, და თუ აღმოცენდა, ვერ იქნება მტკიცე, პროფესიული განწყობა, ე.ი. ისეთი განწყობა, რომლის მოტივი სწორედ რომელიმე პროფესიის სფეროში შრომითი საქმიანობა იქნება და არა სხვა რამე.

მაშასადამე მუშახელის დენადობის ერთ-ერთი ძირითადი მიზეზი უნდა ვეძიოთ პროფესიული განწყობის აღმოცენებისა და ფიქსაციისათვის საჭირო სუბიექტურ თუ ობიექტურ ფაქტორებში.

აღნიშნულიდან გამომდინარე, იმისათვის, რომ თავიდან ავიცილოთ არააუცილებლობით გამოწვეული დენადობა, საჭიროა ღრმად ჩავწვდეთ პროფესიული განწყობის ფორმირებისა და ფუნქციონირების როგორც სუბიექტურ, ასევე ობიექტურ პირობებს, პროფესიული შერჩევის, პროფესიული ორიენტაციის, პროფესიული კონსულტაციის და პროფესიული სწავლებისათვის გამოვიყენოთ პროფესიათა პროფესიოგრაფიული დახასიათებლებისა და ადამიანის ინდივიდუალურ-ფსიქოლოგიურ თავისებურებათა მეცნიერულად დადგენილი რაოდენობრივი და თვისობრივი მონაცემები.

ყოველივე ზემოთქმულს იმ დასკვნამდე მივყავართ, რომ დენადობის პროფილაქტიკისა და პროგნოზირებისათვის აუცილებელია ვიცოდეთ ცალკეული მუშახელის პროფესიული განწყობები და ტიპოლოგიური თავისებურებანი.

პროფესიული განწყობის გამოვლენის მიზნით შევიმუშავეთ სპეციალური ანკეტა-კითხვარი, რომლის ერთ-ერთ დანიშნულებას წარმოადგენდა პროფესიისადმი ემოციური დამოკიდებულების დადგენა. ვვარაუდობდით, რომ ემოციური დამოკიდებულება მნიშვნელოვანი პარამეტრია პროფესიული განწყობის სუბიექტური ფაქტორისათვის. იგი უნდა გამოევლინა შემდეგ კითხვებზე პასუხს:

"მოგწონთ თუ არა თქვენი პროფესია, კმაყოფილი ხართ თუ არა თქვენი საქმიანობით?"

"რატომ არ მოგწონთ თქვენი პროფესია?"

"თავიდან რომ იწყებდეთ ცხოვრებას, რომელ პროფესიას აირჩევდით?"

"შემთხვევა რომ მოგეცეთ, გამოიცვლიდით პროფესიას?"

"რომელ პროფესიას ურჩევდით თქვენს შვილებს, შვილიშვილებს, ახლობლებს?"[1]

---

1. ანკეტის სრული ტექსტი და გამოყენების მეთოდიკა, იხ. თსუ კიბერნეტიკის პრობლემური ლაბორატორიის საინჟინრო ფსიქოლოგიის განყოფილების ანგარიში თემაზე: "Психологические проблемы технической диагностики и профессиональной психодиагностики в автомобильной промышленности, Тбилиси, 1975 (Рукопись)

ანკეტური შემოწმება გაიარა ქუთაისის საავტომობილო ქარხნის სხვადასხვა საამქროებისა და საწარმოო-სამმართველო აპარატის 2117 წარმომადგენელმა 1974 წელს. გამოკითხულთაგან 625 იყო 30 წლამდე ასაკის, 1061-30-დან 40 წლამდე, ხოლო 431-40 წელზე მეტი ხნის.

მივიღეთ ასეთი შედეგები:

შემოწმებულთა 30%-მა პროფესიისადმი უარყოფითი დამოკიდებულება გამოავლინა, 57%-მა დადებითი, 13%-მა – გაურკვეველი. როგორც მოსალოდნელი იყო, ასაკთან მიმართებაში უარყოფითი დამოკიდებულება შემცირდა, 30 წლამდე მუშაკებთან იგი უდრიდა 35%-ს, 30-დან 40 წლამდე მუშაკებთან - 27%-ს, ხოლო 40 წელზე მეტი ხნის მუშაკებთან 22%-ს.

უარყოფითი დამოკიდებულება ყველაზე მეტი რაოდენობით გამოვლინდა სასწავლო-საწარმოო საამქროში (80% 20 მუშახელიდან), მოდელების საამქროში (60% 45 მუშახელიდან) და სიჩქარეთა კოლოფის საამქროში (45% 130 მუშახელიდან) ყველაზე ნაკლები - ავტომობილის გამართვისა და გამოცდის საამქროში (5% 20 მუშახელიდან), მომარაგების განყოფილებასა (9% 35 მუშახელიდან) და სამშენებლო-სარემონტო უბანზე (9% 35 მუშახელიდან).

მიღებული შედეგები საშუალებას იძლევა დავასკვნათ, რომ გამოყენებული ანკეტა-კითხვარი 87%-ის შემთხვევაში საშუალებას გვაძლევს დავადგინოთ პროფესიისადმი ემოციური დამოკიდებულების რაგვარობა. გარდა ამისა 1975 წლის მონაცემების შედარებამ ჩვენს პროგნოზთან გამოავლინა საკმაოდ მაღალი კორელაცია ჩვენს პროგნოზსა და რეალურ დენადობას შორის ამ წელს (% =0,67), ცალკეული საწარმოო უბნების მიხედვით. ეს გამოყენებული ანკეტა-კითხვარის მაღალ მაპროგნოზირებელ ღირებულებაზე მიუთითებს.

რას გვაძლევს შედეგების თვისობრივი ანალიზი?

პირველ ყოვლისა გამოვლინდა განსხვავება პროფესიისადმი დამოკიდებულებაში სხვადასხვა ასაკის მუშახელის შემთხვევაში. ეს ბუნებრივიცაა, რადგან ხანშიშესულებს გავლილი აქვთ პროფესიისადმი ადაპტაციის ეტაპი და ამ დროს საბოლოოდ ყალიბდება პროფესიული ინტერესები და განწყობები, რაც ამცირებს უარყოფითი დამოკიდებულების შემთხვევებს. გარდა ამისა ეს ფაქტი კიდევ ერთხელ მიუთითებს ახალგაზრდებთან სპეციალური მუშაობის აუცილებლობაზე სამუშაო სიტუაციისადმი ადაპტაციის პირველ ეტაპზე.

გამოკვლევამ შესაძლებლობა მოგვცა დაგვედგინა ის საწარმოო უბნები, სადაც საჭიროა შექმნილი მდგომარეობის ღრმა ფსიქოლოგიური ანალიზი.

საინტერესოდ უნდა მივიჩნიოთ აგრეთვე ის საწარმოო უბნები, სადაც დენადობის დაბალი მაჩვენებლები იქნა მიღებული (მაგ., მომარაგებისა და სამშენებლო-სარემონტო განყოფილებები). უნდა ვივარაუდოთ, რომ აქ საქმე გვაქვს სწორედ ისეთ შემთხვევასთან, როდესაც ფსიქოლოგიურ ფაქტორებზე უფრო მეტად სხვა ფაქტორები ახდენს გავლენას მუშახელის დამოკიდებულებაზე პროფესიისადმი.

მეორე საკითხი ეხება იმის გარკვევას, თუ რა დამოკიდებულებაა დენადობასა და პიროვნების სიღრმისეულ, დისპოზიციურ თავისებურებებს შორის, ხომ არ არის კავშირი დენადობასა (სამუშაოსა თუ პროფესიის ხშირ ცვლასა) და ადამიანის ტიპოლოგიურ თავისებურებას შორის.

კვლევა ვაწარმოეთ თბილისის ს. კიროვის სახ. ჩარხმშენებელ ქარხანაში. შერჩეულ იქნა ორი 50-50 კაციანი ჯგუფი. პირველ ჯგუფში გავაერთიანეთ ის მუშა-მოსამსახურენი, რომელთაც მოცემულ საწარმოში მუშაობის 20 წელზე მეტი ხნის მუშაობის სტაჟი ჰქონდათ, მეორე ჯგუფში კი ისინი, რომელთაც კვლევის დაწყების მომენტისათვის სამუშაო ადგილი თუ პროფესია სამჯერ მეტად ჰქონდათ გამოცვლილი. სიმოკლისათვის პირველი ჯგუფის მუშახელს ვუწოდოთ სტაბილური,

მეორე ჯგუფისას - დენადი. პიროვნების კვლევის აიზენკისეული კითხვარის მეოხებით (Eysenck. Personality Inventary. EPY) დადგინდა ორივე ჯგუფის მუშახელის ისეთი პიროვნებისეული განზომილებანი, როგორებიცაა ინტროვერსია-ექსტრავერსია და ნევროტულობა-სტაბილურობა, აგრეთვე ტემპერამენტის ტიპი.

შედეგების რაოდენობრივმა ანალიზმა ასეთი სურათი მოგვცა:

1. სტაბილურთაგან გამოსაყენებლად ვარგისი შედეგი მოგვცა 45 მუშახელმა, დენადთაგან - 34 -მა;

2. სტაბილურებში 27 (60%) აღმოჩნდა ინტროვერტი, 18(40%) - ექსტრავერტი, დენადებში ინტროვერტი - 12 (35%), ექსტრავერტი - 22 (65%);

3. სტაბილურთაგან ნევროტული აღმოჩნდა 31 (68,9%), სტაბილური - 14(31,1%), დენადებში კი ნევროტული აღმოჩნდა 19 (65,88%), სტაბილური - 15(439, 12%).

4. სტაბილურთაგან 14 (31,11%) აღმოჩნდა ქოლერიკი, 10 (22,22%) - სანგვინიკი, 10 (22,22%) - ფლეგმატიკი, 17 (37,77%) - მელანქოლიკი. დენადთაგან კი ქოლერიკი აღმოჩნდა 16 (47,05%), სანგვინიკი - 6(17,64%), ფლეგმატიკი - 9(26,47%), მელანქოლიკი - 3(8,82%).

ჯგუფებს შორის სტატისტიკურად სანდო განსხვავება ($p < 0,05$) აღმოჩნდა ინტრავერსიისა-ექსტრავერსიისა და ქოლერიკული და მელანქოლიკური ტემპერამენტის მიხედვით.

რა თვისობრივი ანალიზის შესაძლებლობას გვაძლევს ეს რაოდენობრივი შედეგები?

ექსტრავერსია-ინტრავერსია და ნევროტულობა-სტაბილობა წარმოადგენენ პიროვნების მნიშვნელოვან დისპოზიციურ მახასიათებლებს. მათი გამოვლენისათვის ფსიქოლოგიას მრავალი მეთოდი გააჩნია. მათ შორის თავისი ლაკონიურობით, საჭირო დროის სიმცირით და დიაგნოსტიკური ღირებულებით პიროვნების კვლევის აიზენკისეულ კითხვარს, რომელიც ჩვენ გამოვიყენეთ, ერთ-ერთი წამყვანი ადგილი უკავია.

გარდა ამისა არსებობს გამოკვლევები, რომლებიც მიუთითებენ გარკვეული დამოკიდებულების არსებობაზე აიზენკის კითხვარის მეშვეობით დადგენილ ტიპებსა და ფიქსირებული განწყობის მეთოდით დადგენილ ტიპებს შორის.

ეს უკანასკნელი გარემოება საშუალებას მოგვცემს გავაფართოოთ ჩვენი ცოდნა პროფესიული განწყობის შემუშავებისა და გამოვლენის ფსიქოლოგიური მექანიზმების შესახებ.

როგორც ცნობილია, აიზენკის კითხვარი 57 კითხვას შეიცავს, მათგან 24-24 განკუთვნილია შესაბამისად ექსტრავერსია-ინტრავერსიისა და ნევროტულობა-სტაბილურობის დადგენისათვის. როგორც აღნიშნული იყო იმავე მონაცემების მეშვეობით დგინდება ტემპერამენტის ტიპიც. დანარჩენი 9 კითხვა განკუთვნილია სიცრუისადმი ტენდენციის გამოსავლენად. ასეთი ტენდენციის გამოვლენის შემთხვევაში მიღებული შედეგები არ არის სანდო.

სიცრუისადმი ტენდენცია დენადი ჯგუფის 16 წარმომადგენელმა გამოავლინა, სტაბილურთაგან კი - ხუთმა. აღსანიშნავია, რომ ასეთ ტენდენციას დამოუკიდებელი სადიაგნოსტიკო ღირებულებაც აქვს. იგი საერთოს ხდის ნევროტულობა-სტაბილურობის მონაცემებს და ორივე შემთხვევაში პიროვნებისათვის დამახასიათებელ ნიშნადაც შეიძლება გამოვიდეს. ჩვენი შედეგების მიხედვით თუ ვიმსჯელებთ, სხვა თანაბარ პირობებში დენადობის ალბათობა მეტია იმ პირებთან, ვისაც სიცრუისადმი მეტი ტენდენცია აქვს.

დენადობის პროგნოზისათვის მნიშვნელოვანია აღნიშნულ ორ ჯგუფს შორის არსებული სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი განსხვავება ექსტრავერსია-ინტრავერსიის თვალსაზრისით. დენადობა მეტი ალბათობითაა მოსალოდნელი ექსტრავერტი ადამიანებისაგან.

საინტერესო შედეგები იქნა მიღებული ტიპოლოგიური თვალსაზრისითაც, სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი განსხვავება მიღებულ იქნა მელანქოლიკურ-ქოლერიკული ტიპის ტემპერამენტის მიხედვით.

სტაბილურობის თვალსაზრისით ყველაზე საუკეთესონი აღმოჩნდნენ მე-ლანქოლიკი ადამიანები. ეს იმას ნიშნავს, რომ მათ მიერ სამუშაოს თუ პროფესიის გამოცვლის ალბათობა ნაკლებია და პროფესიული საქ-მიანობა დაკავშირებული არ არის სხვა გარემოებებთან, კადრების შერჩევის დროს უპირატესობა ამ უკანასკნელთ უნდა მივანიჭოთ.

ბუნებრივად ისმის კითხვა, რა განაპირობებს ისეთი ტიპის ადამიანების სტაბილურობას? უნდა ვივარაუდოთ, რომ აქ გადამწყვეტ როლს ასრულებს სიძნელენი სოციალურ-ფსიქოლოგიური ადაპტაციის სფეროში. ასეთ ადამიანებს უჭირთ ახალ გარემოსთან შეგუება და ხშირად მისი წარმოდგენაც კი აშფოთებთ. ამიტომ, მიუხედავად რიგი ფაქტორების ზემოქმედებისა, ისინი ჩვეულ სიტუაციაში მოღვაწეობას ამჯობინებენ.

თუ გავითვალისწინებთ იმ გარემოებას, რომ ასაკთან ერთად ექს-ტრავერსია და ნევროტულობა მცირდება, საფიქრებელია, რომ ჩვენს მიერ მიღებული რაოდენობრივი მონაცემები სხვა ექსპერიმენტების შემთხვევაში ნაწილობრივ შეიცვლება. თუმცა ეს შეცვლა არ უნდა იყოს ისეთი, რომ დაირღვეს ანალოგიურ ჯგუფებს შორის არსებული სტა-ტისტიკურად მნიშვნელოვანი განსხვავება.

დაბოლოს უნდა დავძინოთ, რომ ჩვენ მიერ წარმოდგენილი საკითხე-ბი მხოლოდ მცირეოდენი ნაწილია ფაქტორთა იმ სისტემის შესწავლის გზაზე, რომელიც დენადობას განაპირობებს. არ არის გამორიცხული ამ მოვლენის უფრო მჭიდრო კავშირი პიროვნების სხვა დისპოზიციურ თვისებებთან, რაც დამოუკიდებელი კვლევის ობიექტი შეიძლება იყოს.

მიღებულია 2.III.79 წ.

ფიზიკური კიბერნეტიკის
პრობლემური ლაბორატორია

Ю. Филипашвили, Н. Бедоицзе, Д. Гоглидзе,
Л. Какабадзе, М. Метревели

ПСИХОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ТЕКУЧЕСТИ КАДРОВ В ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Резюме

В работе текучесть кадров рассматривается как проявление несоответствия индивидуально-психологических свойств личности с профессиографическими характеристиками профессий. С точки зрения психологии установки это означает, что у текучих работников не сформировалась профессиональная установка из-за несоответствия или отсутствия субъективного или объективного фактора ее формирования и фиксирования.

Была проверена также гипотеза, согласно которой текучесть кадров, при других равных условиях, а может быть и во всех случаях, обусловлена типологическими особенностями личности. Выяснилось, что текучесть кадров коррелирует с экстраверсией, а стабильность - с меланхолическим типом темперамента.

Результаты исследования дают возможность прогнозировать текучесть кадров, а также в случае необходимости определить содержание профилактических мероприятий с целью предотвращения этого явления.

I.Pilipashvili, N.Bedoidze, D.Goglidze, L.Kakabadze, M.Metreveli

PSYCHOLOGICAL PROBLEMS OF PREDICTING THE FLUCTUATION OF PERSONNEL IN INDUSTRY

Summary

Personnel fluctuation is considered to be a manifestation of an incompatibility of the individual-psychological traits of personality with professional characteristics of a trade. From the point of view of the psychology of set this implies that in unstable workers a professional set has not formed because of incompatibility or the absence of a subjective or objective factor of its emergence and fixation.

The following hypothesis was also tested: under other equal conditions - and perhaps in all other cases as well, the fluctuation of personnel is due to the typological specificities of personality. Personnel fluctuation was found to correlate with extraversion, whereas its stability with the melancholic type of temperament.

The findings of the present study permit prediction of personnel fluctuation and if necessary, to determine the type of prophylactic measures with a view to averting it.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
212, 1980

КЛАСС КОДОВ С НЕРАВНОЙ ЗАЩИТОЙ СИМВОЛОВ, ОСНОВАННЫЙ НА УРАВНОВЕШЕННЫХ НЕПОЛНЫХ РАЗРЕШИМЫХ БЛОК-СХЕМАХ

Р.П.Мегрелишвили, Т.Г.Николаишвили

В работе / I / был получен класс линейных (n, k) - кодов с неравной защитой символов, основанный на симметричных (v, k_1, λ) - конфигурациях.

В настоящей работе предлагаются коды, построенные с применением уравновешенных неполных разрешимых блок-схем (b, v, r, k_1, λ), из которых (v, k_1, λ) - конфигурации получаются как частные случаи при $b = v$ и $r = k_1$ /2/.

В качестве исходной проверочной матрицы H для предлагаемых кодов рассмотрим матрицу (PI_v), где P - матрица инцидентности разрешимой (b, v, r, k_1, λ) -блок-схемы размера ($v \times b$), а I_v - единичная матрица порядка v. Матрица

$$H = (PI_v) \qquad (I)$$

порождает нулевое пространство линейного (n, k) - кода с параметрами $n = b + v$, $k = b$ и кодовым расстоянием

$d = k_1 + 1$ /3/. Поскольку для уравновешенных неполных блок-схем справедливо неравенство Фишера $b < v$, то скорость передачи для таких кодов $R > 0,5$.

Рассмотрим далее проверочную матрицу вида

$$H = (P^T I_b). \tag{2}$$

Здесь P^T - транспонированная матрица инцидентности блок-схемы размера $(b \times v)$, а I_b - единичная матрица порядка b. Полученный код будет иметь параметры: $n = v + b$, $k = v$, $d = r + 1$. Как видно, скорость передачи $R < 0,5$, но одновременно возрастает корректирующая способность кода, поскольку из неравенства Фишера вытекает, что $r > k_1$.

Перейдем теперь непосредственно к построению кодов с неравной защитой символов.

В проверочной матрице H в качестве P рассмотрим матрицу инцидентности разрешимых (b, v, r, k_1, λ) -блок-схем, параметры которых, как известно, удовлетворяют следующим выражениям:

$$b = p^{2\alpha} + p^{\alpha}, \quad v = p^{2\alpha}, \quad r = p^{\alpha} + 1, \quad k_1 = p^{\alpha}, \quad \lambda = 1.$$

Здесь p - простое, а α - натуральное число (условие $\lambda = 1$ означает, что код обладает ортогональной системой проверок).

Вычеркнем из матрицы P любую одну строку (вычеркивание i - ой строки в матрице P означает выкидывание элемента $i \in \{1, \dots, v\}$ из всех блоков схемы). Это уменьшит длину кода на единицу и увеличит скорость передачи. С другой стороны, в информационной части кодового вектора $b-r$ позициям по-прежнему будет соответствовать расстояние $d_1 = k_1 + 1$, а остальным r позициям – $d_2 = k_1$ (множество информационных позиций с расстоянием d_2 в точности определяется множеством индексов тех блоков схемы, из которых удален элемент i).

Вычеркивание любых двух строк в P приводит к следующим результатам: $b-2(r-1)-1$ позиций в информационной части имеют расстояние $d_1 = k_1 + 1$; $2(r-1)$ позиций – $d_2 = k_1$; одна позиция – $d_3 = k_1 - 1$.

Длина такого кода $n = b + v - 2$, $k = v$. Вычеркивание произвольных i -ой и j-ой строк в матрице P означает выкидывание элементов i и j $(i, j = 1, \ldots, v)$ из всех блоков схемы. Индекс блока, к которому принадлежит пара элементов i, j (а такой индекс единственный, поскольку $\lambda = 1$), отождествляется с позицией, степень защиты которой наименьшая (d_3). Множество позиций с расстоянием d_2 определится множеством индексов тех блоков $\mathcal{B}_s$ $(s = 1, \ldots, b)$, из которых удалены элементы i и j , за исключением некоторого фиксированного индекса c , такого, что одновременно $i, j \in \mathcal{B}_c$.

Результат исключения из матрицы H любых трех или более строк не поддается однозначному анализу, так как в этом случае могут возникнуть различные сочетания помехозащищенности символов. Однако, если матрицу H представить в виде

$$H = \begin{pmatrix} P_1 & \\ \vdots & I_v \\ P_{k_1} & \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где P_i – подматрицы размера $(k_1 \times b)$ (а это для матрицы инцидентности разрешимой схемы всегда возможно, поскольку в каждом дубликате v элементы распределены по k_1 элементов в блоке и поэтому $k_1 | v$) и рассматривать любую подматрицу P_i, то можно заметить, что вычеркивание из нее произвольных ℓ строк ($1 \leq \ell \leq k_1 - 1$) приводит к коду, $b - \ell(r-1) - 1$ символов которого защищены от $t_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right]$ ошибок, а $\ell(r-1)$ символов – от $t_2 = \left[\frac{k_1 - 1}{2}\right]$ ошибок, где $[x]$ – наименьшее целое $\geq x$. Что же касается одной позиции (соответствующей блоку B_c), то степень её защиты равна $t_3 = \left[\frac{k_1 - \ell}{2}\right]$.

При $\ell = k_1$ (т.е. в случае, когда подматрица P_i выбрасывается из H целиком) от этой позиции (столбца B_c), разумеется, следует избавиться. Таким образом, в полученном коде степень защиты t_1 распространится на $b - k_1(r-1) - 1 = k_1 - 1$ символ, а t_2 – на остальные символы, причем $n = b + v - \ell - \delta$, $k = b - \delta$, где

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{если } \ell < k_1; \\ 1, & \text{если } \ell = k_1. \end{cases}$$

При отбрасывании из (3) q ($1 \leq q < k_1$) подматриц P_i целиком $n_1 = k_1 - q$ информационным позициям соответствущего кода будет соответствовать расстояние $d_1=k_1+1$, а остальным $n_2=n-n_1$ позициям — $d_2=k_1-q+1$. Получим код с неравной защитой символов с параметрами:

$$n=b+v-qk_1-q_1, \quad k=b-q. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь матрицу (2), которую запишем в виде

$$H=\begin{pmatrix} P_1^T & \\ \vdots & I_b \\ P_r^T & \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где P_i^T $(i=1,\dots,r)$ — подматрицы размера $(k_1\times v)$.

Вычеркнем из всех P_i^T $(i=1,\dots,r)$ по одной строке (по одному блоку из каждого дубликата), содержащей один и тот же фиксированный j-тый ($1\le j<r$) элемент. Тогда в информационной части кодового вектора k_1-1 позиции попрежнему будет соответствовать $d_1=r+1$, а $v-k_1$ позиции — $d_2=r$. Кроме того, для одной позиции (соответствующей отброшенному j-тому элементу блок-схемы) расстояние равно 2, и поэтому j-тый столбец целесообразнее отбросить. При этом $n=b+v-r$, $k=v-1$.

Применив q-кратно ($q<k_1$) данный способ отбрасывания строк матрицы (5), получим код с параметрами

$$n=b+v-qr, \quad k=v-q, \tag{6}$$

для $n_1=k_1-q$ информационных позиций которого $d_1=r+1$, а для остальных $n_2=n-n_1$ позиций $d_2=r-q+1$.

Следует заметить, что вначале (когда $q = 0$) скорость кодов (6), очевидно, $< 0,5$, однако, по мере увеличения q она может превзойти значение 0,5 (таблица 2).

Примеры некоторых кодов, составленных по выражениям (4) и (6), приведены соответственно в таблицах I и 2.

Таблица I

b	v	h	k_1	n	k	d	q	n_1	d_1	d_2	R
20	I6	5	4	36	20	5	-	-	-	-	0,55
				26	I8	-	2	2	5	3	0,69
72	64	9	8	I36	72	9	-	-	-	-	0,53
				II8	70	-	2	6	9	7	0,59
				I00	68	-	4	4	9	5	0,68
				82	66	-	6	2	9	3	0,8I

Таблица 2

b	v	h	k_1	n	k	d	q	n_1	d_1	d_2	R
I2	9	4	3	2I	9	5	-	-	-	-	0,43
				I3	7	-	2	I	5	3	0,54
30	25	6	5	55	25	7	-	-	-	-	0,45
				43	23	-	2	3	7	5	0,54
				3I	2I	-	4	I	7	3	0,68
56	49	8	7	I05	49	9	-	-	-	-	0,33
				89	47	-	2	5	9	7	0,53

b	v	r	k_1	n	k	d	q	n_1	d_1	d_2	R
				73	45	-	4	3	9	5	0,62
				57	43	-	6	I	9	3	0,75

Поступила II.УI.1979.

Проблемная лаборатория
физической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

I. Р.П.Мегрелишвили, Т.Г.Николаишвили. Коды с неравной защитой символов. Труды ТГУ, I68, I976.

2. М.Холл, Комбинаторика, "Мир", М., I970.

3. Hsiao, Коды, основанные на неполных блок-схемах для быстродействующих цифровых устройств, Discrete Math., I972, 3, № I-3, 89-I08.

რ.მეგრელიშვილი, თ.ნიკოლაიშვილი

გაწონასწორებულ არასრულ ბლოკ-სქემებზე დაფუძნებული კოდების კლასი სიმბოლოების არათანაბარი დაცვით

რეზიუმე

(b,v,r,k_1,λ)-კონფიგურაციების განზოგადებით მიღებულია არათანაბარი დაცვის (n,k)-კოდების კლასი. კოდების პარამეტრებია: $n=b+v-qk_1$, $k=b-q$ ან $n=b+v-qr$, $k=v-q$, სადაც $b=p^{2\alpha}+p^{\alpha}$, $v=p^{2\alpha}$, $r=p^{\alpha}+1$, $k_1=p^{\alpha}$, $\lambda=1$; p-მარტივი, ხოლო α-ნატურალური რიცხვებია; $1\leq q<k_1$.

R.Megrelishvili, T.Nikolaishvili

A CLASS OF CODES WITH UNEQUAL PROTECTION OF SYMBOLS BASED ON BALANCED INCOMPLETE SOLVABLE BLOCK-DESIGNS

Summary

A class of unequal error protection (n, k) - codes is built with the use of (b, v, r, k_1, λ) -configurations. The parameters of the codes are: $n=b+v-qk_1-q$, $k=b-q$, or $n=b+v-qr$, $k=v-q$: where $r=p^{\alpha}+1$, $k_1=p^{\alpha}$, $\lambda=1$; p is a simple number and α is a natural one; $1 \leq q < k_1$.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
212, 1980

ОБЩЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ $2N$ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Р.А.Кордзадзе, А.М.Эль-Кашиф

I⁰. В односвязной области комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим систему $2N$ ($N \geq 1$) уравнений эллиптического типа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial x} - \dfrac{\partial v_n}{\partial y} = \sum\limits_{m=1}^{N} \left[a_{n,m}(x,y) u_m + b_{n,m}(x,y) v_m \right] + f_n(x,y), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,\dots,N) \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial y} + \dfrac{\partial v_n}{\partial x} = \sum\limits_{m=1}^{N} \left[c_{n,m}(x,y) u_m + d_{n,m}(x,y) v_m \right] + g_n(x,y), \end{cases} \qquad (I)$$

где коэффициенты и свободные члены – заданные вещественные функции вещественных переменных x, y, u_n, v_n $(n=1,\dots,N)$ – искомое регулярное (непрерывно дифференцируемое) решение.

При $N=1$ имеем систему уравнений Карлемана-Векуа, полное изложение теории которой имеется в / I /, / 2 /. В работах / 3 / – / 5 / теория обобщенных аналитических функций И.Н.Векуа / I /, / 2 / была обобщена на эллиптические системы уравнений первого порядка с $2N$ $(N>1)$ неизвестными функциями; для этих систем уравнений (в частности, для системы (I)) несправедлив аналог теоремы Лиувилля, что влечет неразрешимость соответствующего системе (I) интегрального уравнения по области (см. / I /, / 3 /). Однако, если коэффициенты и свободные члены системы уравнений (I) являются аналитическими функциями вещественных переменных x, y, что мы и будем предлагать ниже всюду, то для построения общего решения этой системы успешно можно применить метод, развитый в / 2 /, / 6 /, основная идея которого заключается в выходе в комплексную область значений переменных.

2^0. Продолжая аналитически в область комплексных значений переменных x, y коэффициенты и свободные члены уравнений (I), будем считать, что функции

$$4A_{n,m}(z,\zeta)\equiv a_{n,m}\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)+d_{n,m}\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)+$$

$$+ic_{n,m}\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)-ib_{n,m}\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right),$$

$$4B_{n,m}(z,\zeta)\equiv a_{n,m}\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)-d_{n,m}\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)+$$

$$+ic_{n,m}\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)+ib_{n,m}\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right),$$

$$2F_n(z,\zeta)\equiv f_n\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)+ig_n\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)$$

$$(n,m=1,\dots,N,\quad z=x+iy,\quad \zeta=x-iy)$$

являются аналитическими функциями двух независимых комплексных переменных $z = x+iy$, $\zeta = x-iy$ в некоторой полиобласти $\mathcal{D}\times\overline{\mathcal{D}}\subset\mathbb{C}^2$, где $\mathcal{D}$ – односвязная область комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а $\overline{\mathcal{D}}$ – зеркальное отображение $\mathcal{D}$ относительно действительной оси. Такую область $\mathcal{D}$ будем называть основной областью системы уравнений (I). В качестве основной области можно взять, например, достаточно малую окрестность любой точки из области аналитичности коэффициентов и свободных членов системы уравнений (I); если они целые функции переменных x, y, то в качестве основной области $\mathcal{D}$ можно взять всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

3°. Рассмотрим матричное уравнение

$$\frac{\partial U(z,\zeta)}{\partial\zeta} = A(z,\zeta)U(z,\zeta)+B(z,\zeta)U^*(z,\zeta)+F(z,\zeta) \quad (z\in\mathcal{D},\ \zeta\in\overline{\mathcal{D}}), \tag{2}$$

где

$$A(z,\zeta)=\|A_{n,m}(z,\zeta)\|,\quad B=(z,\zeta)=\|B_{n,m}(z,\zeta)\|,$$
$$F=(z,\zeta)=\|F_{n,m}(z,\zeta)\| \;-$$

аналитические в области $z\in\mathcal{D}$, $\zeta\in\overline{\mathcal{D}}$ квадратные матрицы порядка N, $U(z,\zeta)$ – аналитическая в области $z\in\mathcal{D}$, $\zeta\in\overline{\mathcal{D}}$ искомая квадратная матрица порядка N; верхняя звездочка над матрицами здесь и ниже всюду обозначает переход к сопряженным матрицам $U^*(\zeta,z)=\overline{U(\overline{\zeta},\overline{z})}$ $(z\in\mathcal{D},\ \zeta\in\overline{\mathcal{D}})$, причем верхняя черточка, как обычно, означает переход к комплексно-сопряженному значению.

С помощью метода, развитого в / 2 /, / 6 /, доказывастоя, что весь класс аналитических в области $z \in \mathcal{D}$, $\zeta \in \bar{\mathcal{D}}$ решений матричного уравнения (2) дается формулой

$$U(z,\zeta)=H(z,\zeta,\zeta_0)\Phi(z)+\int_{z_0}^{z} R_1(z,\zeta,t,\zeta_0)\Phi(t)dt+$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta} R_2(z,\zeta,z_0,\tau)\Phi^*(\tau)d\tau+\omega(z,\zeta), \tag{3}$$

где

$$\omega(z,\zeta)=\int_{\zeta_0}^{\zeta} H(z,\zeta,\tau)F(z,\tau)d\tau+\int_{z_0}^{z} dt\int_{\zeta_0}^{\zeta} R_1(z,\zeta,t,\tau)F(t,\tau)d\tau+$$
$$+\int_{\zeta_0}^{\zeta} d\tau\int_{z_0}^{z} R_2(z,\zeta,t,\tau)F^*(\tau,t)dt, \tag{4}$$

где z_0 и ζ_0 – произвольные фиксированные точки в области $\mathcal{D}$ и $\bar{\mathcal{D}}$ соответственно, $\Phi(z)=\|\Phi_{n,m}(z)\|$ – произвольная голоморфная в области $\mathcal{D}$ квадратная матрица порядка N, $H(z,\zeta,\tau)$, $R_1(z,\zeta,t,\tau)$ и $R_2(z,\zeta,t,\tau)$ – квадратные матрицы порядка N, аналитические в области $z,t \in \mathcal{D}$, $\zeta,\tau \in \bar{\mathcal{D}}$.
Эти матрицы зависят лишь от коэффициентов уравнения (2) и могут быть построены методом последовательных приближений.

Соответствие между семейством решений $\{U\}$ и семейством голоморфных матриц $\{\Phi\}$ взаимно однозначно – по заданному решению U однозначно определяется Φ:

$$\Phi(z)=U(z,\zeta_0), \quad z\in\mathcal{D}, \quad \zeta_0\in\bar{\mathcal{D}}.$$

Матрица (4) является аналитическим в области $z\in\mathcal{D}, \zeta\in\bar{\mathcal{D}}$ частным решением уравнения (2).

Матрица $H(z,\zeta,\tau)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\frac{\partial H(z,\zeta,\tau)}{\partial \zeta} = A(z,\zeta)H(z,\zeta,\tau) \quad (z\in \mathcal{D},\ \zeta,\tau \in \bar{\mathcal{D}})$$

и условию $H(z,\tau,\tau) = I_N \quad (z\in\mathcal{D},\ \tau\in\bar{\mathcal{D}})$, где I_N - единичная матрица порядка N . Поэтому, в силу известного свойства, детерминанта фундаментальной системы решений системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\det H(z,\zeta,\tau) = \exp\int_{\tau}^{\zeta} T_r A(z,\tau_1)d\tau_1 \quad (z\in\mathcal{D},\ \zeta,\tau\in\bar{\mathcal{D}}),$$

где, как обычно, через T_r обозначен след матрицы A.

4^0. Если в формуле (4) вместо матрицы $F(z,\zeta)$ подставим вектор

$$F(z,\zeta) = \begin{pmatrix} F_1(z,\zeta) \\ \vdots \\ F_N(z,\zeta) \end{pmatrix} \quad (z\in\mathcal{D},\ \zeta\in\bar{\mathcal{D}}),$$

то нетрудно видеть, что

$$U_n(x,y) = R_e\,\omega_n(z,\bar{z}),\quad V_n(x,y) = J_m\,\omega_n(z,\bar{z})$$

$$(z = x+iy,\ n=1,\dots,N),$$

где

$$\omega(z,\bar{z}) = \begin{pmatrix} \omega_1(z,\bar{z}) \\ \vdots \\ \omega_N(z,\bar{z}) \end{pmatrix} = \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} H(z,\bar{z},t)F(t,t)dt +$$

$$+\int_{z_0}^{z} dt_1 \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} R_1(z,\bar{z},t_1,t)F(t_1,t)dt + \int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}} dt \int_{z_0}^{z} R_2(z,\bar{z},t_1,t)F^*(t,t_1)dt_1$$

$$(z,z_0\in\mathcal{D})$$

является регулярным в основной области $\mathcal{D}$ частным решением системы уравнений (I).

Если в формуле (3) положим $F(z,\zeta)\equiv 0$, вместо матрицы $\Phi(z)$ подставим произвольный голоморфный от z в области $\mathcal{D}$ вектор

$$\Phi(z)=\begin{pmatrix}\Phi_1(z)\\ \vdots \\ \Phi_N(z)\end{pmatrix}, \quad (z\in\mathcal{D}),$$

и, наконец, положим $\zeta=\bar{z}$, то обнаружим, что

$$u_n(x,y)=\mathcal{R}_e W_n(z), \quad v_n(x,y)=\mathcal{J}_m W_n(z) \tag{5}$$

$$(z=x+iy, \quad n=1,\dots,N),$$

где

$$W(z)=\begin{pmatrix}W_1(z)\\ \vdots \\ W_N(z)\end{pmatrix}=H(z,\bar{z},\bar{z}_0)\Phi(z)+\int_{z_0}^{z}\mathcal{R}_1(z,\bar{z},t,\bar{z}_0)\Phi(t)dt+ \tag{6}$$

$$+\int_{\bar{z}_0}^{\bar{z}}\mathcal{R}_2(z,\bar{z},z_0,t)\Phi^*(t)dt \qquad (z,z_0\in\mathcal{D}),$$

дает общее представление всех трех регулярных решений системы уравнений (I), которые допускают аналитическое продолжение в области $\mathcal{D}\times\bar{\mathcal{D}}$, т.е. для которых функции

$$U_n\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right), \quad v_n\left(\frac{z+\zeta}{2},\frac{z-\zeta}{2i}\right)$$

$$(z=x+iy, \quad \zeta=x-iy, \quad n=1,\dots,N)$$

являются аналитическими функциями двух независимых комплексных переменных $z\in\mathcal{D}$, $\zeta\in\bar{\mathcal{D}}$. Однако этим свойством обладают все регулярные решения системы уравнений (I), так как хорошо известно, что любое такое решение является аналитическим относительно вещественных переменных x, y в области аналитичности коэффициентов этой системы (это утверждение тем же способом, что и в / 2 /, / 6 /, можно получить и с помощью формулы (5)-(6)). Следовательно, формула (5)-(6) дает общее представление всех регулярных решений системы уравнений (I).

Поступила I5.УI.1979

Кафедра высшей математики

ЛИТЕРАТУРА

I. И.Н.Векуа, Обобщенные аналитические функции, М.,1959.

2. И.Н.Векуа, Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. Мат. сб., 3I (73); 2, 1952.

3. Б.В.Боярский, Теория обобщенного аналитического вектора, Annales polonici mathematici, XVII, 1966.

4. Б.В.Боярский, Некоторые граничные задачи для системы $2n$ уравнений эллиптического типа на плоскости, ДАН СССР, I24, № I, 1959.

5. Б.В.Боярский, Общее представление решений эллиптической системы $2m$ уравнений на плоскости, ДАН СССР, I22, № 4, 1958.

6. И.Н.Векуа, Новые методы решения эллиптических уравнений, М., 1948.

რ. კორძაძე, ა. ალ-კაშიფი

პირველი რიგის ელიფსური ტიპის 2N განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენა ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში

რეზიუმე

მიღებულია ანალიზურკოეფიციენტებიანი /I/ განტოლებათა სისტემის ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენა ანალიზურ ფუნქციათა საშუალებით.

R. Kordzadze, A. Al-Kashif.

GENERAL REPRESENTATION OF A SOLUTION OF 2N FIRST ORDER ELLIPTIC EQUATIONS IN THE CASE OF TWO INDEPENDENT VARIABLES

Summary

A general representation of the solution of the system (1) with analytic coefficients is derived by means of analytic functions.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

ОБЩАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ 2 N УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Р.А.Кордзадзе, А.М.Эль-Кашиф

I°. Общие системы эллиптического типа первого порядка с двумя независимыми переменными и граничные задачи типа задачи Римана-Гильберта были исследованы в работах / I / - / 6 / . В данной работе, с использованием полученного нами / 7 / общего представления решений системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_n}{\partial x} - \dfrac{\partial v_n}{\partial y} = \sum\limits_{m=1}^{N} \left[a_{n,m}(x,y) u_m + b_{n,m}(x,y) v_m \right], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,\dots,N) \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial y} + \dfrac{\partial v_n}{\partial x} = \sum\limits_{m=1}^{N} \left[c_{n,m}(x,y) u_m + d_{n,m}(x,y) v_m \right], \end{cases} \quad (I)$$

где $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$ - действительные аналитические функции вещественных переменных x, y, исследуется общая граничная задача для этих систем уравнений. При $N=1$ имеем систему уравнений Карлемана-Векуа, полное изложение теории которой имеется в / 8 /, / 9 /.

2^0. Пусть $\mathcal{D}$ – некоторая конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченная простым гладким замкнутым контуром Ляпунова. Последняя означает, что касательная к кривой Γ в точке $t \in \Gamma$ составляет с вещественной осью угол $\theta(t)$, который удовлетворяет условию Гельдера (см. / 10 /) на Γ. В качестве положительного направления на Γ всегда берется то, которое оставляет область $\mathcal{D}$ слева. Мы всегда будем предполагать, что замкнутая область $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} + \Gamma$ лежит внутри некоторой основной области системы уравнений (I) (см. / 7 /); кроме того, без ограничения общности будем считать, что начало координат лежит в области $\mathcal{D}$.

Рассмотрим следующую граничную задачу общего вида:

Пусть p – некоторое натуральное число или нуль; требуется найти регулярное (непрерывно дифференцируемое) в области $\mathcal{D}$ решение $u_n(x,y)$, $v_n(x,y)$, $(n = 1,\dots,N)$ систем уравнений (I), удовлеворяющее граничному условию

$$\sum_{1 \le m \le N} \sum_{0 \le j+k \le p} \Big\{ \alpha_{n,m}^{j,k}(t_0)(u_m^{j,k}(t_0))^+ + \beta_{n,m}^{j,k}(t_0)(v_m^{j,k}(t_0))^+ + \quad (t_0 \in \Gamma,\ n = 1,\dots,N) \tag{2}$$

$$+ \int_\Gamma \gamma_{n,m}^{j,k}(t_0,t)(u_m^{j,k}(t))^+ ds + \int_\Gamma \delta_{n,m}^{j,k}(t_0,t)(v_m^{j,k}(t))^+ ds \Big\} = f_n(t_0),$$

где ds – элемент длины дуги в точке $t(s) = x(s) + iy(s) \in \Gamma$, $\alpha_{n,m}^{j,k}(t_0)$, $\beta_{n,m}^{j,k}(t_0)$ – заданные действительные функции точки $t_0 \in \Gamma$, удовлетворяющие условию Гельдера на Γ, $\gamma_{n,m}^{j,k}(t_0,t)$, $\delta_{n,m}^{j,k}(t_0,t)$ – заданные действительные функции точек $t_0, t \in \Gamma$, такие, что

$$|t-t_0|^\alpha \gamma_{n,m}^{j,k}(t_0,t),\ |t-t_0|^\alpha \delta_{n,m}^{j,k}(t_0,t)\ (t_0,t\in\Gamma,\ 0\le\alpha\le 1)$$

удовлетворяют условию Гельдера по обеим переменным, $(U_m^{j,k}(t_0))^+$ и $(V_m^{j,k}(t_0))^+$ – предельные значения функций

$$U_m^{j,k}(x,y)\equiv\frac{\partial^{j+k}U_m}{\partial x^j\partial y^k},\ V_m^{j,k}(x,y)\equiv\frac{\partial^{j+k}V_m}{\partial x^j\partial y^k}\quad(U_m^{0,0}\equiv U_m,\ V_m^{0,0}\equiv V_m)$$

соответственно, когда точка $z=x+iy$ стремится из области $\mathcal{D}$ к граничной точке $t_0\in\Gamma$; предполагается, что все $(U_m^{j,k}(t_0))^+,(V_m^{j,k}(t_0))^+\ (t_0\in\Gamma)$ существуют и удовлетворяют условию Гельдера на границе Γ.

Для дальнейшего удобно систему уравнений (I) и граничные условия (2) записать в эквивалентной векторной форме

$$\frac{\partial W}{\partial\bar z}=A(z)W(z)+B(z)\overline{W(z)}\quad(z=x+iy,\ 2\partial/\partial\bar z=\partial/\partial x+i\,\partial/\partial y),\tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\sum_{0\le j+k\le p}\{\alpha_{j,k}(t_0)(W^{j,k}(t_0))^+ +\int_\Gamma\beta_{j,k}(t_0,t)(W^{j,k}(t))^+ds=f(t_0),\quad t_0\in\Gamma,\tag{4}$$

где

$$W(z)=\begin{pmatrix}W_1(z)\\ \vdots\\ W_N(z)\end{pmatrix},\ W_n=U_n+iV_n;\ f(t_0)=\begin{pmatrix}f_1(t_0)\\ \vdots\\ f_N(t_0)\end{pmatrix}$$

$$A=\|A_{n,m}\|,\quad B=\|B_{n,m}\|,$$

$$4A_{n,m}=a_{n,m}+d_{n,m}+ic_{n,m}-ib_{n,m},\quad 4B_{n,m}=a_{n,m}-d_{n,m}+ic_{n,m}+ib_{n,m},$$

$$\alpha_{j,k}(t_0)=\|\alpha^{j,k}_{n,m}(t_0)-i\beta^{j,k}_{n,m}(t_0)\|,\quad \beta_{j,k}(t_0,t)=\|\gamma^{j,k}_{n,m}(t_0,t)-i\delta^{j,k}_{n,m}(t_0,t)\|.$$

$$(z=x+iy\in \mathcal{D},\quad t_0,t\in\Gamma,\quad j,k=0,1,\dots,\quad j+k\le p,\quad n,m=1,\dots,N).$$

Если $A(z)\equiv B(z)\equiv 0$, то $N(z)$ – голоморфный вектор; в этом случае краевая задача (3)-(4) исследована И.Н.Векуа при $N=1$ / II / и Н.П.Векуа при $N>1$ / I2 /.

3°. Искомое решение граничной задачи (3)-(4) можно представить в виде / 7 /

$$W(z)=\omega(z)\Phi(z)+\int_0^z\Gamma_1(z,t)\Phi(t)dt+\int_0^{\bar z}\Gamma_2(z,t)\overline{\Phi(t)}d\bar t, \qquad (5)$$
$$(z\in\mathcal{D}),$$

где $\Phi(z)$ – голоморфный в области $\mathcal{D}$ вектор (столбец) с N компонентами, $\omega(z)$, $\Gamma_1(z,t)$, $\Gamma_2(z,\bar t)$ – определенные квадратные матрицы порядка N, которые строятся только при помощи коэффициентов уравнения (3); $\omega(z)$ – аналитическая матрица переменных x,y в области $\bar{\mathcal{D}}$ и $\det\omega(z)\neq 0$ всюду $\bar{\mathcal{D}}$; $\Gamma_1(z,t)$, $\Gamma_2(z,\bar t)$ – голоморфные матрицы переменных t и $\bar t$ соответственно и аналитические матрицы переменных x,y в $\bar{\mathcal{D}}$.

Так как по условию $(W^{j,k}(t_0))^+\ (0\le j+k\le p)$ удовлетворяют условию Гельдера на Γ, то нетрудно доказать, что голоморфный от $z\in\mathcal{D}$ вектор $\Phi(z)$, посредством которого по формуле (5) представляется решение граничной задачи (3)-(4), вместе со своими производными порядка p включительно удовлетворяет условию Гельдера в замкнутой области $\mathcal{D}+\Gamma$. Поэтому этот вектор можно представить по формуле И.Н.Векуа / II / :

$$\Phi(z) = \int_\Gamma \frac{t\mu(t)ds}{t-z} + ic, \quad \text{когда } \rho=0, \tag{6}$$

$$\Phi(z)=\int_\Gamma \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{\rho-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_\Gamma \mu(t)ds+ic, \quad \text{когда } \rho\geq 1, \tag{7}$$

где ds – элемент дуги в точке $t(s)\in\Gamma$, $\mu(t)$ – вещественный вектор (столбец) с N компонентами, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ , c – вещественный постоянный вектор (столбец) с N компонентами $c_1,\dots,c_N$; вектор $\mu(t)$ и c определяются по вектору $\Phi(z)$ единственным образом. Под $\ln(1-\frac{z}{t})$ при данном $t\in\Gamma$ подразумевается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$.

Подставляя (6)–(7) в (5), получим

$$W(z)=\int_\Gamma K_0(z,t)\mu(t)ds+i\alpha(z)c \quad (z\in\mathcal{D}), \tag{8}$$

где

$$K_0(z,t)=\frac{t\,\omega(z)}{t-z}+\int_0^z \frac{t\,\Gamma_1(z,t_1)}{t-t_1}dt_1+$$

$$+\int_0^{\bar z}\frac{\bar t\,\Gamma_2(z,\bar t_1)}{\bar t-\bar t_1}dt_1 \quad (z\in\mathcal{D},\ t\in\Gamma), \quad \text{когда } \rho=0, \tag{9}$$

$$K_0(z,t)=\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{\rho-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+1\right]\omega(z)+$$

$$+\int_0^z\left[\left(1-\frac{t_1}{t}\right)^{\rho-1}\ln\left(1-\frac{t_1}{t}\right)+1\right]\Gamma_1(z,t_2)dt_1+$$

$$+\int\limits_0^{\bar z}\Big[\big(1-\frac{\bar t_1}{t}\big)^{p-1}\ln\big(1-\frac{\bar t_1}{t}\big)+1\Big]\Gamma_2(z,\bar t_1)d\bar t_1 \quad (z\in\mathcal{D},\ t\in\Gamma),$$ когда $p\geq 1$, (10)

$$\alpha(z)=\omega(z)+\int\limits_0^{z}\Gamma_1(z,t)dt-\int\limits_0^{\bar z}\Gamma_2(z,\bar t)dt \quad (z\in\mathcal{D},\ p\geq 0). \qquad \text{(II)}$$

Подставляя (8) в граничное условие (4), для определения вектора $\mu(t)$ получим интегральное уравнение

$$T\mu\equiv a(t_0)\mu(t_0)+\int\limits_{\Gamma}K(t_0,t)\mu(t)ds=f(t_0)-\sigma(t_0)C,\ t_0\in\Gamma, \qquad \text{(I2)}$$

где

$$a(t_0)=\mathcal{R}e\Big[\pi i(-1)^p(p-1)!\,t_0^{1-p}\bar t_0^{-1}\sum_{k=0}^{p}i^k\alpha_{p-k,k}(t_0)\omega(t_0)\Big] \quad (t_0\in\Gamma),$$

$$K(t_0,t)=\mathcal{R}e\Big\{\pi i(-1)^p(p-1)!\,t^{1-p}t_1'\sum_{k=0}^{p}i^k\beta_{p-k,k}(t_0,t)\omega(t)+$$

$$+\sum_{0\leq j+k\leq p}\Big[\alpha_{j,k}(t_0)\frac{\partial^{j+k}K_0(t_0,t)}{\partial\xi^j\,\partial\eta^k}+\int\limits_{\Gamma}\beta_{j,k}(t_0,t_1)\frac{\partial^{j+k}K_0(t_1,t)}{\partial\xi_1^j\,\partial\eta_1^k}ds_1\Big]\Big\},$$

$$(t_0=\xi+i\eta\in\Gamma,\quad t_1=\xi_1+i\eta_1)$$

$$\sigma(t_0)=\mathcal{R}e\, i\sum_{0\leq j+k\leq p}\Big[\alpha_{j,k}(t_0)\frac{\partial^{j+k}\alpha(t_0)}{\partial\xi^j\,\partial\eta^k}+\int\beta_{j,k}(t_0,t)\frac{\partial^{j+k}\alpha(t_0)}{\partial\xi^j\,\partial\eta^k}ds\Big],$$

$$(t_0=\xi+i\eta\in\Gamma)$$

причем, здесь и ниже при $p=0$ очитаем, что $(-1)!=1$.

В уравнении (2) интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши, так как, учитывая (9)-(I0), легко показать, что

$$K(t_0,t)=\mathcal{R}e\Big[\frac{(-1)^p(p-1)!}{t^{p-1}(t-t_0)}\sum_{k=0}^{p}i^k\alpha_{p-k,k}(t_0)\omega(t_0)+\tilde K(t_0,t)\Big]$$

$$(t_0,t\in\Gamma),$$

где $\tilde{K}(t_0,t)$ – вполне определенная квадратная матрица порядка N, имеющая особенность лишь логарифмического типа при $t=t_0$.

Из самого вывода уравнения (I2) следует, что оно эквивалентно граничной задаче (3)-(4) в следующем смысле: если краевая задача (3)-(4) имеет решение $w(z)$, то это решение представимо в виде (8), где вещественный вектор $\mu(t)$ $(t\in\Gamma)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ и является решением уравнения (2); наоборот, если для какого-либо значения вещественного постоянного вектора C уравнение (I2) имеет вещественное решение $\mu(t)$, удовлетворяющее условию Гельдера на Γ, то вектор $w(z)$, определенный формулой (8), дает решение краевой задачи (3)-(4).

4^0. Сингулярное интегральное уравнение (I2) является уравнением нормального типа (см. / I0 /, / I2 /), если выполнено условие

$$c(t)\equiv \det\sum_{k=0}^{p} i^k \alpha_{p-k,k}(t)\neq 0 \qquad \text{всюду на } \Gamma. \qquad (I3)$$

Это условие, которое в дальнейшем будем считать выполненным, накладывает ограничение только на коэффициенты при производных порядка p от искомого вектора, фигурирующих в граничных условиях (4) вне интеграла.

Вычисляя индекс $\varkappa$ уравнения (I2) согласно известной формуле Н.И.Мусхелишвили (см. / I0 /, / I2 /), легко найдем, что

$$\varkappa = 2(p+\varkappa_1), \qquad (I4)$$

где $\varkappa_1$ равно приращению функции $(2\pi)^{-1} \arg \det c(t)$, когда точка t один раз опишет Γ в положительном направлении. Число $\varkappa$ мы будем называть индексом краевой задачи (3)-(4).

Ниже всюду линейную независимость функций (векторов) будем понимать над полем вещественных чисел.

Согласно известных теорем Нетера (см. / I0 /, / I2 /) имеем:

а) $\ell - \ell' = \varkappa$, где ℓ - число (максимальное) линейно независимых решений однородного уравнения $T\mu = 0$, ℓ' - число (максимальное) линейно независимых решений союзного однородного уравнения

$$T'\nu \equiv a'(t_0)\nu(t_0) + \int_\Gamma K'(t,t_0)\nu(t)ds = 0 \quad (t_0 \in \Gamma),$$

где a' и K' - матрицы, полученные транспонированием матриц a и K соответственно;

б) для разрешимости уравнения (I2) необходимо и достаточно, чтобы имели место равенства

$$\int_\Gamma [f(t) - \sigma(t)c]\nu_i(t)ds = 0, \quad i = 1, \dots, \ell', \tag{I5}$$

где $\nu_1, \dots, \nu_{\ell'}$ - полная система линейно независимых решений союзного уравнения $T'\nu = 0$.

5^0. На основании исследования полученного выше интегрального уравнения можно получить ряд важных выводов относительно разрешимости краевой задачи (3)-(4). Для формулировки основных результатов рассмотрим матрицу

$$\Omega = (\Omega_{i,j}), \quad \Omega_{i,j} \equiv \int_\Gamma \sigma_j(t)\nu_i(t)\,ds, \qquad i=1,\dots,\ell', \quad j=1,\dots,N, \tag{I6}$$

где $\sigma_j(t)$ – вектор, образованный элементами j-го столбца матрицы $\sigma(t) = (\sigma_{i,j}(t))$:

$$\sigma_j(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,j}(t) \\ \vdots \\ \sigma_{N,j}(t) \end{pmatrix}, \qquad j=1,\dots,N.$$

Если $\ell'=0$, то считаем, что все $\Omega_{i,j}=0$. Равенства (I5) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{N} \Omega_{i,j} c_j = \mathcal{B}_i, \qquad i=1,\dots,\ell',$$

где

$$\mathcal{B}_i = \int_\Gamma f(t)\nu_i(t)\,ds, \qquad i=1,\dots,\ell'.$$

Справедлива следующая

Теорема I. Для того чтобы краевая задача (3)–(4) была разрешима при любой правой части $f(t_0)$, необходимо и достаточно, чтобы $\ell'=q$, где q –ранг матрицы (I6); в этом случае индекс краемой задачи

$$\varkappa \geqslant \begin{cases} 0, & \text{когда } q=0 \\ -q, & \text{когда } q \text{ четное число} \\ -q+1, & \text{когда } q \text{ нечетное число} \end{cases} \tag{I7}$$

и однородная $(f(t)\equiv 0)$ краевая задача имеет ровно $\varkappa+N$ линейно независимых решений, где $2N$ – число уравнений в системе (I).

Когда условие этой теоремы не соблюдается, т.е. когда $\ell'\neq q$ (что имеет, например, место всякий раз, когда индекс краевой задачи не удовлетворяет неравенству (I7) и, следовательно, когда $\varkappa<-N$), имеет место следующая

Теорема 2. Пусть $\ell'\neq q$, где q -ранг матрицы (I6). Тогда

а) если

$$\int_\Gamma \sigma_j(t)v_i(t)ds=0,\quad i=1,\dots,\ell',\quad j=1,\dots,N, \qquad (18)$$

то однородная $(f(t)\equiv 0)$ краевая задача (3)-(4) имеет ровно $\ell+N=\varkappa+\ell'+N$ линейно независимых решений, а неоднородная краевая задача разрешима, тогда и только тогда, когда

$$\int_\Gamma f(t)v_i(t)ds=0,\quad i=1,\dots,\ell',$$

б) если условие (18) не соблюдено, то однородная $(f(t)\equiv 0)$ краевая задача (3)-(4) имеет ровно $\ell+N-q=$ $=\varkappa+\ell'+N-q$ линейно независимых решений, а неоднородная краевая задача разрешима, тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{Vmatrix} \Omega_{1,1} \dots \Omega_{1,q} & B_1 \\ \dots\dots\dots & \dots \\ \Omega_{q,1} \dots \Omega_{q,q} & B_q \\ \Omega_{q+s,1} \dots \Omega_{q+s,q} & B_{q+s} \end{Vmatrix} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, \ell' - q$$

Поступила 28.УI.1979

Кафедра высшей математики

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.В.Бояроский, Теория обобщенного аналитического вектора, Annales polonici mathematici, XVII, 1966.

2. Б.В.Бояроский, Некоторые граничные задачи для системы уравнений эллиптического типа на плоскости, ДАН СССР, 124, № 1, 1959.

3. А.И.Вольперт, Исследование граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, ДАН СССР, 114, № 3, 1957.

4. А.И.Вольперт, Нормальная разрешимость граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Теор. и прикл. матем., вып. 1, 1958.

5. А.И.Вольперт, Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости. Труды Московского мат. общества, М., 1961.

6. H.Beckert, Systeme partieller linearer elliptischer Differentvalgleichungen erster und hoherer Ordnung mit zwei unabhangigen variablen, Math. Nachr. 12, N5-6, 1954.

7. Р.А.Кордзадзе, А.М.Эль-Кашиф, Общее представление решений линейной системы $2N$ уравнений первого порядка эллиптического типа с двумя независимыми переменными (см. предыдущую статью в настоящем сборнике).

8. И.Н.Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

9. И.Н.Векуа, Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, Матем. сб., 31 (73), 2, 1952.

10. Н.И.Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.

11. И.Н.Векуа, Об одной линейной граничной задаче Римана, Труды Тбилисского математического института, т.XI, 1942.

12. Н.П.Векуа, Системы сингулярных интегральных уравнений, М., 1970.

რ.კორძაძე, ა.ელ-კაშიფი

ზოგადი სასაზღვრო ამოცანა პირველი რიგის ელიფსური ტიპის $2N$ განტოლებათა სისტემისათვის ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში

რეზიუმე

(1) სისტემისათვის შესწავლილია (2) სასაზღვრო ამოცანა.

R. Kordzadze, A. Al-Kashif.

A GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A SYSTEM OF 2N FIRST-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS IN THE CASE OF TWO INDEPENDENT VARIABLES

Summary

The boundary value problem (2) is studied for the system (1).

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

МНОГОЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗЛИЧНЫМИ ИНТЕНСИВНОСТЯМИ ПОСТУПЛЕНИЯ ТРЕБОВАНИЙ

А.А. Чаргеишвили

1°. Рассмотрим систему M/M/C. Требования поступают в систему с интенсивностью λ_1 до тех пор, пока в системе не накопится C требований, т.е. пока все приборы не будут заняты. После этого требования поступают в систему с интенсивностью λ_2. Интенсивность обслуживания постоянна и равна μ.

Обозначим через $P_K(t)$ вероятность того, что к моменту времени t в системе находится K требований.

Вероятностно-разностные уравнения, описывающие эту систему, имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&P_0(t+\Delta t)=P_0(t)(1-\lambda_1\Delta t)+\mu\Delta t P_1(t),\\
&P_k(t+\Delta t)=P_k(t)(1-\lambda_1\Delta t-k\mu\Delta t)+P_{k-1}(t)\lambda_1\Delta t+\\
&\quad+\mu(k+1)P_{k+1}(t)\Delta t, \qquad k=1,2\ldots c-1,
\end{aligned}
\qquad (I)
$$

$$P_c(t+\Delta t)=P_c(t)(1-\lambda_2\Delta t-c\mu\Delta t)+\lambda_1 P_{c-1}(t)\Delta t+c\mu P_{c+1}(t)\Delta t,$$

$$P_k(t+\Delta t)=P_k(t)(1-\lambda_2\Delta t-c\mu\Delta t)+\lambda_2 P_{k-1}(t)\Delta t+c\mu P_{k+1}(t)\Delta t,$$

$$k=c+1,\ c+2,\ \ldots .$$

Переходя к пределу. при $\Delta t \to 0$ получим бесконечную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda_1 P_0(t)+\mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=-(\lambda_1+k\mu)P_k(t)+\lambda_1 P_{k-1}(t)+(k+1)\mu P_{k+1}(t), \qquad (2)$$

$$k=1,2\ldots c-1,$$

$$\frac{dP_c(t)}{dt}=-(\lambda_2+c\mu)P_c(t)+\lambda_1 P_{c-1}(t)+c\mu P_{c+1}(t),$$

$$\frac{dP_k(t)}{dt}=-(\lambda_2+c\mu)P_k(t)+\lambda_2 P_{k-1}(t)+c\mu P_{k+1}(t),$$

$$k=c+1,\ c+2,\ldots$$

Нас интересует стационарное решение системы. Оно получается, следуя I, при переходе к пределу $t \to \infty$. В данном случае получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\lambda_1 P_0=\mu P_1,$$

$$-(\lambda_1+k\mu)+\lambda_1 P_{k-1}+(k+1)\mu P_{k+1}=0, \quad k=1,2\ldots c-1,$$

$$-(\lambda_2+c\mu)+\lambda_1 P_{c-1}+c\mu P_{c+1}=0, \qquad (3)$$

$$-(\lambda_2+c\mu)+\lambda_2 P_{k-1}+c\mu P_{k+1}=0, \quad k=c+1,\ c+2,\ldots$$

Обозначим $\lambda_1 P_{\cdot 1}-k\mu P_k=y_k$, $k=1,2\ldots c-1$, тогда

$$y_k=0. \qquad (4)$$

22

Из (4) легко получаем следующее соотношение:

$$P_{c+1} = \frac{\lambda_1^c \lambda_2}{\mu^{c+1} c \cdot c!} P_0 . \tag{5}$$

Подставляя значения P_{c-1}, P_c, вычисленные по (5), получим выражение для P_{c+1}:

$$P_{c+1} = \frac{\lambda_1^c \lambda_2}{\mu^{c+1} c \cdot c!} P_0 . \tag{6}$$

Обозначим $P_k - P_{k+1} = z_k$, $k = c, c+1, \dots$, тогда

$$z_{k+1} = \frac{\lambda_2}{c\mu} z_k . \tag{7}$$

Замечая также, что $\sum_{j=0}^{k-1} z_{c+1} = P_{c+k} - P_c$, $k = 1, 2 \dots$,

путем несложных преобразований находим:

$$P_{c+k} = \frac{P_0 \lambda_1^c \lambda_2^k}{c!\, c^k \mu^{c+k}} . \tag{8}$$

Подставляя найденные выражения P_k, $k = 1, 2 \dots$, в нормировочное условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k = 1 , \tag{9}$$

получим явное выражение для P_0

$$P_0 = \left\{ \sum_{k=0}^{c} \frac{\lambda_1^k}{k!\, \mu^k} + \frac{\lambda_1^c}{(c-1)!\, \mu^{c-1} (c\mu - \lambda_2)} \right\}^{-1} \tag{10}$$

Тогда

$$P_k = \frac{\lambda_1^k}{k!\,\mu^k}\left\{\sum_{k=0}^{c}\frac{\lambda_1^k}{k!\,\mu^k} + \frac{\lambda_1^c}{(c-1)!\,\mu^{c-1}(c\mu-\lambda_2)}\right\}^{-1}, \qquad k=1,2\ldots c \tag{II}$$

$$P_{c+k} = \frac{\lambda_1^c\,\lambda_2^k}{c!\,c^k\,\mu^{c+k}}\left\{\sum_{k=0}^{c}\frac{\lambda_1^k}{k!\,\mu^k} + \frac{\lambda_1^c}{(c-1)!\,\mu^{c-1}(c\mu-\lambda_2)}\right\}^{-1}, \qquad k=1,2\ldots \tag{I2}$$

2⁰. Рассмотрим систему массового обслуживания М/М/С. Требования поступают в систему с интенсивностью λ_1, пока в системе не накопится $c+r$ требований. После этого требования поступают в систему с интенсивностью λ_2 до тех пор, пока в системе не остается c требований (т.е. $r=0$). Дальнейшее поступление происходит с начальной интенсивностью λ_1, пока в системе не накопится $c+r$ требований. Интенсивность обслуживания не меняется и равна μ.

Обозначим через $P_k^{(1)}(t)$, где $k=0,1,\ldots, c+r-1$, вероятность того, что в системе находится K требований при интенсивности поступления λ_1, и, соответственно, через $P_k^{(2)}(t)$, где $k=c+1,\ldots$ – вероятность того, что в системе находится K требований, если интенсивность поступления λ_2.

Дифференциальные уравнения, описывающие подобную систему, имеют следующий вид:

$$\frac{dP_0^{(1)}(t)}{dt} = -\lambda_1 P_0(t) + \mu P_1(t),$$

$$\frac{dP_0^{(1)}(t)}{dt}=-(\lambda_1+k\mu)P_k^{(1)}(t)+\lambda_1 P_{k-1}^{(1)}(t)+(k+1)\mu P_{k+1}^{(1)}(t),$$

$$k=1,2,\dots c-1,$$

$$\frac{dP_c^{(1)}(t)}{dt}=-(\lambda_1+c\mu)P_c^{(1)}(t)+\lambda_1 P_{c-1}^{(1)}(t)+c\mu\left[P_{c+1}^{(1)}(t)+P_{c+1}^{(2)}(t)\right],$$

$$\frac{dP_{c+k}^{(1)}}{dt}=-(\lambda_1+c\mu)P_{c+k}^{(1)}(t)+\lambda_1 P_{c+k-1}^{(1)}(t)+c\mu P_{c+k+1}^{(1)},$$

$$k=1,2,\dots n-2,$$

$$\frac{dP_{c+n-1}^{(1)}}{dt}=-(\lambda_1+c\mu)P_{c+n-1}^{(1)}(t)+\lambda_1 P_{c+n-2}^{(1)}(t),$$

$$\frac{dP_{c+1}^{(2)}}{dt}=-(\omega_2+c\mu)P_{c+1}^{(2)}(t)+c\mu P_{c+2}^{(2)}(t), \tag{13}$$

$$\frac{dP_{c+k}^{(2)}}{dt}=-(\lambda_2+c\mu)P_{c+k}^{(2)}(t)+\lambda_2 P_{c+k-1}^{(2)}(t)+c\mu P_{c+k-1}^{(2)}(t),$$

$$k=1,2,\dots n-1,$$

$$\frac{dP_{c+n}^{(2)}}{dt}=-(\lambda_2+c\mu)P_{c+n}^{(2)}(t)+c\mu P_{c+n-1}^{(2)}(t)+\lambda_1 P_{c+n-1}^{(1)}(t)+$$

$$+\lambda_2 P_{c+n-1}^{(2)}(t),$$

$$\frac{dP_{c+k}^{(2)}}{dt}=-(\omega_2+c\mu)P_{c+k}^{(2)}+\lambda_2 P_{c+k-1}^{(2)}(t)+c\mu P_{c+k+1}^{(2)}(t),$$

$$k=n+1,n+2,\dots$$

Рассмотрим стационарный случай I. Тогда:

$$-\lambda_1 P_0^{(1)}+\mu P_1^{(1)}=0,$$

$$-(\lambda_1+k\mu)P_k^{(1)}+\lambda_1 P_{k-1}^{(1)}+(k+1)\mu P_{k+1}^{(1)}=0, \tag{14}$$

$$k=1,2,\dots c-1,$$

$$P^{(1)}_{c+1}+P^{(2)}_{c+1}=(1+\rho_1)P^{(1)}_{c}-\rho_1 P^{(1)}_{c-1},$$

$$-(1+\rho_1)P^{(1)}_{c+k}+\rho_1 P^{(1)}_{c+k-1}+P^{(1)}_{c+k+1}=0, \quad k=1,2,\ldots r-2,$$

$$P^{(1)}_{c+r-1}=\frac{\rho_1}{1+\rho_1}P^{(1)}_{c+r-2},$$

$$P^{(2)}_{c+r}=(1+\rho_2)P^{(2)}_{c+1},$$

$$-(1+\rho_2)P^{(2)}_{c+k}+\rho_2 P^{(2)}_{c+k-1}+P^{(2)}_{c+k+1}=0, \quad k=2,\ldots r-1,$$

$$-(1+\rho_2)P^{(2)}_{c+r}+P^{(2)}_{c+r+1}+\rho_1 P^{(1)}_{c-r-1}+\rho_2 P^{(2)}_{c+r-1}=0,$$

$$-(1+\rho_2)P^{(2)}_{c+k}+\rho_2 P^{(2)}_{c+k-1}+P^{(2)}_{c+k+1}=0, \quad k=r+1,\ r+2,\ldots,$$

где

$$\frac{\lambda_1}{c\mu}=\rho_1; \quad \frac{\lambda_2}{c\mu}=\rho_2.$$

Обозначая $\lambda_1 P_{k-1}-k\mu P_k=u_k$, $k=1,2,\ldots c-1$,

находим, что $u_k=0$, откуда следует:

$$P^{(1)}_{k}=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda_1}{\mu}\right)^k P_0=\frac{c^k}{k!}\rho_1^k P_0, \quad k=1,2,\ldots c. \tag{I5}$$

Подставляя найденные значения $P^{(1)}_{c-1}$, $P^{(1)}_{c}$, получаем:

$$P^{(1)}_{c+1}+P^{(2)}_{c+1}=\rho_1^{c+1}\frac{c^c}{c!}P_0. \tag{I6}$$

Обозначим $P^{(1)}_{c+k-1}-P^{(1)}_{c+k}=u_{c+k}$, $k=1,2,\ldots,r-2$.

тогда $u_{c+k}=\rho_1^k u_c$.

Суммируя от нуля до K , получим выражение для $P^{(1)}_{c+k}$:

$$P^{(1)}_{c+k} = P_c - \frac{1-\rho_1^{k}}{1-\rho_1}\left(P^{(1)}_c - P^{(1)}_{c+1}\right), \qquad (17)$$

где $k = 1, 2, \ldots, r-1$.

Из (14) и (17) получаем:

$$\frac{P^{(1)}_c - P^{(1)}_{c+1}}{1-\rho_1} = P_c \, \frac{1}{1-\rho_1^{r}} \, . \qquad (18)$$

Тогда

$$P^{(1)}_{c+k} = \frac{1-\rho_1^{r-k}}{1-\rho_1^{r}} \, \frac{c^c}{c!} \rho_1^{c+k} P_0 . \qquad (19)$$

Подставляя значение $P^{(1)}_{c+k}$ в (16), получаем:

$$P^{(2)}_{c+1} = \frac{c^c}{c!} \, \frac{\rho_1^{c+r}(1-\rho_1)}{1-\rho_1^{r}} P_0 \qquad (20)$$

Аналогично:

$$P^{(r)}_{c+k} = P^{(r)}_{c+1} - \frac{1-\rho_2^{k-1}}{1-\rho_2}\left(P^{(2)}_{c+1} - P^{(2)}_{c+2}\right), \qquad (21)$$

$k = 1, 2, \ldots, r.$

Из соотношений (14), (20), (21) находим:

$$P^{(r)}_{c+k} = \frac{c^c}{c!} \rho_1^{c+r} \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2^{k})}{(1-\rho_2)(1-\rho_1^{r})} P_0 , \quad k = 1, 2, \ldots, r \qquad (22)$$

Используя, далее, (22) в соотношениях (14), получим:

$$P^{(2)}_{c+r+1} = \frac{c^c}{c!}\rho_1^{c+r}\rho_2 \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2^r)}{(1-\rho_2)(1-\rho_1^r)} P_0 . \qquad (23)$$

Аналогично рассуждая, определяем $P^{(2)}_{c+k}$ (для $k=r+1, r+2, \ldots$):

$$P^{(2)}_{c+k} = P^{(2)}_{c+r} - \frac{1-\rho_2^{k-r}}{1-\rho_2}\left(P^{(2)}_{c+r} - P^{(2)}_{c+r+1}\right), \qquad (24)$$

$k=r+1, r+2, \ldots$

Из (23) и (24) получаем

$$P^{(2)}_{c+k} = \rho_2^{k-r}\frac{c^c}{c!}\rho_1^{c+r}\frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2^r)P_0}{(1-\rho_2)(1-\rho_1^r)}, \qquad (25)$$

где $k=r+1, r+2, \ldots$

При данной постановке задачи нормировочное условие представляет собой выражение следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{c} P_k^{(1)} + \sum_{k=c+1}^{c+r-1}\left[P_k^{(1)} + P_k^{(2)}\right] + \sum_{k=c+r}^{\infty} P_k^{(2)} = 1. \qquad (26)$$

Подставляя все найденные значения в (26) и производя соответствующие преобразования, находим:

$$P_0 = \left\{\sum_{k=0}^{c}\frac{(c\rho_1)^k}{k!} + \frac{c^c\rho_1^{c+1}\left[r(1-\rho_1)^2\rho_1^{r-1} + (1-\rho_2)(1-r\rho_1^{r-1}+(r-1)\rho_1^{r})\right]}{c!\,(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_1^r)}\right\}^{-1} \qquad (27)$$

Поскольку все основные соотношения установлены, может быть найдено окончательное решение задачи, т.е. выведены формулы расчета вероятностей

$$P_\kappa = \frac{c^\kappa}{\kappa!}\rho_1^\kappa \left\{ \sum_{\kappa=0}^{c} \frac{(c\rho_1)^\kappa}{\kappa!} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^c \rho_1^{c+1}\left[r(1-\rho_1)^2 \rho_1^{r-1} + (1-\rho_2)(1-\rho_2)(1-r\rho_1^{r-1}+(r-1)\rho_1^r)\right]}{c!(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_1^r)} \right\}^{-1} \tag{28}$$

для $\kappa = 1, 2, \ldots, c$;

$$P^{(1)}_{c+\kappa} = \frac{c^c \rho_1^{c+\kappa}(1-\rho_1^{r-\kappa})}{c!(1-\rho_\kappa^r)} \left\{ \sum_{\kappa=0}^{c} \frac{(c\rho_1)^\kappa}{\kappa!} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^c \rho^{c+1}\left[r(1-\rho_1)^2 \rho_2^{r-1} + (1-\rho_2)(1-r\rho_1^{r-1}+(r-1)\rho_1^r)\right]}{c!(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_1^r)} \right\}^{-1} \tag{29}$$

для $\kappa = 1, 2, \ldots, r-1$;

$$P^{(2)}_{c+\kappa} = \frac{c^c \rho_1^{c+r}(1-\rho_1)(1-\rho_2)^r}{c!(1-\rho_2)(1-\rho_1^r)} \left\{ \sum_{\kappa=0}^{c} \frac{(c\rho_1)^\kappa}{\kappa!} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^c \rho_1^{c+1}\left[r(1-\rho_1)^2 \rho_1^{r-1} + (1-\rho_2)(1-r\rho_1^{r-1}+(r-1)\rho_1^r)\right]}{c!(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_1^r)} \right\}^{-1} \tag{30}$$

для $\kappa = 1, 2, \ldots, r-1$;

$$P^{(2)}_{c+\kappa} = \frac{c^c \rho_1^{c+r} \rho_2^{\kappa-r}(1-\rho_1)(1-\rho_2^r)}{c!(1-\rho_2)(1-\rho_1^\kappa)} \left\{ \sum_{\kappa=0}^{c} \frac{(c\rho_1)^\kappa}{\kappa!} + \right.$$

$$\left. + \frac{c^c \rho_1^{c+1}\left[r(1-\rho_1)^2 \rho_1^{r-1} + (1-\rho_2)(1-r\rho_1^{r-1}+(r-1)\rho_1^r)\right]}{c!(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_1^r)} \right\}^{-1} \tag{31}$$

для $\kappa = r, r+1, \ldots$

Поступила 27.УШ.1979 ВНИИПОУ

ЛИТЕРАТУРА

I. А.Я.Хинчин, Работы по математической теории массового обслуживания, "Физматгиз", М., 1963.

ა.ჩარგეიშვილი

მრავალარხიანი მასობრივი მომსახურების სისტემები შემავალი ნაკადის სხვადასხვა ინტენსივობის დროს

რეზიუმე

განხილულია მრავალარხიანი მომსახურების M/M/C სისტემის ორი მოდელი. შემავალი ნაკადის ინტენსივობა დამოკიდებულია რიგის სიგრძეზე. ნაპოვნია სტაციონარულ მდგომარეობებში სისტემის ყოფნის ალბათობები.

A.Chargeishvili

A MULTI - CHANNEL QUEUEING SYSTEM WITH DIFFERENT INTENSITIES OF INPUT FLOW

Summary

Two models of the multi-channel queueing system M/M/C are considered.

The intensity of input flow depends on the length of the queue. The probabilities for the system to be in stationary state are found.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

212, 1980

МОДЕЛЬ ЛОКАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ОДНОМАРШРУТНОЙ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ

Ю.В.Киладзе, О.И.Кварацхелия

Объектом исследования в настоящей работе является решение одномаршрутной задачи календарного планирования с m станками и n обрабатываемыми на них изделиями типа задачи Беллмана - Джонсона / I /.

Пусть имеется n деталей, которые должны быть обработаны на m станках. Для каждой детали задана последовательность номеров станков, на которых она должна проходить обработку.

Сущность задачи заключается в определении порядка обработки деталей на каждом из m станков. В качестве целевой функции обычно принимаются критерии минимизации суммарного времени обработки деталей на этих станках

$$F(G)=\min_{G}\left(\max_{i} t_0(i,m_i)\right),$$

где $t_0(i,m_i)$ - момент окончания последней операции обработки i-ой детали, а G - множество календарных планов.

Первоначальная информация задается в виде технологической матрицы

$$T = \left\| c_{ij}, t_{ij} \right\|_{n,m},$$

где c_{ij} - номер станка, на котором выполняется j-ая операция над i-ой деталью, а t_{ij} - время выполнения этой операции на данном станке.

Кроме обычных ограничений для задачи календарного планирования, описанных выше, здесь мы полагаем, что все детали имеют одинаковые маршруты обработки, т.е. проходят при обработке одинаковую последовательность станков.

Для того чтобы применить к данной задаче метод направленного случайного поиска, необходимо выполнение следующих этапов алгоритмизации этой проблемы:

1. Построение математической модели для представления множества календарных планов. Такая модель должна быть легко приспособлена для расчетов на ЭВМ, при этом все многообразие возможных векторов перестановок должно реализовываться на модели.

2. Построение эффективной метрики для рассматриваемого пространства перестановок.

3. Разработка алгоритма направленного случайного поиска для конкретной метрики.

Рассмотрим подробнее все этапы данной проблемы. В качестве математической модели для представления множества календарных планов используем ориентировочный граф $\Gamma\{O,U\}$, методика расчета которого известна. Здесь символ O обозначает множество вершин графа, которым ставятся в соответствие некоторые неотрицательные числа t_{ij} , указывающие время обработки i -ой детали на j -ом станке. Символ U обозначает множество дуг графа, указывающих порядок следования вершин. Для удобства расчета необходимо, чтобы граф имел одну начальную и одну конечную вершины, для чего граф после построения дополняется начальной и конечной вершинами с длительностями $t_н = t_к = 0$.

Чтобы с помощью рассматриваемого графа представить все множество возможных способов обработки деталей на станках и рассчитать характеристики множества календарных планов, представим множество дуг U в виде совокупности двух непересекающихся подмножеств U_1 и U_2.

Подмножество U_1 назовем множеством технологических дуг, поскольку они заданы технологическим маршрутом обработки деталей (постоянным для нашей задачи).

Подмножество дуг U_2 указывает порядок обработки, т.е. выполнения отдельных операций, детали на каждом из m рабочих мест. В свою очередь, порядок обработки деталей на станках зависит от выбора того или иного способа управления цехом и для каждого конкретного календарного плана определяется однозначно некоторым вектором перестановок v_i , полученным с применением разработанной нами метрики.

Таким образом, подмножество дуг U_2 состоит из некоторого числа наборов дуг, каждый из которых однозначно определяется соответствующим ему вектором v_i . Подмножество

U_2 назовем подмножеством управляющих дуг, поскольку каждый набор дуг указывает новый способ управления обработки деталей.

Резюмируя сказанное выше, отметим, что граф Γ позволяет отразить множество способов обработки n деталей на m станках и представить множество календарных планов в компактном виде, удобном для обработки на ЭВМ.

Для примера приведем алгоритм расчета графа, автоматически настраивающегося на конкретный вектор перестановок V_i. Постоянная информация такой модели включает подмножество U_1 и $\{t_{ij}\}$. Не ограничивая общности, предположим, что оптимизируется общее время обработки всех деталей $t_{кр}$, которое и вычисляется при расчете графа.

В алгоритме используются следующие операторы:

A_1 - с использованием заданной метрики формируется вектор перестановок V_i ;

A_2 - с помощью вектора перестановок V_i образуется совокупность U_2 и граф реализуется объединением $U=U_1$ и U_2 ;

P_3 - производится проверка графа на наличие контуров;

A_4 - реализуется расчет временных характеристик графа с помощью алгоритма Форда;

A_5 - вычисляется величина $t_{кр}$;

A_6 - результаты работы алгорима пересылаются на вход программы поиска оптимального плана.

Операторная схема алгоритма имеет вид

$$^{3}A_1 A_2 P_3^{\uparrow 1} A_4 A_5 A_6 .$$

Следует заметить, что для рассматриваемой нами одномаршрутной задачи появление контуров невозможно; вместе с тем, для общности мы ввели в операторную схему оператор P_3, который одновременно помогает выявлять ошибки, возникающие при работе алгоритма.

Построение эвристической λ - метрики

Эффективность метода статистической оптимизации календарных планов зависит от выбора некоторой метрики в пространстве перестановок, которая устанавливает степень "близости" перестановок между собой.

Под метрикой, как обычно, понимается некоторое неотрицательное вещественное число $\rho(A,B)$, определенное для каждой пары точек A и B в исследуемом пространстве и удовлетворяющее следующим аксиомам:

$\rho(A,B)=0,$ если $A=B$ (аксиома тождества)

$\rho(A,B)=\rho(B,A)$ (аксиома симметрии)

$\rho(A,B)=\rho(A,C)+\rho(C,B)$ (аксиома треугольника)

В данной работе будет построена разработанная нами метрика, обеспечивающая хорошую эффективность поиска оптимума, и дается способ её использования в схеме последовательной оптимизации.

Применение метрики для дискретного пространства перестановок основано на введении некоторого статистического эквивалента понятия непрерывности, так называемого понятия о статистической непрерывности, введенного в работах / 2,3 / .

Это понятие основано на следующих предположениях.

Пусть имеется некоторое метрическое пространство M , такое, что $x \in M$. Через $Q(x)$ обозначим окрестность точки x . Окрестность $Q(x)$ назовем не минимальной, если существует окрестность

$$Q(x) \subset Q(x),$$

где символ $\subset$ обозначает строгое включение.

Функцию F , определенную в пространстве M , назовем статистически непрерывной в точке x , если для каждой не минимальной окрестности $Q_1(x)$ существует окрестность $Q_2(x) \subset Q_1(x)$ такая, что

$$\mathcal{D}F[Q_2(x)] \leq \mathcal{D}F[Q_1(x)],$$

где $\mathcal{D}F[Q(x)]$ обозначает дисперсию функции F на множестве $Q(x)$. Все функции непрерывного аргумента обладают свойством статистической непрерывности.

Для функции дискретного аргумента наличие этого свойства устанавливается экспериментально.

Свойство статистической непрерывности является дополнительной информацией о пространстве M и позволяет организовать эффективный поиск экстремума за счет возможности адаптации к этому пространству.

Следует также отметить, что выполнение аксиомы тождества не является необходимым. Действительно, множество значений критерия качества в задаче календарного планирования значительно меньше всех возможных календарных планов. Поэтому многие различные календарные планы будут иметь одинаковые значения критерия качества и, следовательно, расстояния между такими планами можно считать равными нулю. Функции, для которых не выполняется аксиома тождества и выполняются аксиомы симметрии и треугольника, принято называть псевдометриками или полуметриками.

λ - метрика

Рассмотрим псевдометрику, которую для краткости будем называть λ - метрикой.

Определение I. Индексом перестановки $A=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)$ назовем величину $\mathcal{I}_A=\sum_{i=1}^{n}K_i\,\lambda(\alpha_i)$, где $\lambda(\alpha_i)$ - некоторая однозначная функция от α_i, а $K=(K_1K_2\ldots K_n)$ - вектор постоянных неизвестных коэффициентов.

Определение 2. Расстоянием между двумя перестановками $A=(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n)$ и $B=(\beta_1\beta_2\ldots\beta_n)$ в λ - метрике назовем число $\rho(A,B)=|\mathcal{I}_B-\mathcal{I}_A|$, где $\mathcal{I}_A=\sum_{i=1}^{n}K_i\lambda(\alpha_i)$ - индекс перестановки A, а $\mathcal{I}_B=\sum_{i=1}^{n}K_i\lambda(\beta_i)$ - индекс перестановки B.

Одна из возможных методик получения K и $\lambda(\alpha)$ приведена ниже.

Можно показать, что λ - метрика удовлетворяет аксиомам метрики

$$\rho(A,B) \geq 0, \tag{1}$$

$$\rho(A,B) = \rho(B,A), \tag{2}$$

$$\rho(A,B) \leq \rho(A,C) + \rho(C,B). \tag{3}$$

Рассмотрим доказательство соотношения (3), поскольку справедливость (I) и (2) вытекает из определения λ -метрики.

Перепишем неравенство (3) в следующем виде

$$\left|\mathcal{I}_B - \mathcal{I}_A\right| \leq \left|\mathcal{I}_C - \mathcal{I}_A\right| + \left|\mathcal{I}_B - \mathcal{I}_C\right|. \tag{4}$$

Введем следующие обозначения: $x = \mathcal{I}_C - \mathcal{I}_A$ и $y = \mathcal{I}_B - \mathcal{I}_C$. Тогда $\mathcal{I}_B - \mathcal{I}_A = x + y$ и неравенство (4) запишется в следующем виде:

$$|x+y| \leq |x| + |y|.$$

Таким образом, мы пришли к очевидному неравенству. Соотношение доказано.

Настройка λ - метрики

Применение λ - метрики необходимо начинать с настройки её на конкретную технологическую матрицу, т.е. выбора K и $\lambda(\alpha)$ таким образом, чтобы близким в λ - метрике перестановкам соответствовали близкие значения критерия качества.

Здесь рассмотрены два подхода.

I. Получение K и $\lambda(\alpha)$ на ос ове некоторого эвристического алгоритма, который ставил бы в соответствие каждой детали с номером α определенную целую величину $\lambda(\alpha)$, т.е. осуществлял бы перенумерацию деталей.

2. Самообучение на основе использования аппарата нормальных уравнений Гаусса (метода наименьших квадратов). Для реализации этого подхода, как известно, необходимо получить систему условных уравнений, а затем составить и решить систему нормальных уравнений.

Следует отметить, что для получения достаточно надежных результатов необходимо, чтобы число условных уравнений превышало число нормальных в 5-10 раз.

Каждый из возможных подходов имеет свои преимущества и недостатки. Какой подход эффективнее, может показать только практика. Но из общих соображений следует, по-видимому, отдать предпочтение первому методу. Действительно, хотя эвристический алгоритм не обладает универсальностью метода наименьших квадратов, ряд преимуществ, которые он имеет, делают его применение более оправданным. Эти преимущества, в основном, сводятся к следующему:

1. Получение $\lambda(\alpha)$ происходит очень быстро, гораздо быстрее, чем при использовании метода наименьших квадратов. Для получения $\lambda(\alpha)$ не требуется ни составлять, ни решать никаких уравнений. Окончательный вид метрики получается перед началом поиска.

2. Использованный в данной работе эвристический алгоритм настройки λ - метрики показал себя достаточно эффективным. Принципы, лежащие в основе его построения, были проверены при решении тестовых задач. При этом были получе-

ны неплохие результаты. Так, например, при решении ряда задач размером 4 х 4 х 4, 6 х 6 х 6 и 10 х 10 х 10 были найдены оптимальные и близкие к ним решения.

Эвристический алгоритм настройки λ - метрики

Рассмотрим эвристический алгоритм получения K и $\lambda(\alpha)$. В данном алгоритме $\lambda(\alpha)$ представляет собой новый номер детали с первоначальным номером α, соответствующий интуитивно определяемому понятию "важности" деталей. Вектор K принимается равным $(n, n-1, \dots, 1)$, где n - число деталей.

В основе построения алгоритма лежит формализация действий опытного диспетчера при решении производственной задачи календарного планирования. Рассмотрим примерную последовательность этих действий:

1. Выясняется, на каких станках образуется "узкое" место (т.е. перед какими станками образуются большие очереди, влияющие на продолжительность календарного плана). Такими станками, в основном, являются те, которые выполняют последние операции обработки деталей.

2. Обеспечивается скорейшая разгрузка станков, выделенных на предыдущем этапе. Достигается это тем, что деталям, которые дольше обрабатываются и раньше начинают обработку на выделенных станках, присваивается больший приоритет.

Определение 3. Будем считать, что станок тем "важнее", чем чаще на этом станке выполняются последние операции обработки деталей и чем больше продолжительность этих операций.

Определение 4. Будем считать деталь тем "важнее", чем дольше она обрабатывается и чем раньше начинает обработку на "важных" станках.

Смысл алгоритма заключается в перенумерации станков и деталей таким образом, чтобы более "важные" станки и детали имели большие номера.

Рассмотрим теперь сам алгоритм.

I-ый этап. Все члены технологической матрицы $\|t_{ij}\|_{n,m}$ нормируются таким образом, чтобы каждый новый элемент удовлетворял соотношению

$$1 \leq t^*_{ij} \leq n.$$

II-ой этап. Для каждого K-го станка подсчитывается его ранг "важности" по формуле

$$r_K = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} t^*_{ij} \cdot j \cdot \delta, \qquad \text{где} \qquad \delta = \begin{cases} 0, & \text{если } K \neq C_{ij} \\ 1, & \text{если } K = C_{ij} \end{cases}$$

C_{ij} -номер станка, выполняющего j-ую операцию над i-ой деталью.

III-ий этап. Станки упорядочиваются по возрастанию их рангов "важности". Каждому K-му станку присваивается условный номер r^*_K, равный номеру этого станка в полученной последовательности.

IV-ый этап. Для каждой i-ой детали подсчитывается её ранг "важности" U_i по формуле

$$\mathcal{U}_i = \sum_{j=1}^{m} t^*_{ij}\,(m-j+\varkappa^*_{ij}),$$

где $\varkappa^*_{ij}$ - условный номер станка, выполняющего j-ую операцию над i -ой деталью, полученной на предыдущем этапе.

<u>У-ый этап</u>. Детали упорядочиваются по возрастанию их рангов $\mathcal{U}_i$. Каждой i- ой детали присваивается условный номер $\lambda(\alpha)$, равный номеру этой детали в полученной последовательности.

С помощью рассмотренного алгоритма можно производить выбор начального календарного плана, находящегося вблизи экстремума.

Для этого производятся следующие действия:

<u>I-ый этап</u>. Просматриваются j -ые операции всех деталей (в первом просмотре $j=1$). Если несколько деталей подлежат обработке на одном и том же станке, то они упорядочиваются в очередь к этому станку по убыванию своих рангов.

<u>П-ой этап.</u> Если $j < n$, то переходим к просмотру следующей $(j+1)$ -ой операции.

Полученный в результате функционирования алгоритма календарный план всегда будет действительным, т.е. не будет содержать циклов.

Поступила 22.XП.1979 Кафедра экономической кибернетики

ЛИТЕРАТУРА

1. Календарное планирование (сборник). М., "Прогресс", 1966.
2. Д.И.Голенко, Статистические методы в управлении производством. М., "Статистика", 1973.
3. Д.И.Голенко, Ю.Я.Тарнопольский, Оптимизация календарных планов методами направленного поиска. Журн. "Кибернетика", № 6, Киев, 1970.

ი.კილაძე, ო.კვარაცხელია

ერთმარშრუტიანი კალენდარული დაგეგმვის ამოცანის ლოკალური ოპტიმიზაციის მოდელი

რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია ერთმარშრუტიანი კალენდარული დაგეგმვის ამოცანის ამოხსნა m დაზგაზე n დასამუშავებელი ნაკეთობის შემთხვევისათვის.

აგებულია შესაბამისი მათემატიკური მოდელი, რომელშიც რეალიზებულია ვექტორების გადაადგილებათა შესაძლო მრავალსახეობა, გადაადგილებათა სიმრავლისათვის აგებულია ეფექტური მეტრიკა, კონკრეტული მეტრიკისათვის შემუშავებულია მიმართული შემთხვევითი ძიების ალგორითმი.

I.Kiladze, O.Kvaratskhelia

LOCAL OPTIMIZATION MODEL OF THE PROBLEM OF SINGLE-ROUTE CALENDAR PLANNING

Summary

The paper gives the solution of single-route calendar planning problem for the case of machining of $\underline{n}$ articles on $\underline{m}$ benches. A corresponding mathematical model is built in which the possible variety of vector displacements has been realized. An effective metric is cons - tructed for the displacement set and an algorithm of guided random search is obtained for each concrete metric.

Научная конференция Тбилисского государственного университета (28-30.У.1979)

АННОТАЦИИ

докладов, прочитанных на секции кибернетики и прикладной математики

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სამეცნიერო კონფერენცია (28-30.V.1979)

კიბერნეტიკისა და გამოყენებითი მათემატიკის სექციაზე წაკითხული მოხსენებების

ანოტაციები

Scientific Conference of Tbilisi State University

(May 28-30, 1979)

ABSTRACTS

of papers read at the cybernetics and applied mathematics section

Т.Н.Мгвделадзе

ПЕРЕНОРМИРОВКА ЭНТРОПИИ ПРИ ИНФОРМАЦИОННО-СТАТИСТИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОСТЫХ СПИНОВЫХ СИСТЕМ

Данная задача возникает при попытке описать явления упорядочения в тройных сплавах на языке "случайных спинов". В этой модели для решения уравнений равновесия, которые являются трансцендентными , нами был предложен новый приближенный метод, - т.н. информационная теория возмущений (ИТВ), - с помощью которого было получено решение этих уравнений выше критической температуры. Однако ниже этой температуры непосредотвенное применение ИТВ оказалось невозможным в силу сингулярного характера информационной энтропии. Трудность была преодолена инвариантной перенормировкой этой величины, после чего удалось получить корректное решение и для вышеуказанного случая.

ტ.მგვდელაძე

ენტროპიის გადანორმირება მარტივი სპინური სისტემების ინფორმაციულ-სტატისტიკური მოდელირების დროს

T.Mgvdeladze

Renormalization of entropy in the case of informational-statistical simulation of simple spin systems

Т.Г.Гачечиладзе, Т.В.Манджапарашвили

ОБОБЩЕННЫЕ БИНОМИНАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ НЕЧЕТКОГО ЧИСЛА УСПЕХОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ТЕКСТОВ

Выведены формулы обобщенных биноминальных распределений в случае, когда в рассмотрение включаются нечеткие подмножества множества элементарных событий.

Вывод основан на понятии вероятности нечеткого случайного события. Полученные формулы применяются для описания вероятностной организации процесса слогообразования из звуков.

თ.გაჩეჩილაძე, თ.მანჯაფარაშვილი

განზოგადებული ბინომიალური განაწილებანი არამკაფიო წარმატებათა რიცხვის შემთხვევაში და მათი გამოყენება ტექსტების სტატისტიკური ანალიზისათვის

T.Gachechiladze, T.Manjaparashvili

Generalized binomial distributions in the case of a buzzy number of successe and their application to the statistical analysis of texts

К.Г.Чкуасели, Т.Г.Абрамишвили, Н.Ш.Джикия,
М.В.Бодзиашвили, А.С.Турманидзе

Подсистема: "ТЕКУЩАЯ УСПЕВАЕМОСТЬ И ПОСЕЩАЕМОСТЬ ОАСУ ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА"

На факультете кибернетики и прикладной математики была разработана и внедрена подсистема: "Текущая посещаемость и успеваемость". Подсистема включает две задачи учета и анализа:

- текущая успеваемость студентов;
- посещаемость занятий.

Подсистема позволяет проанализировать фактические показатели выполнения учебного графика студентами по группам, курсам и факультетам и принимать соответствующие меры деканатом для улучшения процесса обучения.

Подсистема "Посещаемость" предназначена для еженедельной обработки информации.

Входная информация заносится старостой группы еженедельно в специальные бланки, которые затем контролируются.

Выходная информация (с заметками и рекомендациями ЭВМ) выдается в деканат один раз в неделю и по запросам.

Подсистема "Успеваемость" обеспечивает оперативное управление ходом учебного процесса со стороны деканата и заведующих кафедр.

Подсистема "Текущая успеваемость" выполняет следующие функции:

- выделение информации из учебных планов о наименованиях тех дисциплин, по которым в течение учебного года проводятся коллоквиумы, контрольные и лабораторные работы, семинары;

- составление списков преподавателей;

- формирование массива студенческих групп, скорректированных на основании приказов об изменении состава групп.

Сбор сведений производится 3 раза за семестр. Основным входным документом подсистемы является ведомость, заполняемая преподавателем на каждую группу.

Выходная информация дает возможность получить отдельно список неуспевающих студентов (к неуспевающим относятся также те студенты, которые пропустили семинары, коллоквиумы, контрольные и лабораторные работы по неуважительной причине).

Программное обеспечение подсистемы "Текущая успеваемость и посещаемость" создано на языке ПЛ/1 для ЭВМ ЕС 1020, на языке "Аналитик" для ЭВМ "МИР-2".

კ.ჭკუასელი, თ.აბრამიშვილი, ნ.ჯიქია, მ.ბოძიაშვილი,
ა.თურმანიძე

თსუ სწავლებადი მართვის ავტომატიზირებული სისტემის ქვესისტემა: "მიმდინარე მოსწრება და დასწრება".

K.Chkuaseli, T.Abramishvili, N.Jikia, M.Bodziashvili, A.Turmanidze

Subsystem: "Current progress and attendance at the training automatic control system of Tbilisi State University"

З.А.Цинцадзе

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СМЕШАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ

В работе рассматривается задача оптимального управления при наличии смешанных ограничений на фазовые координаты и управления. Методом нелинейного преобраз^вания задача сводится к неклассической задаче вариационного исчисления. На основе методики Блисса получения необходимых условий оптимальности для такой задачи выведены необходимые условия оптимальности для исходной задачи.

Полученные результаты позволяют применить найденные в работе необходимые условия оптимальности и для тех задач, которые содержат "чисто фазовые" ограничения.

ზ.ცინცაძე

ოპტიმალობის აუცილებელი პირობები მართვის ამოცანისათვის შერეული შეზღუდვებით

Z.Tsintsadze

Nesessary conditions of optimality for an optimal control problem with mixed constraints

Т.П.Цилосани

АНАЛИЗ ОДНОРОДНОСТИ ТЕКСТОВ ПРИ СОСТАВЛЕНИИ ЧАСТОТНЫХ СЛОВАРЕЙ (ЧС)

При составлении ЧС, в зависимости от их назначения, приходится обрабатывать массивы, содержащие от $5 \cdot 10^5$ до $2 \cdot 10^6$ словоформ. Границы эти установлены более или менее интуитивно и требуют уточнения. Мы считаем, что проверка текстов на однородность относительно наиболее употребляемых в речи слов даст возможность четко очертить объем обрабатываемых массивов. Предложенный метод, заключающийся в сравнении информационной дивергенции двух или нескольких "подмассивов", дает ответ на два основных вопроса:

1. Достаточно однороден или нет текст.
2. Достаточен или нет объем текста для вычисления данных характеристик.

თ.წილოსანი

ტექსტების ერთგვაროვნების ანალიზი სიხშირული ლექსიკონების შედგენისას

T. Tsilosani

Analysis of text homogeneity in compiling frequency dictionaries

Г.Ф.Одиладзе

ПРОБЛЕМА ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В ТЕОРИИ ФИКСИРОВАННОЙ УСТАНОВКИ

Была изучена, вероятностная природа установки в сфере речевой деятельности человека. Выяснилось, что отражение вероятностной (структуры) природы стимула и на его основе вероятностное прогнозирование носят установочный характер.

გ.ოდილაძე

ალბათური პროგნოზირების პრობლემა ფიქსირებული განწყობის თეორიაში

G. Odiladze

The problem of probability prediction in the theory of fixated set

С О Д Е Р Ж А Н И Е

26

შინაარსი

C O N T E N T S

Редактор издательства Л.Абуашвили

Подписано в печать I5.06.80 УЭ 05890.
Бумага 60х84 Усл.печ.л. I3. Уч.-изд.л. 7,66
Тираж 300 Заказ 2397 Цена 75 коп.

Издательство Тбилисского университета, Тбилиси,
380028, пр.И.Чавчавадзе, I4.
Типография АН ГССР, Тбилиси,380060,ул.Кутузова,I9.