თბილისის უნივერსიტეტის შრომები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
ტ. 214 V.

მათემატიკა • მექანიკა ასტრონომია

MATHEMATICS • MECHANICS ASTRONOMY

თბილისი 1980 Tbilisi

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Т. 214

МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА АСТРОНОМИЯ

Тбилиси 1980

А.М.Размадзе

(1889-1929)

Исполнилось 90 лет со дня рождения известного грузинского ученого и педагога, основоположника грузинской математической науки, одного из основателей Тбилисского университета профессора Андрея Михайловича Размадзе.

А.М.Размадзе родился I2 августа 1889 года[x)] в деревне Чхениши Самтредского района Грузинской ССР в семье железнодорожника. Начальное образование он получил в Хашурской железнодорожной двухклассной школе (ныне-средняя школа, которая носит его имя), а затем в Потийском и Кутаисском городских училищах. В I904 году А.М.Размадзе поступил в четвертый класс Кутаисского реального училища, четырехгодичный курс которого прошел за два года. В I906 году А.М.Размадзе поступает на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета и с отличием окончив его в I9I0 году, приступает к преподавательской работе сначала в Мценской мужской гимназии, а затем в женской гимназии г.Мурома.

В I9I7 году, сдав экзамены на звание магистра, А.М.Размадзе приглашается в Московский университет на должность приват-доцента, где читает специальный курс вариационного исчисления.

В I9I8 году, когда открытие Тбилисского университета стало реальностью, А.М.Размадзе одним из первых среди грузинских ученых, а среди математиков - первым вернулся на родину. Еще до основания университета он вместе с П.Мелики-

---

x) Во многих источниках датой рождения указан I890 год; как выясняется, достоверным надо считать 1889 год.

швили и И.Джавахишвили по поручению Правления Общества грузинского университета занимается ответственнейшим делом подбора профессорского состава и создания профессорской коллегии для будущего университета. Отсюда и начинается исключительно плодотворная и многогранная деятельность А.М.Размадзе: разработка грузинской математической терминологии и стиля грузинской математической речи, привлечение высококвалифицированных научных кадров, подготовка кадров на месте, организация исследовательской работы, издание математических учебников на родном - грузинском языке, ведение систематических лекционно-практических занятий.

Благодаря А.М.Размадзе впервые на его родном языке "заговорили" все основные дисциплины высшей математики, и не только они: из-за нехватки в первые годы соответствующих специалистов, он читал курсы по общей физике и теоретической механике. А.М.Размадзе был блестящим педагогом-лектором, настоящим мастером устного и письменного научного слова, любящим студенчество и, вместе с тем, требовательным и строгим. Его высоко научные лекции, изящные по форме и содержанию, служили образцом педагогического искусства.

В 20-ые годы А.М.Размадзе создает первые грузинские университетские учебники по высшей математике - "Введение в математический анализ" и "Неопределенные интегралы". На этих книгах воспитывались поколения грузинских математиков, они не утратили научно-методической ценности по сей день.

Однако большая организационная нагрузка и педагогическая деятельность не мешали напряженной исследовательской работе ученого - он интенсивно занимался основными проблемами вариационного исчисления.

Первая современная научная математическая публикация, подписанная грузинской фамилией, появилась в 1914 году в немецком журнале " Mathematische Annalen". Автором статьи был 25-летний А.М.Размадзе. Она содержала решение вариационной задачи для кривых, один конец которых закреплен, а другой совершенно свободен. Работа обратила на себя внимание специалистов вариационного исчисления.

В 1919 году в бюллетене Тбилисского университета А.М.Размадзе публикует два исследования по вариационному исчислению, в одном из которых дает первоначальный вариант связанной с его именем леммы вариационного исчисления. Полное доказательство этого предложения А.М.Размадзе опубликовал в 1921 году в том же " Mathematische Annalen ".

В 1924 году на Международном математическом конгрессе в Торонто А.М.Размадзе читает доклад о разрывных решениях в вариационном исчислении. В 1925 году он защищает в Сорбонне докторскую диссертацию. В диссертационной работе А.М.Размадзе основная проблема вариационного исчисления распространяется на разрывные функции. В том же году грузинского ученого избирают членом Французского математического общества.

В январе 1929 года А.М.Размадзе выступает с сообщением о новых исследованиях по вариационному исчислению на заседании Московского математического общества (членом которого он состоял). К лету того же года, несмотря на ухудшение здоровья, А.Размадзе заканчивает свой фундаментальный труд

"Периодические решения и замкнутые экстремали вариационного исчисления" (он был опубликован в 1934 году в "Mathematische Annalen" уже после сметри ученого).

А.М Размадзе скончался 2 октября 1929 года в возрасте 40 лет, похоронен в Тбилиси, в Дидубийском пантеоне.

Научное творчество Андрея Михайловича получило высокую оценку советских и зарубежных специалистов, он считается первым советским исследователем в области вариационного исчисления.

Имя А.М.Размадзе присвоено Тбилисскому математическому институту Академии наук Грузинской ССР, Президиумом Академии учреждена премия имени А.Размадзе за лучшие научные работы по математике. Тбилисский университет учредил стипендию имени А.Размадзе для студентов-отличников механико-математического факультета.

90-летию со дня рождения грузинского ученого была посвящена очередная УШ конференция математиков высших учебных заведений нашей республики, прошедшая в г. Кутаиси летом 1979 года.

Этой же дате посвящается и настоящий сборник.

Список печатных работ А.М.Размадзе*

1. Über Losungen mit einem variablen Endpunkt in der Variationsrechnung, Math. Ann. Bd. 75, 1914.
2. Sur un théorème fondamental du calcul des variations, Bull. de l' Université de Tiflis, N1, 1919.
3. Wierstrass-ის ფუნქციის დაშლა კუთხიანი წერტილის მახლობლო-

---

x Список содержит наиболее полный перечень печатных работ А.М.Размадзе.

ბაში, ტფილისის უნივერსიტეტის მოამბე, N1, 1919.
(Разложение Е - функции Вейерштрасса вблизи угловой точки. Бюлл. Тбил. ун-та, № I, 1919).

4. მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. I, შესავალი. ტფილისი, 1920.
(Курс математического анализа, т. I. Введение. Тбилиси, 1920).

5. Über das Fundamentallemma der Variationsrechnung, Math. Ann., Bd. 84, 1921.

6. მათემატიკური ანალიზის კურსი, ტ. III. ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი, ნაწ. I, განუსაზღვრელი ინტეგრალები, ტფილისი, 1922.
(Курс математического анализа, т. III. Курс интегрального исчисления, ч. I. Неопределенные интегралы. Тбилиси, 1922).

7. Über unstetige Lösungen mit einem Unstetigkeitspunkt in der Variationsrechnung, Bull. de l' Université de Tiflis, N2, 1923.

8. წირთა ერთი თვისების დამტკიცება და ამ თვისების გამოყენება დიფერენციალურ აღრიცხვაში, ჟურნ. "ჩვენი მეცნიერება", N1 1923.
(Доказательство одного свойства кривых и применение этого свойства в дифференциальном исчислении. Тбилиси, журн. "Наша наука", № I, 1923).

9. Sur une formule de la moyenne, ჟურნ. "ჩვენი მეცნიერება, ტფილისი, 1923.

10. Sur une condition de minimum nécessaire pour les solutions anguleuses dans le calcul des variations, Bull. de la Soc. Math. de France, t. LI, 1923.

11. Лекции по высшему анализу, ч. I, Введение в дифференциальное исчисление. Курс, составленный Н. Г. Берг по лекциям А. М. Размадзе. Литографическое издание. Тбилиси, 1923.

12. რელატივობის მოძღვრება აინშტაინისა, საზოგადო მიმოხილვა, "კავკასიონი" N3-4, 1924, ტფილისი.
(Теория относительности Эйнштейна, общий обзор, журн. "Кавкасиони", № 3-4, Тбилиси, 1924).

13. Sur un théorème de la théorie des surfaces minima, Bull. des Sc. M_ath. N49, 1925.

14. Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations, Math. Ann., Bd. 94, 1925.
15. Sur les solutions discontinues dans le calcul de variations, Paris, 1925 (докторская диссертация).
16. Разрывные решения в вариационном исчислении. Proc. of the International Math. Congress held in Toronto, August 11-16, 1924. Vol. I, Toronto, 1928. (на англ.яз.).
17. Об условиях существования нижнего предела интеграла при отсутствии экстремума в вариационном исчислении. Труды Всероссийского съезда математиков в Москве 27 апреля - 4 мая I927. М-Л, I928.

I8. ვარიაციათა აღრიცხვა. ა. რაზმაძის ლექციების მიხედვით შედგენილი ლ. გოკიელის მიერ, ტფილისი, 1933.
(Вариационное исчисление. Курс, составленный Л.П.Гокиели по лекциям А.М.Размадзе. Тбилиси, I933).

19. Sur les solutions periodiques et les extremales fermées du calcul des variations, Math. Ann., Bd. 110, 1934.

20. ვარიაციათა აღრიცხვის პერიოდული ამოხსნები და შეკრული ექსტრემალები. ტფილისის სახ. უნივერსიტეტის შრომები, ტ. I, 1937.
(Периодические решения вариационного исчисления и замкнутые экстремали. Труды Тбилисского университета, т. I, I937). Статья является переводом исследования А.М.Размадзе, помещенного в журн. Math. Ann., I934.

2I. რჩეული შრომები, თბილისი, 1952.
(Избранные труды. Тбилиси, I952).

22. ინტეგრალური აღრიცხვის კურსი, ნაწ. I, განუსაზღვრელი ინტეგრალები. თბილისი, 1956.
(Курс интегрального исчисления, ч. I. Неопределенные интегралы. Тбилиси, I956)

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980

УДК 519.3.

Л.ТОНЕЛЛИ И ЕГО ПИСЬМО О А.РАЗМАДЗЕ

Т.А.Эбаноидзе

Письмо об Андрее Михайловиче Размадзе, впервые публикуемое на русском языке, написано выдающимся итальянским математиком Леонида Тонелли (1885-1946 гг.).

Научная и педагогическая деятельность Л.Тонелли проходила в городах Кальяри, Болонье, Риме и Пизе. Глубокие исследования Л.Тонелли по вариационному исчислению стимулировали многочисленные работы математиков как в Италии, так и за её пределами. Он является создателем итальянской школы вариационного исчисления. Ему принадлежат фундаментальные труды также и по теории функций и многих действительных переменных, теории тригонометрических рядов, теории линий и поверхностей, теории интегральных уравнений и т.д.

Письмо "Андрей Размадзе" было опубликовано в /I/ на итальянском и грузинском языках и по этой причине русский читатель до сих пор не имел возможности познакомиться с ним[I)].

I) Об этом нами доложено на Ш всесоюзной научной конференции по истории физико-математических наук, Тбилиси, 20-23 декабря 1978 г.

Не удалось выяснить, кому принадлежит грузинский перевод письма. Следует отметить, что Н.Ломджариа опубликовал в /2/ фрагменты из письма Л.Тонелли на грузинском языке в собственном переводе.

К сожалению, не удалось также документально установить время пребывания итальянского ученого в Тбилиси и дату написания им письма. Возможно, приглашение Л.Тонелли было связано с I0-летием юбилеем Тбилисского университета и он побывал в нашем городе в 1928 году. Что касается даты написания письма, то, поскольку оно написано после смерти А.Размадзе и в нем не упоминается последний важный труд грузинского математика, опубликованный посмертно, в 1934 году, эту дату следует отнести к 1930-1934 гг. По-видимому, А.Размадзе познакомился с Л.Тонелли в 1924 году, в Торонто, на конгрессе математиков, где, как мы знаем, наш соотечественник выступил с докладом (об этом упоминается и в письме Л.Тонелли).

Публикуемый перевод сделан с грузинских текстов /I/, /2/. Надеемся, что русский читатель с интересом познакомится с высокой оценкой научного творчества грузинского математика, данной одним из самых замечательных вариационистов XX века Леонида Тонелли.

ЛИТЕРАТУРА

I. L.Tonelli (Piza). Andrea Razmadze. Труды Тбилисского математического института, т.I, 1937, стр. II-I3 (на итальянском языке).

Л.Тонелли (Пиза). Андрей Размадзе (перевод с итальянского). Там же, стр. I4-I6 (на груз. языке).

2. Нико Ломджариа. Андрей Размадзе. Труды Грузинского политехнического института, серия физико-математическая, № 2 (37), 1955, стр. I2 (на груз.языке).

АНДРЕЙ РАЗМАДЗЕ

Л.Тонелли

Смерть Андрея Размадзе - большая утрата не только для Тифлисского университета, где он преподавал с такой любовью и сознанием своего высокого долга, но и для всей науки. В его лице математика теряет одного из самых верных деятелей, одного из самых увлеченных исследователей, с ясной мыслью и острым умом. Человек широкой культуры и сильного интеллекта, он посвятил свои силы математическому мышлению, которое так притягивает благородную душу, а среди творений этого самого мышления предпочтение отдал вариационному исчислению. В эту область математики, столь привлекательную как своей высокой теоретической ценностью и важными применениями, так и значительными трудностями, возникающими здесь и требующими проницательности и остроумия, А.Размадзе внес существенный вклад. Он был готов обогатить её новыми исследованиями и открытиями.

Позволю себе кратко коснуться тех вопросов вариационного исчисления, которые рассматривает А.Размадзе в своих работах.

Начну с исследования " Über die Fundamentallemma der Variationsrechnung ", опубликованного в 1921 году в " Mathematische Annalen " (Bd. 84), результаты которого можно найти также в работе " Deux propositions du calcul des variations ", напечатанной в Бюллетене Тифлисского университета. Как известно, в вариационном исчислении встречается утверждение, называемое основной лем мой. Эту лемму обычно представляют в двух различных формах. Для второй из них, принадлежащей П.Дюбуа-Реймону, Гильберт дал простое и изящное доказательство. Опираясь на идею Гильберта, Размадзе в еще более простой и изящной форме получает лемму более общего характера, содержащую обе формы основной леммы вариационного исчисления. Лемма Размадзе имеет то преимущество перед ними, что с её помощью из равенства нулю первой вариации интеграла $\int_a^b f(x,y,y')\,dx$ мы приходим к дифференциальному уравнению Эйлера непосредственно, без проведения интеграции по частям.

В работе, вышедшей в 1914 году в "Mathematische Annalen" (Bd. 75) под названием "Über Lösungen mit einem variablen Endpunkt in der Variationsrechnung", А.Размадзе исследует проблему минимума интеграла $\int_{t_1}^{t_2} F(x,y,x',y')\,dt$ среди обыкновенных линий, имеющих один конец закрепленный, а другой - совершенно свободный. Среди основных проблем вариационного исчисления встречается проблема и о переменном конце линии. Другие исследователи не рассматривают в этой проблеме конец линии как совершенно свободный - они принимают его движущимся вдоль некоторой заданной линии. А.Размадзе, наоборот, предоставляет концу линии полную свободу движения. Он рассматривает линии, доставляющие заданному интегралу минимум по сравнению со всеми линиями, расположенными вблизи и имеющими с ними один конец общий, а другой конец - переменный вблизи их второго конца. Для таких линий А.Размадзе выводит необходимые, а также достаточные условия минимума, изучая при этом и случай абсолютного экстремума.

3 Труды, 214.

В вариационном исчислении обычно называли разрывными решениями (это название не употреблялось в своем прямом смысле) такие решения, которые, будучи непрерывными, содержат в то же время угловые точки. Как хорошо известно, исследование таких решений провел Каратеодори, установивший, что здесь появляется необходимое условие минимума, новое по сравнению с условием, имеющим место для решений, лишенных угловых точек. А.Размадзе в своей работе "Sur une condition de minimum nécessaire pour les solutions anguleuses dans le calcul des variations", опубликованной в " Bulletin de la Société Mathématique de France" в I923 году (v. 5I), получает условие Каратеодори в другой, простой и элегантной форме, позволившей осмыслить необходимость этого условия с новой, интересной точки зрения.

От решений, не в прямом смысле именуемых разрывными и справедливо названных А.Размадзе угловыми решениями, он переходит к рассмотрению действительно разрывных решений. Это сделано в важном труде " Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations ", вышедшем в " Mathematische Annalen " в I926 году, Bd. 95, и доложенном автором на Международном математическом конгрессе в Торонто в I924 году. Изученные А.Размадзе разрывные решения являются такими, что они действительно терпят разрыв первого рода. Он исходит из известного примера Вейерштрасса, где проблема минимума не имеет решений среди непрерывных линий, но имеет его среди линий, претерпевающих разрыв первого рода. А.Размадзе показал важность таких разрывных решений и первый провел их общий анализ, направленный к выводу необходимых, а также достаточных условий для случая закрепленных концов. Таким образом, А.Размадзе не только поставил новый вопрос и получил важные результаты, но и открыл новое поприще для изысканий.

Наконец, укажу на красивую работу " Sur une théoreme de la theorie des surfaces minima ", которая напечатана в " Bulletin des Sciences Mathematiques ". В этом исследовании А.Размадзе удалось упростить доказательство одного свойства площади минимальной поверхности, открытого Карлеманом, и придать ему поистине привлекательную форму. Это свойство заключается в важном классическом неравенстве $4\pi A \leq L^2$,относящемся к длине L плоской линии и площади A , ограниченной ею.

Несколько лет тому назад, будучи в Тифлисе, я имел удовольствие встретиться с А.Размадзе. Судя по тому, что я узнал тогда от него самого, научная работа А.Размадзе продвигалась успешно. Его ум был занят проблемами, более обширными, чем ранее им изучаемые. Он с неизменной надеждой и верой ожидал разрешения этих проблем, но безжалостная судьба оразила А.Размадзе в самый разгар его работы. Сейчас его мысль не может воссоединиться с нашей, но все, кто знал А.Размадзе, с беспредельным волнением будут вспоминать силу его глубокого ума, его доброе, благородное сердце.

Поступила 18.IX.1979

Вычислительный центр
им. Н.И.Мусхелишвили
АН ГССР

თ.ებანოიძე

ლ.ტონელი და მისი წერილი "ანდრია რაზმაძე"

რეზიუმე

მოყვანილია ზოგიერთი ცნობა იტალიელი მათემატიკოსის ლეონიდა ტონელისა და მისი წერილის "ანდრია რაზმაძის" შესახებ.მოყვანილია თვით წერილი, რომელიც პირველად ქვეყნდება რუსულ ენაზე.

T. Ebanoidze

L.TONELLI AND HIS PAPER "ANDREA RAZMADZE"

Summary

Some data are presented on the Italian mathematician Leonida Tonelli and on his papér "Andrea Razmadze". The first Russian translation of Tonelli's paper is presented.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980

УДК 517.I

ანდრია რაზმაძის ერთი სახელმძღვანელოს შესახებ

ა.ბენდუქიძე, თ.ებანოიძე

თბილისის სახელმწიფო პოლიტექნიკური ინსტიტუტის საინჟინრო ფაკულტეტის I კურსზე ანდრია რაზმაძე 1921-22 სასწავლ. წელს რუსულ ენაზე კითხულობდა ლექციებს უმაღლეს ანალიზში ("უმაღლესი ანალიზის" ქვეშ ვიგულისხმოთ "მათემატიკური ანალიზი"). ჩვენს ხელთაა ამ ლექციების მიხედვით შედგენილი სახელმძღვანელო- Лекции по высшему анализу, ч.I. Введение в дифференциальное исчисление. Курс, составленный Н.Г.Берг.[1] по лекциям А.М.Размадзе. Литографическое издание, Тифлис, I923.

როგორც ირკვევა, ეს სახელმძღვანელო საბჭოთა პერიოდში რუსულ ენაზე გამოქვეყნებული ერთ-ერთი პირველი სახელმძღვანელოთაგანია მათემატიკური ანალიზის დარგში, რასაკვირველია, ამ ფაქტის მნიშვნელობა როდი იჩრდილება იმით, რომ გამოცემა ლითოგრაფიულია, ამავე დროს ეს იყო ჩვენში, საქართველოში, ა.რაზმაძის ლექციების მიხედვით შედგენილი კურსის გამოქვეყნების პირველი შემთხვევა. პირველს იმიტომ ვამბობთ, რომ უკვე ა.რაზმაძის გარდაცვალების შემ-

---

1) ნინა ჰენრიხის ასული ბერგი (1895-1960) პედაგოგიურ მოღვაწეობას ეწეოდა თბილისის უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში - პოლიტექნიკურ ინსტიტუტსა და სატრანსპორტო ინსტიტუტში. 1920-1930 წლებში მუშაობდა ასისტენტად (ა.რაზმაძის ასისტენტადაც), 1930 წლიდან პენსიაში გასვლამდე (1959) -დოცენტად (ეს ცნობები თავაზიანად მოგვაწოდა დ.ავაზაშვილმა, რისთვისაც მადლობას ვუხდით).

რედ ი.გოკიელმა ა.რაზმაძის ლექციების საფუძველზე გამოსცა "ვარიაციათა აღრიცხვა").

ახლა სქემატურად გადმოვცეთ განსახილველი წიგნის მოკლე შინაარსი და გამოვყოთ, ჩვენი შეხედულებით, ყველაზე საყურადღებო ადგილები:

სახელმძღვანელო შედგება ხუთი თავისაგან: I. Теория сечений. II.Теория пределов. III. Теория множеств. УI.Функция. У.Теория последовательностей.თავები პარაგრაფებად იყოფა, თუმცა ეს დაყოფა ზოგჯერ პირობითი ხასიათისაა.

I. განკვეთის თეორია. აქ შემოყვანილია მუდმივი და ცვლადი სიდიდეები, თანაც საილუსტრაციოდ შერჩეულია მოხდენილი მაგალითები,რომლებიც თვალნათლივ გვიჩვენებს ამ ცნებათა ფარდობითობას.

დედეკინდის თეორიაზე საუბრისას ავტორი არ ცდილობს მის გაღრმავებას — მხოლოდ განსაზღვრავს ირაციონალურ რიცხვს და გეომეტრიულ ილუსტრაციასაც მიმართავს. საინტერესოა,რომ რიცხვთა "გეომეტრიული" შედარებისათვის ა.რაზმაძე მიმართავს ურთიერთპარალელურად აღებულ ორ ღერძს.

II. ზღვართა თეორია. საგულისხმოა,რომ ზღვრებთან დაკავშირებული თეორემები ამგვარადაა კლასიფიცირებული:

1. დებულებები; 2. თეორემები, რომლებიც ხსნის თვით ბუნებას ზღვრის ცნებისას; 3. თეორემები ზღვართა გამოთვლაზე.

მოვიყვანოთ თითო მაგალითი პირველი ორი ჯგუფიდან:

რეზულება 5. თუ X ცვლადი ნულამ ერთსა და იმავე ნიშანს ინარჩუნებს, მაშინ შეუძლებელია მის ზღვარს მოპირდაპირე ნიშანი ჰქონდეს.

თეორემა I. ერთსა და იმავე ცვლად სიდიდეს ერთდროულად არ შეიძლება ორი განსხვავებული ზღვარი ჰქონდეს.

მეორე თავის დასასრულს მოყვანილია ორი თეორემა, რომელთაგან "ერთი დიდ როლს ასრულებს დიფერენციალურ, ხოლო მეორე-ინტეგრალურ აღრიცხვაში".

აი ეს თეორემებიც.

1. ორი უსასრულოდ მცირე სიდიდის შეფარდების ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ყოველ ამ სიდიდეთაგანს შევცვლით მისი შესაბამისი ეკვივალენტური სიდიდით.

2. ერთი და იგივე ნიშნის მქონე უსასრულოდ მცირე სიდიდეების უსასრულო ჯამის ზღვარი არ შეიცვლება, თუ ყოველ ამ სიდიდეთაგანს შევცვლით მისი შესაბამისი ეკვივალენტური სიდიდით.

მეორე თეორემას (რომელსაც, პირველისაგან განსხვავებით, იშვიათად ვხვდებით მათემატიკური ანალიზის თანამედროვე კურსებში) ა. რაზმაძე იყენებს, მაგალითად, წრეწირის სიგრძის გამოთვლისას.

III. სიმრავლეთა თეორია. ეს თავი ასე იწყება: "სიმრავლე ეწოდება იმ ერთგვაროვანი ან არაერთგვაროვანი საგნების ერთობლიობას, რომელთა რიცხვი სასრული ან უსასრულოა" - სიმრავლის ცნებაზე მეტი არაფერია ნათქვამი, ხოლო სიმრავლეთა მაგალითებია ჩამოთვლილი: ავტორს საკმარისად მიაჩნია, რომ მოყვანილი ფრაზა მაგალითებთან ერთად ნათელ წარმოდგენას შეუქმნის მკითხველს სიმრავლის შესახებ. აქვეა ლაპარაკი სიმრავლის ზღვრულ წერტილზე (მოხსენიებულია როგორც " предел множества ") და სიმრავლის ზუსტ საზღვრებზე.

აი მეორე მომენტი, როცა ა.რაზმაძეს სხვა საკითხების ინტუიციისა: ვაიერშტრასის თეორემა შემოსაზღვრული უსასრულო სიმრავლის ზღვრული წერტილის თაობაზე მტკიცდება ჩალაგებულ სეგმენტთა პრინციპის საფუძველზე, თუმცა თვით პრინციპი არსად არაა ნახსენები; აქ ეს არცაა საჭირო, ვინაიდან მსჯელობისას გეომეტრიული მოდელია გამოყენებული, რომლის დროსაც ყველაფერი ისედაც თვალსაჩინოა. (გავიხსენოთ, რომ ქართულ "ანალიზის შესავალში" ა.რაზმაძე სავსებით მკაცრად, "ანალიზურად" ამტკიცებს ვაიერშტრასის ამ თეორემას, რადგანაც აქ "სხვა" საკითხები ჰყავს მხედველობაში).

IV. ფუნქცია. ამ ცენტრალურ თავში ჯერ მოცემულია ფუნქციათა კლასიფიკაცია, შემდეგ, კიდევ ერთხელ, ზღვრის ცნება. საგულისხმოა რომ საკუთრივ ფუნქციის ზღვარი არც კია განმარტებული - ავტორი იფარგლება მხოლოდ ცალმხრივი ზღვრებით. ეს იმით უნდა ავხსნათ, რომ მან წინა პლანზე მოაქცია ფუნქციის უწყვეტობა, უწყვეტობის განსაზღვრისათვის კი საკმარისად მიიჩნია მარცხენა და მარჯვენა ზღვრების შემოღება; ამრიგად, უწყვეტობა შემოდის $f(x_0-)=f(x_0)=f(x_0+)$ ტოლობების დახმარებით. საერთოდ, უწყვეტ ფუნქციათა შესწავლას ა.რაზმაძე ბევრ ადგილს უთმობს.

ძირითადი თეორემები უწყვეტ ფუნქციებზე ასეთი მიმდევრობითაა დალაგებული: თეორემა ინტერვალის ისეთ კერძო ინტერვალებად დაყოფაზე, რომლებშიც ფუნქციის მნიშვნელობები რა გინდ ახლოს მივა ერთმანეთთან; თეორემა ფუნქციის "არანულობის" წერტილის მახლობლად ნიშნის შენარჩუნებაზე; ბოლცანო-კოშის პირველი და მეორე თეორემა; ვაიერშტრასის თეორემა ფუნქციის მიერ ზუსტი საზღვრების მიღწევაზე.

ელემენტარულ ფუნქციათა განხილვისას ტანგესის თაობაზე გვხვდება ასეთი თავისებური გამონათქვამი: "სინუსოიდასა და კოსინუსოიდასაგან განსხვავებით ტანგესოიდა შედგება ცალკეული, ერთ-

მანეთისაგან მოწყვეტილი ნაწილებისაგან, რომლებიც უსასრულობაში იკვრება",

რამდენიმე ცვლადის ფუნქციის განსაზღვრის არის შემოღების დროს ავტორი განასხვავებს განსაზღვრის "ბუნებრივ" და "ხელოვნურ" არეებს: "არე შეიძლება იყოს ბუნებრივი ან ხელოვნური. თუ დამოუკიდებელ ცვლადთა ცვლილების შეზღუდვა გამოწვეულია თვით ფუნქციის ბუნებით, არეს ბუნებრივი ეწოდება. თუკი შეზღუდვა გამოწვეულია სხვადასხვა მოსაზრებით, რომლებიც არ ითვალისწინებს თვით ფუნქციის კონსტრუქციულ თვისებებს - არეს ხელოვნური ეწოდება".

ა.რაზმაძე განიხილავს ბუნებრივი არის ამგვარ მაგალითს: ვთქვათ, $\omega = \sqrt{1-(x^2+y^2+z^2)}$; ω რომ ნამდვილი სიდიდე იყოს, უთუოდ უნდა გვქონდეს: $1-(x^2+y^2+z^2) \geq 0$ ანუ $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ და ეს მოგვცემს ამ ფუნქციის განსაზღვრის ბუნებრივ არეს.

ახლა ვნახოთ ხელოვნური არის რაზმაძისეული მაგალითი: $\omega = \sqrt{1+x^2+y^2+z^2}$; ავტორი შენიშნავს: "ცვლადებს ნებისმიერი მნიშვნელობების მიღება შეუძლია. მაგრამ ჩვენ თვითონ შევზღუდოთ მათი ცვლილება. ვთქვათ, მაგალითად,

$$0 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq -1, \quad 2 \leq z \leq 5.$$

არე ამ შემთხვევაში ხელოვნურია".

ტერმინი "ხელოვნური არე" სასარგებლო ჩანს და ეგებ "რესტავრაციას" საჭიროებდეს!

V. მიმდევრობათა თეორია. აქ მიმდევრობათა გარდა მწკრივებიცაა განხილული. უნდა გამოვყოთ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ -ის შესწავლასთან დაკავშირებული ორი მომენტი:

1. $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ მიმდევრობის ზრდადობის დასადგენად ა.რაზმაძე იყენებს შემდეგ ლემას:

თუ $a > b > 0$ და n მთელი დადებითი რიცხვია, მაშინ ყოველთვის აქვს ადგილი უტოლობას:

$$a^n b - b^{n+1} < n(a-b)a^n.$$

ამ ლემას ავტორი მარტივად ამტკიცებს:

$$a^n b - b^{n+1} = b(a^n - b^n) = b(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

რადგან $0<b<a$, $a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1} < a^{n-1} +$

$+a^{n-2}\cdot a + \dots + aa^{n-2} + a^{n-1} = n\cdot a^{n-1}$; მაშინ

$$a^n b - b^{n+1} < a(a-b)na^{n-1}, \quad a^n b - b^{n-1} < na^n(a-b).$$

ამ უტოლობის დახმარებით გვექნება $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$.

მართლაც, გვაქვს: $a^n b - na^n(a-b) < b^{n+1}$;

დავუშვათ, $a = 1+\frac{1}{n}$, $b = 1+\frac{1}{n+1}$; მაშინ $a-b = \frac{1}{n(n+1)}$;

$$a^n b - na^n\frac{1}{n(n+1)} = a^n\left(b - \frac{1}{n+1}\right) = a^n, \quad \text{ე.ი. } a^n < b^{n+1}.$$

2. $\lim\limits_{\mu\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu}$ -ის მისაღებად ა. რაზმაძე მიმართავს მარჯვე აღნიშვნას $\mu = -(\nu-1)$, რომლის ძალით

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^{\mu} = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu+1}.$$

საინტერესოდაა გარჩეული აგრეთვე ჰარმონიულ მწკრივთან და კრებადობის კოშის ნიშანთან დაკავშირებული საკითხები. კრებადობის დალამბერის ნიშნის გამო ა. რაზმაძე შენიშნავს: "დალამბერის ნიშანი არასაკმარისად მგრძნობიარეა ლაიბნიცის მწკრივის ხასიათის დასადგენად", ლამაზი ნათქვამია: დალამბერის ნიშანს, ფიზიკური ხელსაწყოს მსგავსად, შეიძლება მგრძნობიარობა არ ჰქონდეს ზოგიერთი

მწრივის ხასიათის გამორკვევის დროს. აქვე მოყვანილია უფრო მგრძნობიარე ლოგარითმული ნიშანი.

ასეთია ა.რაზმაძის აღნიშნული სახელმძღვანელოს სქემატური შინაარსი და მეთოდური თვალსაზრისით საყურადღებო გარემოებები. თუმცა მას ბევრი საერთო აქვს ა.რაზმაძისავე ქართულ "ანალიზის შესავალთან" – განსხვავებაც ბევრია, როგორც სტრუქტურულად, ისე შინაარსობრივად. ეტყობა, კურსის გადმოცემის დროს ავტორი არსებითად უწევდა ანგარიშს მსმენელთა კონტიგენტს.

შემოვიდა 20.IX.1979.

მათემატიკური ანალიზის
კათედრა

სსსრ მეცნიერებათა
აკადემიის ნ.მუსხელიშვილის სახ.
გამოთვლითი ცენტრი

А.Д.Бендукидзе, Т.А.Эбаноидзе

ОБ ОДНОМ УЧЕБНИКЕ А.М.РАЗМАДЗЕ

Резюме

В работе дается краткий разбор одного малоизвестного учебника А.М.Размадзе "Введение в дифференциальное исчисление", изданного в 1923 г. на русском языке. Выделены наиболее примечательные, с точки зрения авторов, обстоятельства в методическом отношении.

A.Bendukidze, T.Ebanoidze

ON A TEXTBOOK OF A.M.RAZMADZE

Summary

The paper presents a brief review of A.M.Razmadze's "Introduction to the Digfferetial Calculus" - a little-known textbook published in Russian in *1923. The most significant methodological points of the book are indicated.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
214, 1980.

УДК 518.3

К ТЕРМИНОЛОГИИ В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ[I]

Т.А.Эбаноидзе

В известной работе А.М.Размадзе /I/ имеется следующее замечание: "В вариационном исчислении разрывными экстремалями обычно называются непрерывные экстремали, имеющие угловые точки. Такое название, вошедшее почти во все сочинения, мы теперь, когда вводим действительно разрывные линии, не считаем подходящим. Именно поэтому мы предпочитаем называть те экстремали <u>угловыми</u> экстремалями, а название <u>разрывных</u> решений сохранить для наших решений".

Занимаясь основной задачей вариационного исчисления – найти экстремаль для интеграла

$$J=\int_{x_1}^{x_2} f(x,y,y')\,dx, \qquad \text{(I)}$$

I Настоящее сообщение является частью доклада "К оценке значения научного наследия А.М.Размадзе", прочитанного автором на Ш всесоюзной научной конференции по истории физико-математических наук, Тбилиси, 20-23 декабря 1978г.

А.М.Размадзе впервые изучил разрывные решения этой задачи.

Разрывную экстремаль А.М.Размадзе записывает в виде:

$$y=\varphi_0(x)\begin{cases}=y_0(x), & x_1\leq x\leq x_0,\\ =\bar{y}_0(x), & x_0<x\leq x_2;\end{cases} \qquad (2)$$

функция $y_0(x)$ непрерывна в промежутке $[x_1, x_0)$, а функция $\bar{y}_0(x)$ - в промежутке $(x, x_2]$; следовательно, функция $\varphi_0(x)$, непрерывная при $x_1\leq x<x_0$, $x_0<x\leq x_2$, имеет единственную точку разрыва x_0, $x_1<x_0<x_2$. Если ввести точки $P_1(x_1, y_1)$, $R_0(x_0, y_0)$, $\bar{R}_0(x_0, \bar{y}_0)$, $P_2(x_2, y_2)$, получим, что разрывная экстремаль Размадзе (2) геометрически состоит из двух отдельных непрерывных дуг - P_1R_0 и $\bar{R}_0P_2$, где точки R_0 и $\bar{R}_0$ будут точками разрыва соответствующего графика.

На рис. I изображено разрывное решение в смысле Размадзе.

Что касается решений, названных А.М.Размадзе угловыми, то они могут иметь, например, вид линии, представленной на рис.2.

Упомянутый размадзевский пересмотр некоторых терминов вариационного исчисления в свое время был поддержан выдающимся итальянским математиком Леонида Тонелли (1885-1946), который писал /2/: "От решений, не в прямом смысле именуемых разрывными и <u>справедливо названных А.Размадзе угловыми решениями</u> (подчеркнуто нами - Т.Э.), он переходит к рассмотрению действительно разрывных решений. Это сделано в важном труде " Sur les solutions discontinues dans le calcul des variations ", вышедшем в " Mathematische Annalen " в 1925 г. (т.95) и доложенном им на Международном математическом контрессе в Торонто в 1924 г.".

К сожалению, терминологическое новаторство А.М.Размадзе осталось вне внимания авторов многих последующих трудов по вариационному исчислению, в которых под разрывными решениями вариационных задач понимаются, как и до Размадзе, непрерывные линии с угловыми точками (см., напр., /3/ - /7/).

Пользуясь случаем, мы предлагаем термин "минималь" ("максималь") для линий, сообщающих интегралу (I) минимальное (максимальное) значение.

Наряду с общепринятыми терминами "минимум", "максимум" и "экстремаль" введение терминов "минималь" и "максималь" нам кажется целесообразным.

Поступила 18.IX.1979.

Вычислительный центр
им. Н.И.Мусхелишвили
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

I. А.М.Размадзе, Избранные труды, Тбилиси, 1952, стр. 77 (на груз. яз.).

2. Труды Тбилисского математического института, т.I, 1937, стр.15 (на груз.яз.).

3. В.И.Смирнов, В.И.Крылов, Л.В.Канторович, Вариационное исчисление, Ленинград, 1933, стр.137.

4. М.А.Лаврентьев и Л.А.Люстерник, Курс вариационного исчисления, М.-Л., 1938, стр.87.

5. В.И.Смирнов, Курс высшей математики, т.IУ, Москва, 1951, стр. 269.

6. Л.Я.Цлаф, Вариационное исчисление и интегральные уравнения. Справочное руководство, Москва, 1970, стр. 34.

7. М.Л.Краснов, Р.И.Макаренко, А.И.Киселев, Вариационное исчисление, Москва, 1973, стр.131.

თ.ებანოიძე

ტერმინოლოგიისათვის ვარიაციულ აღრიცხვაში

რეზიუმე

ცნობილ ნაშრომში "წყვეტილი ამონახსნებისათვის ვარიაციულ აღრიცხვაში" (1925 წ.) ა.რაზმაძემ ვარიაციული აღრიცხვის ზოგიერთი ტერმინი ახალი მნიშვნელობით გამოიყენა, რითაც ამ ტერმინებს უფრო შესაფერისი შინაარსი მიეცა. ვარიაციულ აღრიცხვაში შესრულებული ბევრი შემდგომი ნაშრომის ავტორებს, როგორც ეს შესაბამისი ლიტერატურის გადახედვით ირკვევა, ა.რაზმაძის ტერმინოლოგიური ნოვატორობა შეუმჩნეველი დარჩა. ჩვენს წერილში ეს გარემოება მოთხრობილი და ორი ახალი ვარიაციული სახელწოდება წამოყენებული.

T.Ebanoidze

ON THE TERMINOLOGY OF THE CALCULUS OF VARIATIONS

Summary

In his well-known paper "On discontinuous solutions in the calculus of variations" .(1929) A.Razmadze used some terms of the calculus of variation with new connotations, investing these terms with a more appropriate meaning. As a survey of

the relevant literature shows, the authors of many subsequent works in this field had overlooked Razmadze's terminological innovation. In the present note this circumstance is recounted and two new variational names are suggested.

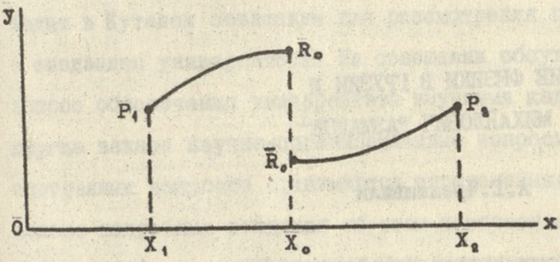

Рис.I

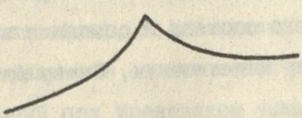

Рис.2

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980

УДК 53.091

РАЗВИТИЕ ФИЗИКИ В ГРУЗИИ И АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ РАЗМАДЗЕ[I]

А.Г.Чрелашвили

Известному ученому Андрею Михайловичу Размадзе (1889-1929) принадлежат большие заслуги в развитии грузинской математики, и он справедливо считается одним из основоположников математической науки в Грузии.

Менее известен его вклад в дело обоснования и развития физики в Грузии. Еще до основания Тбилисского университета, 9 октября 1917 года, Правление общества Грузинского университета поручило подбор профессорского состава и создание профессорской коллегии Петру Григорьевичу Меликишвили, Ивану Александ-

---

I Доклад, прочитанный 30 июня 1979 г. в Кутаиси на УШ конференции математиков высших учебных заведений Грузинской ССР, посвященной 90-летию со дня рождения А.М.Размадзе.

ровичу Джавахишвили и Андрею Михайловичу Размадзе. С этих пор, на протяжении своей короткой, но плодотворной жизни, наряду с другими многочисленными научными и научно-организационными делами А.М.Размадзе не переставал заботиться об обеспечении Тбилисского университета высококвалифицированными научно-педагогическими кадрами, в частности физиками.

Характерен один эпизод. 8 июня 1917 г. А.М.Размадзе проводит в Кутаиси совещание для рассмотрения проблем, связанных с созданием университета. На совещании обсуждается в основном вопрос обеспечения университета научными кадрами и некоторые другие важные научно-организационные вопросы. По поводу рассмотренных вопросов принимаются определенные рекомендации. Довольно подробные сведения об этом интересном мероприятии сохранились в письме Александра Илларионовича Джанелидзе Ивану Александровичу Джавахишвили.

Приведем интересную для нашего вопроса часть этого письма:

"Глубокоуважаемый батоно Иванэ!... Недавно в Кутаиси приехал приват-доцент Размадзе, не знаю по вашему ли поручению, или по собственной инициативе он собрал нас пять человек: сам Размадзе, приват-доцента Петроградского университета Ш.Нуцубидзе (философия), Г.Ахвледиани (славянское языкознание: магистерских экзаменов еще не закончил), Л.Шургая (юрист-криминалист, "оставленный при Московском университете" - А.Ч.) и меня. Г.Размадзе ознакомил нас с положением дел грузинского университета, сообщил что в этом направлении делается в Тбилиси и предложил нам высказать наше мнение по поводу некоторых вопросов. Между прочим, после обсуждения единогласно было принято: а)Разработку терминологии считаем возможной лишь в процессе самой научной работы. Эта разработка будет проводиться совместными стараниями профессоров и языковедов, после того, как университет начнет действовать. Создание же особой комиссии и ее предварительная работа в этом направлении должны быть признаны нецелесообразными.

б) Приглашать в грузинский университет иностранных ученых и поручать им чтение лекций считаем возможным, но при обязательном условии, чтобы ни на одном факультете иностранцы не составляли большинства, дабы таким образом научное учреждение не утратило грузинского характера. Приглашение иностранных лекторов должно производиться лишь на определенный срок.

в) Мы считаем необходимым обеспечить профессорам грузинского университета такие условия, при которых они смогли бы с полной отдачей служить грузинской науке. При этом следует их обязать, чтобы не брались за какие-либо иные занятие вне грузинского университета.

Собрание просило меня довести настоящие его пожелания до Вашего сведения в виде частного сообщения. Выполняя это поручение, позволю себе выразить Вам глубочайшее почтение. А.Джанелидзе".

Подобные рекомендации в дальнейшем были приняты в качестве руководящих положений. При создании университета и некоторое время после начала его деятельности, по мере возможности, они проводились в жизнь.

В ноябре 1918 г. А.М.Размадзе предстал перед Профессорским советом с предложением о приглашении в качестве профессора физики известного ученого Пауля Эренфеста, который в то время заведывал кафедрой физики в Лейденском университете (Голландия). Профессорский совет единогдасно поддержал это предложение, поручив организацию приглашения Эренфеста самому А.М.Размадзе.

Выбор пал на Эренфеста, конечно, не случайно. Его приглашение было всесторонне обдуманно и обоснованно. Талантливый и широкообразованный ученый, Эренфест по происхождению был австриец. Образование он получил в лучших университетах Европы. В 1904 г. защищает диссертацию у Больцмана и получает научную степень доктора. В 1907 году, еще совершенно молодой (родился в 1880 г.), но уже известный ученый, он переезжает в Петербург вместе со своей супругой - известным русским математиком Татьяной Алексеевной Афанасьевой.

Эренфест оказал огромное влияние на развитие физики в Петербурге тех лет. Он собрал вокруг себя группу молодых ученых, для которых регулярно проводил семинары. Эти семинары оказали решающее влияние на формирование многих ученых. Приезд Эренфеста в Петербург оказал большое влияние и на способную молодежь Петербургского университета, проявляющую живой интерес к новой физике. По этому поводу академик Абрам Федорович Иоффе пишет: " Способность Павла Сигизмундовича к критическому анализу и строгой, физически ясной формулировке оказала большое влияние на мое научное развитие. Ему же было обязано зарождение в Петербурге современной теоретической физики". И далее: "В годы пребывания Эренфеста в Петербурге вокруг него группировалась вся талантливая молодежь. Именно это и сыграло главную роль в развитии современной теоретической физики в Петербурге".

В 1912 г. выдающийся голландский ученый Лоренц по возрасту вышел в отставку, освободив должность зведующего кафедры теоретической физики Лейденского университета, и для замещения этой должности пригласил Эренфеста. В связи с этим акад. Иоффе пишет: "Лоренц был общепризнанным главой теоретической физики всего мира, а кафедра физики в Лейдене была центром научной мысли". И далее: "Эренфест... высоко поднял значение Лейденской школы, из которой вышль многие голландские ученые и откуда большое число физиков всех стран вынесло новые идеи, новые методы исследования".

После смерти Эренфеста (он умер в 1933 году, в 53-летнем возрасте) Эйнштейн посвятил ему такие слова: "Его величие заключалось в чрезвычайно хорошо развитой способности улавливать самое существо теоретического понятия и настолько освобождать теорию от ее математического наряда, что лежащая в ее основе простая идея проявлялась со всей ясностью. Эта способность позволяла ему быть бесподобным учителем." И далее: "Он не только был самым лучшим профессором из людей нашей профессии, которого я знал, но его страстно занимали становление и судьба людей, особенно его студентов".

Знаменитый же французский ученый Поль Ланжевен скажет: "Мы знали сколь активной была его деятельность, насколько глубок его ум, знали теплоту его сердца и надежность его дружбы".

В лейденский период Эренфест поддерживает оживленные связи и дружбу с крупнейшими физиками мира - Лоренцом, Эйнштейном, Бором, Планком, Борном, Гейзенбергом, Паули, Дираком, Шредингером, Ферми, Дебаем и с другими. Но при этом он никогда не порывал научных контактов и дружбы с русскими физиками. Иоффе пишет: "Он навсегда остался нашим верным другом, другом советской физики, с которой не порывал ни на один день и которой помогал всеми доступными ему средствами. Когда в начале 1921 г. мы с Д.С.Рождественским и А.Н.Крыловым приехали за границу, выполняя поручение В.И.Ленина о восстановлении научных связей, решающую помощь нам оказал Эренфест, имевший широкие связи среди заграничных ученых. Он даже мобилизовал их на сбор для советских физиков библиотеки вышедших во время блокады физических журналов".

Грузинские ученые, которые в те годы получали образование в России и одно время там же и работали, по-видимому, были знакомы с Эренфестом и лично. Во всяком случае они вращались в той среде, где Эренфест был хорошо известен и с которым многие поддерживали личные связи.

В эти годы в высших учебных заведениях Петербурга учились Русудан и Георгий Николадзе. Русудан Николадзе лично поделилась с нами своими воспоминаниями об этом времени: "Эренфест поддерживал тесные связи с выдающимися учеными мира и также лично с Эйнштейном. Он всегда был в курсе новейших достижений физики и смежных наук и всегда полон новых идей. Учащаяся молодежь в Петербурге облепляла Эренфеста как мухи мед".

Все оказанное свидетельствует о том, что для приглашения в Тбилисский университет трудно было подобрать лучшей кандидатуры. И предложение А.М.Размадзе, несомненно, опиралось на подобное соображение.

Эренфесту было послано приглашение. Предполагалось создать для него все условия, но Эренфест не смог приехать в Тбилиси.

С осени 1918 года в Тбилисском университете открывается второй по счету факультет - естественно-математический и медицинский объединенный факультет. С 29 апреля 1919 года естественно- математический факультет выделился отдельно и его деканом был избран А.М.Размадзе. Этот факультет стал главным очагом развития в Грузии фундаментальных наук и в том числе физики.

На одном из первых заседений "объединенного" еще факультета, в октябре 1918 г. профессору А.М.Размадзе было поручено прочтение курса физики для математиков и естественников.

В связи с этими важнейшими для развития физики в Грузии событиями уместно окинуть взглядом основные вехи истории развития физики в Грузии.

Начала истории естественных наук в Грузии следует искать, по-видимому, в отдаленном прошлом. Историками науки высказывалось мнение, что предки грузинских народностей еще в древнейшее время обладали способностью наблюдать явления природы, в частности физические явления, умели обобщить и найти их закономерности (древнейшее гончарное дело и металлургия).

Уже в античное время, в IУ веке нашего летоисчисления, в Грузии существует учебное заведение высшего типа - известная Фазисская академия, где, следует полагать, изучалась и физика, а также и прочие естественно-математические науки как составная часть философии.

В средние века с экономическим и политическим подъемом начинается и расцвет литературы и науки. Его венцом является грузинский ренессанс и эпоха Руставели.

До наших дней сохранилось немало значительных, оригинальных или переводных, естественно-научных сочинений этого периода. Достаточно назвать лишь некоторые из них. В УШ-IX веках на грузинский язык переводятся "Шестоднев" Василия Кесарийского и "Об устроении человека" Григория Нисского. Эти сочинения представляют собой своеобразную энциклопедию ранне-средневековой византийской науки и содержат много интересных сведений и мыслей, важных с точки зрения истории физики.

В начале XП века известный грузинский ученый (философ, как было принято говорить тогда) Иоанэ Петрици переводит на грузинский язык сочинение Немезия Эмесского "О природе человека" и снабжает перевод комментариями физического характера.

На рубеже XI-XП веков в Гелати и Икалто возникают высшие научно-учебные заведения - академии, - где основатели и главы этих академий, Иоанэ Петрици и Арсен Икалтоели создают свои труды. В этих трудах значительное место уделяется естествознанию и особенно физике, которая представлена в основном в аристотелевской концепции.

С XШ века в разгромленной и разоренной иноземными захватчиками Грузии начинается длительный период упадка. Но с ХУI и в особенности с ХУП века начинается новый период возрождения, который в истории духовной жизни грузинского народа известен под названием "серебряной поры" и который достигает своего апогея в ХУШ веке. Вместе с оживлением духовной и светской литературы начинается возрождение и научной мысли. Здесь у нас нет возможности дать хотя бы общий обзор литературы и научной мысли этого периода. Достаточно упомянуть лишь научную и литературную деятельность Вахтанга УI и Сулхана-Саба Орбелиани в ХУП-ХУШ веках и труды Антония Багратиони и Давида и Иоанна Багратиони во второй половине ХУШ и начале XIX в. Эти деятели обогатили грузинскую научную литературу многими оригинальными и переводными сочинениями в области естествознания, в частности физики. В Тбилиси и Телави создаются высшие учебные заведения - семинарии, ставшие значительными культурными центрами страны. Здесь, наряду с другими дисциплинами, изучалась и физика. В качестве учебника физики использовался известный курс Вольфа "Теоретическая физика", переведенный на грузинский язык и дополненный Антонием многочисленными комментариями и примечаниями. Курс физики в Тбилисской семинарии читал сам Антоний - ректор семинарии.

В этот период научная литература переводится в основном с русского языка, с этих пор и начинается благотворное влияние русского языка и литературы на грузинскую культуру и науку в частности.

Особого упоминания заслуживает еще один факт. В начале XIX века на грузинский язык переводится фундаментальный труд известного французского ученого Бриссона - трехтомный курс физики. Для своего времени это было одно из лучших в Европе руководств по физике. Перевод этого курса на русский язык (выполненный известным русским физиком П.И.Страховым) использовался в Московском университете в качестве основного руководства по физике. Превосходный перевод на грузинский язык этого труда энциклопедического характера был выполнен Н.Г.Чубинашвили (в 1808-1812 годах) и обогащенная этим переводом грузинская научная литература, можно сказать, взяла равнение на передовую Европу.

Мы бросили лишь беглый взгляд на историю развития в Грузии естественно-математических наук и в частности физики. Но даже такой беглый обзор ясно показывает, что естественно-математические знания в Грузии имеют глубокие корни и история физико-математических наук в Грузии достаточно интересна и богата содержанием.

Хотя, следует отметить и то обстоятельство, что в Грузии не было ни непрерывной линии развития науки, ни непосредственной, во всех случаях, преемственности научных знаний и традиций.(Возможно, это - особенность, вообще присущая историческому развитию).

Но в ту важнейшую пору перелома в духовной жизни грузинского народа, когда был основан Тбилисский университет, несмотря на древние и богатые когда-то национальные научные традиции, руководство университета не могло найти человека соответствующей квалификации, который мог бы прочесть курс физики на грузинском языке.

Но выход был найден: как было сказано, в октябре 1918 года А.М.Размадзе было поручено прочесть курс физики для математиков и естественников. С полным сознанием долга взял А.М.Размадзе на себя выполнение этой большой исторической миссии. Он лишь попросил срок для подготовки курса и на протяжении двух семестров 1919-1920 учебного года он уже читал курс физики на грузинском языке.

Таким образом, в стенах Тбилисского университета курс физики был впервые прочтен на грузинском языке.

Дальнейшее изучение состава этого курса и обстоятельств, связанных с его чтением, мы полагаем, будет небезынтересно как с точки зрения истории Тбилисского университета, так и истории науки в Грузии.

В 1922 году в Тбилисском университете был организован первый студенческий физико-математический научный кружок. Почин принадлежал студентам I и II курсов (на математическом отделении естественно-математического факультета тогда было еще только два курса). Всю организационно-подготовительную работу провели также сами студенты, их главарем и председателем правления кружка был студент I курса Шалва Адеишвили (в настоящее время доцент Тбилисского государственного университета).

Работой кружка руководили выдающиеся грузинские ученые (в настоящее время их принято называть блестящей четверкой)- Н.И.Мусхелишвили, Г.Н.Николадзе, А.М.Размадзе, А.К.Харадзе.

В деятельности кружка горячее участие принимали студенты, в дальнейшем известные грузинские ученые - Ш.Г.Адеишвили, Л.П.Гокиели (член.-корр. АН Грузинской ССР), Т.И.Какушадзе (проф., д-р физ.-мат. наук), В.Д.Купрадзе (академик АН Грузинской ССР), Ш.Е.Микеладзе (академик АН Грузинской ССР) и другие.

Под руководством преподавателей студенты не только готовили доклады реферативного характера, но и часто выступали с результатами своих собственных исследований. Кроме того, преподаватели давали студентам сложные, нестандартные задачи и примеры. Сохранились предложенные студентам А.М.Размадзе задачи физического характера. Их дальнейшее изучение представляет безусловный интерес. Не исключено, что некоторые из них оригинальны и составлены самим А.М.Размадзе.

А.М.Размадзе принадлежит также значительная заслуга в деле пропаганды теории относительности в Грузии. Несмотря на свою загруженность чтением курсов многих ведущих математических дисциплин, А.М.Размадзе вносит наряду с другими грузинскими учеными определенный вклад также в дело популяризации и критического и творческого восприятия новейших достижений физики. Он читает в университете лекции по теории относительности, которая уже тогда вызывала огромный интерес как среди студентов, так и в широких слоях общества. На этих лекциях часто демонстрировался учебный кинофильм, снятый специально для изучающих теорию относительности. Об этом не раз впоследствии вспоминал академик М.М.Мирианашвили, который в то время был студентом Тбилисского университета. Он помнил, например, что в этом фильме показывался ход двух интерферирующих лучей в опыте Майкельсона и взаимное перекрытие этих лучей в интерферометре.

В Грузинском архиве кинофотофонодокументов об этом фильме, к сожалению, никаких сведений не сохранилось. Однако из литературы известно, что в 1922 г. в Германии был выпущен учебно-документальный фильм о теории относительности "Основы теории относительности Эйнштейна". Можно предположить, что в Тбилисском университете демонстрировался именно этот фильм. Более определенно можно будет сказать об этом после получения справки из союзного Архива кинофотофонодокументов.

Важнейшие проблемы теории относительности А.М.Размадзе выносит и на более широкую арену, делая их предметом обсуждения с представителями смежных наук. Значительным событием в научной жизни явился доклад А.М.Размадзе "О специальной и общей теории относительности", прочитанный им 5 декабря 1923 г. во Дворце работников искусств для широкой общественности. На том же заседании другим докладчиком было сделано сообщение на тему: "Альберт Эйнштейн и Анри Бергсон", после чего завязалась интересная дискуссия.

Мы нашли репортаж этого заседания, написанный молодым ученым М.И.Гогиберидзе, получившим образование и ученую степень доктора философии в Германии.

Из репортажа узнаем, что А.М.Размадзе выступил с популярным докладом об основных положениях теории. "После того как докладчик ознакомил общество с великими революциями, происшедшими в истории науки,он раскрыл врата эйнштейновской вселенной великим переломом, происшедшим в современной геометрии, который начинается гениальным открытием русского ученого Лобачевского..." Далее автор репортажа кратко говорит об основных моментах возникновения теории относительности и о некоторых следствиях,вытекающих из этой теории, в частности, о строении Вселенной - конечной, но без границ. Он не соглашается с положением, которое, согласно репортажу, было высказано А.М.Размадзе в следующем виде: "Физика Эйнштейна - это превращение физики в геометрию".

Во втором докладе, который касался соображений известного французского ученого Бергсона о теории относительности, как видно, не были должным образом подвергнуты критике недостаточно обоснованные и ошибочные теоретические соображения Бергсона.

Некоторые из присутствующих и поныне помнят доклад, прочитанный А.М.Размадзе с большим ораторским мастерством (М.Г.Ткавадзе, А.Г.Николайшвили, И.В.Цулукидзе, Ш.Г.Адеишвили, Д.С. Джанелидзе).

В апреле 1924 года А.М.Размадзе публикует научно-популярную статью "Теория относительности Эйнштейна. Общий обзор". В этой интересной во многих отношениях статье дано популярное изложение сущности частной и общей теорий относительности Эйнштейна. Предпосылки возникновения этой теории, главные положения и важнейшие их следствия осмысливаются глубоко и с полной научной строгостью. Методически превосходно построенная, блестящая по форме и содержанию, эта статья по сей день сохраняет свой научно-исторический интерес и познавательное значение. Популярность здесь достигнута без ущерба для научной строгости и поэтому она полезна не только для желающих получить лишь общее представление о теории относительности; статья задумана также как первая ступень для дальнейшего, более углубленного изучения.

Мы не будем здесь рассматривать содержания статьи. Мы хотели бы подчеркнуть лишь два момента, заслуживающих, на наш взгляд, особого внимания.

I. Излагая эйнштейновский принцип эквивалентности гравитационных и инерционных сил, А.М.Размадзе отчетливо подчеркивает локальный характер этой эквивалентности. Это обстоятельство, на наш взгляд, отнюдь не является тривиальным. В самом деле, несколькими десятилетиями позже принцип эквивалентности стал предметом оживленных научных дискуссий (акад. В.А.Фок, акад. В.Л.Гинзбург, Д.Синг). В частности, без всякого, впрочем, основания, подверглась сомнению корректность понимания самим Эйнштейном локальности характера принципа эквивалентности.

К слову, мы позволим себе привести соответствующую цитату из статьи самого Эйнштейна. Например, в статье, опубликованной в 1913 г., читаем:

"Предварительно сделаем еще одно замечание для устранения напрашивающегося недоразумения. Сторонник обычной современной теории относительности с известным правом называет "кажущейся" скорость материальной точки. Именно, он может выбрать систему отсчета так, что материальная точка имеет в рассматриваемый момент скорость, равную нулю. Если же существует система материальных точек, которые обладают разными скоростями, то он уже не может ввести такую систему отсчета, чтобы скорости всех материальных точек относительно этой системы обращались в нуль.

Аналогичным образом физик, стоящий на нашей точке зрения, может называть "кажущимся" гравитационное поле, поскольку соответствующим выбором ускорения системы отсчета он может достичь того, чтобы в определенной точке пространства-времени гравитационное поле обращалось в нуль. Однако примечательно, что обращение в нуль гравитационного поля посредством преобразования в общем случае не может быть достигнуто для протяженных гравитационных полей. Например, гравитационное поле Земли нельзя сделать равным нулю посредством выбора подходящей системы отсчета".

Как видим, положение изложено здесь со свойственной для Эйнштейна ясностью, доходящей до полной прозрачности. Таким же образом отражено оно и в статье А.М.Размадзе.

2. А.М.Размадзе с самого же начала правильно уловил далеко не для всех в то время понятную основную сущность теории относительности, заключающуюся в общековариантности формы законов природы. (Это значит, что все законы природы выражаются математически одинаково в любых системах отсчета, в то время как конкретное проявление этих законов существенно связано с характером системы отчета). Именно с этих позиций подчеркивает А.М.Размадзе необходимость выделения объективных, или, точнее, абсолютных, независимых от наблюдателя закономерностей и, тем самым, предостерегает читателя от смешения явления и его восприятия наблюдателем. Этот момент не является тривиальным также и в общепознавательно-философском отношении, особенно если вспомнить, какие суровые обвинения в идеалистичности предъявлялись теории относительности в 20-ых годах.

А.М.Размадзе намеревался опубликовать в дальнейшем статью о строении Вселенной с релятивистской точки зрения, но не успел этого сделать. Мы обнаружили в архиве ученого обширный фрагмент его рукописной статьи. Его объем составляет 6 машинописных страниц. В нем говорится о строении Вселенной с точки зрения физики Ньютона и с точки зрения теории относительности и о картине Вселенной конечной, но без границ, в соответствии с воззрениями Эйнштейна.

7 Труды, 214.

В 1919 г. университету была передана Тбилисская физическая обсерватория-старейшее в Закавказье научное учреждение европейского типа, в состав которой входила и геомагнитная станция в Карсани. Это было значительным событием для вновь созданного университета и вообще грузинской науки. В осуществлении этого мероприятия решающую роль сыграл А.М.Размадзе. Он и в дальнейшем не оставлял без внимания физическую обсерваторию, следил за ее деятельностью, интересовался состоянием научной работы в ней.

В 1928 г. в работе обсерватории были отмечены значительные недочеты. Для изучения состояния и разработки мероприятий по улучшению работы, Народным Комиссариатом Просвещения была назначена особая комиссия, в состав которой входил и А.М.Размадзе. В мае-июне 1928 г. А.М.Размадзе подробно знакомился с работой обсерватории и тщательно изучал связанные с ней проблемы.

А.М.Размадзе тщательно обследовал и изучил научную сторону деятельности обсерватории. В сфере его внимания оказались метеорологические, актинометрические, гравиметрические, сейсмические и магнитные измерения. Он не ограничился лишь ознакомлением с литературой и письменными материалами, беседой с сотрудниками, а на месте обследовал конструкцию приборов, методы наблюдений, способы снятия отсчетов и их математической обработки.

В этом отношении весьма красноречивым является один изысканный нами документ. Это - запись в дневнике Карсанского магнитного отдела:

"I6 мая I928 г. прибывшая из Тбилиси комиссия под председательством Б.Тохадзе, в составе членов которой были профессор Размадзе, тов. Гугунава и другре, с IO ч. I5 м. по II ч. 25 м. осматривала абсолютный павильон..." Перечислены и другие объекты. И далее "Проф. Размадзе вторично осмотрел приборы Маскара. Вал. Хучуа".

Мы располагаем найденным в архиве ученого обширным отчетом, составленным им на основании всестороннего изучения вопроса. Его объем составляет 27 машинописных страниц. Подробное рассмотрение этого чрезвычайно интересного документа здесь было бы неуместным. Коснемся лишь некоторых вопросов. Отчет содержит параграфы с такими наименованиями: Первая, теоретическая глава: I. Конструкция, 2. Цели и методы, 3. Необходимые для наблюдений условия, 4. Приборы, их изучение, 5.Правила измерений и обработка полученных данных, 6. Погрешности, точность, 7. Летопись обсерватории, 8.Научные изыскания, возглавляемые обсерваторией. Глава вторая - ревизия обсерватории: I.Случайные вопросы, предложенные сотрудникам, и ответы на них. 2.Как ведутся наблюдения. Характерные примеры. 3.Как обращаются наблюдатели с приборами, 4. Обработка материала, 5.Работа в отделах: аэрологический отдел; сеть; актинометрический отдел; сейсмический отдел; отдел наблюдений; геомагнитный отдел; синоптический отдел. 6. Ученый совет, 7. Заключение.

В этом документе А.М.Размадзе указывает также желательные и целесообразные, по его мнению, направления будущей деятельности обсерватории, в частности и в области научных исследований. Он пишет: "Следующая более серьезная ступень исследований, которые не выходят за пределы научных возможностей всякой первокласоной геофизической обсерватории, заключается в следующем:

I. Исследование вариаций напряженности и направления гравитации. Изучение также гравитационных аномалий. В связи с особыми топографическими условиями нашего края этот вопрос приобретает исключительно большое значение и с точки зрения мировой науки. Это чрезвычайно важно также и для промышленности, с помощью изучения гравитационных аномалий можно исследовать месторождения руд и направление залежей.

2. Создание горных метеорологических станций на вершинах Кавказского хребта с целью исследования геофизических элементов высоких слоев атмосферы.

3. Магнитная съемка и составление соответствующих карт.

4. Выяснение теплового состояния земной толщины на больших глубинах. В Грузии для этого имеется возможность использовать Сурамский туннель, изучая в нем температуру на различных расстояниях.

5. Наблюдение града, грозы, что для нашего хозяйства (особенно для виноградарства) имеет чрезвычайно важное значение.

Так представлял А.М.Размадзе желательные направления будущих исследований в Тбилисской геофизической обсерватории. Таково его научное и, можно сказать, государственное видение проблемы.

В июне 1928 года Тбилисский университет посетил выдающийся французский ученый Поль Ланжевен. Мы специально изучили обстоя тельства, связанные с приездом Ланжевена в Грузию, и его связи с грузинскими учеными; разыскали архивные доументы, собрали сведения, опубликованные в проссе, воспоминания современников. На основе этих материалов выясняется, что одним из главных организаторов встречи и приема выдающегося ученого был А.М.Размадзе.

Академик Н.И.Мусхелишвили хорошо помнил пребывание Ланжевена в Тбилиси и поделился с нами некоторыми воспоминаниями, отметив, что главным организатором мероприятий, связанных с пребыванием Ланжевена в Грузии, был А.М.Размадзе, который, по-видимому, познакомился с Ланжевеном на одной из московских научных конференций, и пригласил его с собой. Последнее обстоятельство не подтверждается. Сын Поля Ланжевена Андрэ Ланжевен (также известный французский инженер-физик) прислал нам из Парижа копию неопубликованного письма Поля Ланжевена, которое было послано им в Париж сразу же по прибытии в Ленинград. В письме Поль Ланжевен пишет, что программой его визита в Советский Союз предусмотрено и посещение Тбилиси (после Ленинграда, Москвы и Харькова).

Не исключено, разумеется, что А.М.Размадзе был знаком с Ланжевеном и до его приезда в Советский Союз. Более того,это представляется весьма вероятным. Из многих источников, известно, что А.М.Размадзе поддерживал связи с французскими учеными. Приведем одну справку.

I5 фераля 1926 года известный грузинский режиссер Котэ Марджанишвили писал об А.М.Размадзе своему сыну Константину (ныне академик АН СССР): "Мы с ним очень подружились. Он расспрашивал о тебе и говорил, что недавно был в Питере и тебя очень хвалили твои профессора. Он говорит, что если ты захочешь переезжать в Париж, он даст тебе письмо к тамошней профессуре, с которой у него хорошие связи".

Как бы то ни было, но 9 июня 1928 года вместе с профессором Ш.И.Нуцубидзе (который тогда был проректором университета) и А.И.Дидебулидзе (заведующий кафедры физики) А.М.Размадзе выехал в Пасанаури для встречи почетного гостя, который из Харькова (через Орджоникидзе) по Военно-Грузинской дороге направлялся в Тбилиси.

Уже в день приезда с Ланжевеном встретились представители прессы и имели с ним беседу. Ланжевен с большим интересом знакомился с Грузией, ее народом, постановкой учебной и научной работы в университете.

В университете Ланжевен был встречен чрезвычайно тепло. Здесь он прочел две публичные лекции — "Строение атомов и происхождение солнечного тепла" и "Ультразвуковые колебания и их применение", которые затем были опубликованы на французском языке в Тбилиси.

Оба вопроса относятся к числу проблем, в разработку которых Ланжевен внес огромный вклад. Эти лекции не утратили научного интереса до наших дней, первая же из них относится к важнейшей проблеме современности - к вопросу термоядерного синтеза. Мы перевели эти лекции с французского на грузинский язык и предполагаем опубликовать их с необходимыми комментариями.

В Тбилиси Ланжевен пробыл четыре дня. Перед отъездом в Москву, в беседе с корреспондентом газеты "Комунисти" он заявил: "Должен признаться, до приезда в Грузию я и не предполагал, что здесь так широко и основательно поставлена разработка различных научных проблем. Университет, например, в Грузии существует лишь десять лет, но за это время он достиг таких успехов, которыми могли бы гордиться и более крупные и древние университеты". Далее в интервью отмечено, что "Тбилисский государственный университет и Государственный комиссариат просвещения предложили Ланжевену прочесть систематический курс физики в Тбилисском университете, на что Ланжевен дал согласие".

21 июня 1928 г. А.М.Размадзе выступил на заседании правления университета (членом которого был и сам) с отчетом о визите Ланжевена и предложил официально пригласить Ланжевена в Тбилисский университет для чтения систематического курса физики и руководства научной работой. Правление университета одобрило предложение А.М.Размадзе, приняв соответствующее постановление.

В протоколе заседания правления читаем: "Объявить благодарность (Ланжевену - А.Ч.) в связи с прочитанными в нашем университете лекциями и просить его, чтобы он, согласно данному им устному обещанию, прочел определенный курс физики на протяжении одного семестра 1929-1930 учебного года. Найти подходящего кандидата среди студентов, который будет заниматься у Ланжевена и работать под его руководством за время проведения им здесь своего курса".

Соответствующее официальное письмо, составленное А.М.Размадзе и датированное 18 октября 1928 года, от имени ректора было послано Ланжевену. Это письмо, написанное на превосходном французском языке, обнаруживает также хорошее знакомство автора с французским академическим эпистолярным стилем.

Приведем отрывок письма.

" Тбилиси, 17.10.28. Господину Полю Ланжевену, Профессору Коллеж де Франс.

Господин и дорогой собрат, честь имею сообщить, что Общее собрание совета Тбилисского университета от 21 июня 1928 г., после доклада г-на Размадзе о настоящем состоянии кафедры физики университета, постановило обеспечить Ваше сотрудничество с нашим университетом как чтением систематического курса лекций по вопросам физики, так и руководством научной работой в физических лабораториях".

Далее высказывается пожелание, чтобы Ланжевен (в соответствии с имевшей ранее место устной договоренностью) провел курс лекций в Тбилисском университете в первом семестре 1929-30 учебного года.

Ректор выражает Ланжевену глубокую благодарность за прочитанные лекции и выражает надежду, что его сотрудничество с Тбилисским университетом будет продолжено и впредь.

Ланжевен не смог приехать в Тбилиси, но факт его приглашения в Тбилисский университет является важным событием и представляет несомненный интерес для истории науки в Грузии.

На основании вышеизложенного можно с уверенностью сказать, что вклад А.М.Размадзе в дело развития физики в Грузии, бесспорно, заслуживает особого изучения и обнародования.

В заключение мы хотели бы выразить благодарность академику Г.С.Чогошвили за внимание и интерес к работе.

Поступила 10.Ш.1980. Кафедра общей физики

ა. ჭრელაშვილი

ფიზიკის განვითარება საქართველოში და ანდრია რაზმაძე

რეზიუმე

განხილულია ცნობილი ქართველი მათემატიკოსის ანდრია რაზმაძის (1889-1929) ღვაწლი საქართველოში ფიზიკურ მეცნიერებათა განვითარებაში. მოპოვებულია მნიშვნელოვანი საარქივო მასალა, მიკვლეულია საფუძვლიანად მივიწყებული პუბლიკაციები, შეკრებილია სამეცნიერო და საზოგადოებრივი ცხოვრების მოვლენების მონაწილეთა და თანამედროვეთა მიერ მოწოდებული ცნობები და მოგონებები. ამ მასალის საფუძველზე ნაჩვენებია, რომ ა.რაზმაძეს მნიშვნელოვანი დამსახურება მიუძღვის საქართველოში ფიზიკის ახალი მიღწევების პროპაგანდაში, მისი სწავლებისა და ამ დარგში სასწავლო-სამეცნიერო მუშაობის ორგანიზაციის საქმეში.

A.Chrelashvili

THE DEVELOPMENT OF PHYSICS IN GEORGIA AND ANDREW RAZMADZE

Summary

The contribution of the prominent Georgian mathematician Andrew Razmadze (1889-1929) to the development of physical sciences in Georgia is discussed. Substantial archival material has been amassed, and thoroughly forgotten publications brought to light; the evidence and reminiscences of participants and contemporaries of scientific and social life have been collected .It is ries of scientific and social life have been collected. It is shown on the basis of this material that A.Razmadze contributed significantly to the popularization in Georgia of the new achievements in physics, to its teaching and to the organization of educational and research work in this field.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980.

УДК 517.944

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОСНОВНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

П.К.Зерагия

1. Рассмотрим следующее нелинейное уравнение параболического типа:

$$\delta u = f(x,y,u,p), \quad \left(\delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y},\ p = \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Как известно, для уравнения

$$\delta u = 0 \tag{2}$$

характеристиками являются прямые $y = const$.

Пусть S - некоторая область, лежащая на плоскости oxy, ограниченная отрезками AB и PQ характеристик $y=0$, $y=l$ (значение $l>0$ подберем ниже), а слева и справа - двумя дугами C_1 и C_2, каждая из которых может пересекаться с характеристикой $y = const$ только в одной точке и уравнения которых суть: $x=\chi_1(y)$, $x=\chi_2(y)$ (где $\chi_2(y)>\chi_1(y)$, $0\leq y\leq \ell$).

Возьмем какую-нибудь точку T внутри S с ординатой $y\leq\ell$ и допустим, что M_1M_2 есть отрезок характеристики, проходящий через точку T и заключенный между дугами C_1 и C_2. Пусть C есть совокупность контуров C_1, C_2 и отрезка AB характеристики $y=0$. Обозначим через S_y область ABM_2M_1A.

2. Рассмотрим следующую граничную задачу.

Найти решение уравнения (I), регулярное внутри области S, удовлетворяющее следующим граничным условиям

$$U(x,0)=\Phi(x) \quad \text{на } AB, \tag{3}$$

$$U\Big|_{x=\chi_1(y)}=\Phi_1(y), \quad U\Big|_{x=\chi_2(y)}=\Phi_2(y), \tag{4}$$

где $\Phi(x)$ и $\Phi_i(x)$ – заданные непрерывные функции. Решение этой задачи методом последовательных приближений дано в работах /I,2/, где быстрота сходимости процесса имеет порядок геометрической прогрессии.

В настоящей статье, с применением метода линеаризации и последовательных приближений, доказывается существование единственного решения поставленной граничной задачи для малого ℓ со степенной быстротой сходимости процесса, которая, очевидно, является гораздо лучшей, чем быстрота сходимости по геометрической прогрессии, полученной лишь методом последовательных приближений.

Относительно правой части уравнения (I) будем предполагать, что функция $f(x,y,u,p)$ ограничена и непрерывна относительно x,y,u,p в области $\Omega=\{(x,y)\in S, -\infty < u, p < \infty\}$ и в той же области имеет непрерывные и ограниченные частные производные первого и второго порядка относительно аргументов u, p.

Заметим, что если функции $\chi_i(y)$ и $\varphi_i(y)$, $i=1,2$, непрерывны и непрерывно дифференцируемы в $(0,\ell)$, а функция $\Phi(y)$ непрерывна и дважды непрерывно дифференцируема, то можно показать, что при помощи некоторого преобразования условия (3) – (4) можно привести к нулевым граничным условиям.

Итак, рассмотрим следующую граничную задачу.

Найти решение уравнения (I), регулярное внутри области S, находящейся в некоторой области R, и удовлетворяющее однородному условию

$$u=0 \quad \text{на } C. \tag{5}$$

Пусть $G(x,y;\xi,\eta)\equiv G(M;N)$ - функция Грина однородного уравнения (2), удовлетворяющая нулевому граничному условию (5). Тогда легко видеть, что решение граничной задачи (I), (5) эквивалентно решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения (см. /I/, стр.206)

$$u(M)=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint\limits_{S_y} G(M;N)f(N,u,p)\,dN, \tag{6}$$

или системе интегральных уравнений

$$U_i(M) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} K_i(M;N) f(N, U_1, U_2)\, dN, \qquad (7)$$

где

$$U_1(M) = U(M), \quad U_2(M) = p(M) = \frac{\partial U}{\partial x},$$

$$K_1(M;N) = G(M,N), \quad K_2(M,N) = \frac{\partial G}{\partial x}.$$

3. Пусть $U_1^{(0)}(M)$, $U_2^{(0)}(M)$ – некоторые начальные приближения. Построим последовательности $\{U_1^{(n)}\}$, $\{U_2^{(n)}\}$ с помощью рекуррентных формул:

$$U_i^{(n)}(M) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} K_i(M;N)\Big\{ f(N, U_1^{(n-1)}, U_2^{(n-1)}) + \qquad (8)$$

$$f'_{U_1}(N, U_1^{(n-1)}, U_2^{(n-1)})(U_1^{(n)} - U_1^{(n-1)}) + f'_{U_2}(N, U_1^{(n-1)}, U_2^{(n-1)})(U_2^{(n)} - U_2^{(n-1)})\Big\} dN$$

$$(i = 1,2).$$

Из (8) следует, что

$$U_i^{(n+1)} - U_i^{(n)} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} K_i(M,N)\Big\{ f(N, U_1^{(n)}, U_2^{(n)}) - f(N, U_1^{(n-1)}, U_2^{(n-1)}) -$$

$$- f'_{U_1}(N, U_1^{(n-1)}, U_2^{(n-1)})(U_1^{(n)} - U_1^{(n-1)}) - f'_{U_2}(N, U_1^{(n-1)}, U_2^{(n-1)})(U_2^{(n)} - U_2^{(n-1)}) + \qquad (9)$$

$$+ f'_{U_1}(N, U_1^{(n)}, U_2^{(n)})(U_1^{(n+1)} - U_1^{(n)}) + f'_{U_2}(N, U_1^{(n)}, U_2^{(n)})(U_2^{(n+1)} - U_2^{(n)})\Big\} dN.$$

Если в правой части (9) к разности $f(N, U_1^{(n)}, U_2^{(n)}) - f(N, U_1^{(n-1)}, U_2^{(n-1)})$ применим формулу Тейлора, получим

$$U_i^{(n+1)}(M) - U_i^{(n)}(M) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{S_y} K_i(M;N)\Big\{\frac{1}{2}\Big[f''_{U_1 U_1}(N, \mu_{1n}, \mu_{2n})(U_1^{(n)} - U_1^{(n-1)})^2 +$$

$$+f''_{u_2u_2}(N,\mu'_{1n},\mu'_{2n})(U_2^{(n)}-U_2^{(n-1)})^2+2f''_{u_1u_2}(N,\mu''_{1n},\mu''_{2n})(U_1^{(n)}-U_1^{(n-1)})\times$$

$$\times(U_2^{(n)}-U_2^{(n-1)})]+f'_{u_1}(N,U_1^{(n)},U_2^{(n)})(U_1^{(n+1)}-U_1^{(n)})+f'_{u_2}(N,U_1^{(n)},U_2^{(n)})\times \quad (10)$$

$$\times(U_2^{(n+1)}-U_2^{(n)})\}dN, \quad (i=1,2),$$

где μ_{1n}, μ_{2n}, $\mu'_{1n}, \ldots$ – соответствующие средние значения.

Теперь, заметим, что если для некоторой функции $\varphi(M)$ имеет место оценка $|\varphi(M)|<\Phi$, то

$$\left|-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\iint\limits_{S_y}K_i(M;N)\varphi(N)\,dN\right|<2L\Phi\sqrt{y}, \quad (11)$$

где L – определенная постоянная, зависящая от наибольшей ординаты l в области S (см. /1/, стр.205).

Положим

$$\max\left\{\sup_{\Omega}|f'_{u_1}|,\ \sup_{\Omega}|f'_{u_2}|,\ \sup_{\Omega}|f''_{u_1u_1}|,\ \sup_{\Omega}|f''_{u_1u_2}|,\ \sup_{\Omega}|f''_{u_2u_2}|\right\}=m, \quad (12)$$

$$\max_{M\in S}\left\{|U_1^{(n)}(M)-U_1^{(n-1)}(M)|+|U_2^{(n)}(M)-U_2^{(n-1)}(M)|\right\}=R_n. \quad (13)$$

Тогда, согласно (11), (12), (13), из уравнения (10) легко получим:

$$|U_i^{(n+1)}(M)-U_i^{(n)}(M)|<2L\sqrt{l}\left(\frac{m}{2}R_n^2+mR_{n+1}\right).$$

Отсюда

$$\max_{M \in S} \sum_{i=1}^{2} \left| u_i^{(n+1)}(M) - u_i^{(n)}(M) \right| <$$

$$< 4L\sqrt{\ell}\left(\frac{m}{2} R_n^2 + m R_{n+1}\right),$$

или

$$R_{n+1} < 4L\sqrt{\ell}\left(\frac{m}{2} R_n^2 + m R_{n+1}\right). \qquad (14)$$

Из (14), при $4L\sqrt{\ell} < 1$ получим

$$R_{n+1} < K R_n^2, \qquad \text{где } K = \frac{2Lm\sqrt{\ell}}{1 - 4Lm\sqrt{\ell}}. \qquad (15)$$

Из (15) легко следует, что

$$R_{n+1} < \frac{1}{K}(K R_1)^{2^n}, \qquad (16)$$

где

$$R_1 = \max_{M \in S} \left\{ |U_1^{(1)} - U_1^{(0)}| + |U_2^{(1)} + U_2^{(0)}| \right\}.$$

Таким образом, имеем, что если ℓ подчинить неравенству

$$4Lm\sqrt{\ell} < \min\left\{1, \frac{2}{R_1 + 2}\right\},$$

то легко убедиться, что $KR_1 < 1$ и, в силу (16), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$ сходится. Следовательно, функциональные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |U_1^{(n)} - U_1^{(n-1)}|$, $\sum_{n=1}^{\infty} |U_2^{(n)} - U_2^{(n-1)}|$ сходятся равномерно в области S_ℓ. Тем самым доказана равномерная сходимость последовательностей функций $\{U_i^{(n)}\}$, $i = 1,2$, в области S_ℓ.

—

Итак, существует равномерный предел

$$\lim_{n \to \infty} U_i^{(n)}(M) = U_i(M) \quad \text{при} \quad M \in S_\ell .$$

Предельные функции $U_i(M)$ $(i=1,2)$ дают единственное непрерывное решение системы (7) в области S_ℓ .

Легко проверить, что функция $U_1(M)$ удовлетворяет уравнению (I) и однородному граничному условию (5).

Поступила 28.XII.1979

Кафедра общей математики

ЛИТЕРАТУРА

I. П.К.Зерагия, Труды Тбилисского математического института, АН ГССР, т.XXIУ, 1957.

2. M.Gevrey. Journal de Math. (9), 9, 1913.

პ.ზერაგია

არაწრფივი პარაბოლური ტიპის დიფერენციალური განტოლების ძირითადი სასაზღვრო ამოცანის ერთი მიახლოებითი ამოხსნის შესახებ

რეზიუმე

შრომაში მოცემულია პარაბოლური ტიპის არაწრფივი /1/ დიფერენციალური განტოლების ძირითადი სასაზღვრო /5/ ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნა გაწრფივებისა და მიმდევრობით მიახლოების მეთოდის გამოყენებით.

P. Zeragia

ON THE APPROXIMATIVE SOLUTION OF THE FUNDAMENTAL BOUNDARY PROBLEM OF ONE NON-LINEAR PARABOLIC DIFFERENTIAL EQUATION

Summary

An approximative solution of the fundamental boundary problem (5) of one nonlinear parabolic differential equation (1) is given by the method of successive approximation and reduction to linear case.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
214, 1980.

УДК 511.3.

О СВОЙСТВАХ ОДНОЙ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Б.Г.Тасоев

Исследуемая функция, естественно, возникает при решении некоторых неопределенных уравнений, связанных с алгоритмом непрерывных дробей /2/, и находит в них важные применения.

§ I. Пусть α - иррациональное число интервала $]0,1[$, а

$$[0; x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots] \tag{I}$$

- его разложение в арифметическую непрерывную дробь. Известны рекуррентные соотношения

$$P_0 = 0,\ P_1 = 1,\ P_n = x_n P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n<1, \tag{2}$$
$$q_0 = 1,\ q_1 = x_1,\ q_n = x_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad n>1,$$

для числителей P_n и знаменателей q_n подходящих дробей $\frac{P_n}{q_n}$ цепной дроби (I) (см.,напр., / I /). Как непосредственно следует из (2), $q_n = q_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являетсяся многочленом относительно неполных частных x_1, x_2, $x_3, \dots, x_n$ непрерывной дроби (I). Этот многочлен имеет следующее выражение /3/:

$$q_n = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}} \sum_{\substack{j_1 \equiv 1 (mod\, 2) \\ j_s \not\equiv j_{s+1} (mod\, 2)}} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{n-2i}} . \tag{3}$$

Естественно, возникает вопрос: сколько у многочлена $q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ членов, содержащих x_k или вообще $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ $(1 \le r \le n)$?

Работа, в основном, посвящена решению этого вопроса.

§ 2. Итак, пусть $t_n(k_1, k_2, \dots, k_r)$ обозначает число тех слагаемых в (3), которые содержат $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$, $1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_r \le n$. Из (3) и определения символа $t_n(k_1, k_2, \dots, k_r)$ легко следует, что

$$q_n(1, \dots, 1, x_{k_1}, 1, \dots, 1, x_{k_2}, 1, \dots, 1, x_{k_r}, 1, \dots, 1) = \tag{4}$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \sum_{1 \le r_1 < r_2 < \dots < r_j \le r} t_n(k_{r_1}, k_{r_2}, \dots, k_{r_j})(x_{k_{r_1}} - 1)(x_{k_{r_2}} - 1) \cdots (x_{k_{r_j}} - 1) + V_n ,$$

где V_n — n-ый член так называемого ряда Фибоначчи (V_n), определяемого условиями:

$$V_0 = V_1 = 1, \quad V_n = V_{n-1} + V_{n-2} \quad (n \ge 2)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что значение $t_n(k_1, k_2, \dots, k_r)$ равно старшему коэффициенту многочлена

$$q_n(1,\dots,1,x_{k_1},1,\dots,1,x_{k_2},1,\dots,1,x_{k_2},1,\dots,1).$$

Поэтому достаточно ограничиться изучением формального разложения этого многочлена.

Таким образом, наметив план нахождения $t_n(k_1,k_2,\dots,k_2)$, докажем следующее предложение

<u>Теорема I.</u> Для любого r , $1\le r\le n$, справедлива формула

$$t_n(k_1,k_2,\dots,k_r)=V_{k_1-1}\,V_{k_2-k_1-1}\cdots V_{k_r-k_{r-1}-1}\,V_{n-k_r}. \qquad (5)$$

<u>Доказательство</u>. При $r=1$ справедливость (5) известна /2/. Так как при любом $r>1$ рассуждения проходят одинаково, ограничимся случаем $r=2$.

Итак, докажем, что

$$t_n(k_1,k_2)=V_{k_1-1}\,V_{k_2-k_1-1}\,V_{n-k_2}. \qquad (5^{I})$$

Рассмотрим непрерывную дробь

$$[0;1,1,\dots,1,x_{k_1},1,\dots,1,x_{k_2},1,\dots,1]=\frac{p_n'}{q_n'}.$$

Найдем знаменатель q_n' подходящей дроби $\frac{p_n'}{q_n'}$. Имеем:

$$q_{k_1}'=V_{k_1-1}\,x_{k_1}+V_{k_1-2},$$

$$q_{k_1+1}'=(V_1x_{k_1}+V_0)V_{k_1-1}+V_1V_{k_1-2},$$

$$q'_{\kappa_1+2}=(V_2 x_{\kappa_1}+V_1)V_{\kappa_1-1}+V_2 V_{\kappa_1-2},$$

$$q'_{\kappa_1+3}=(V_3 x_{\kappa_1}+V_2)V_{\kappa_1-1}+V_3 V_{\kappa_1-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q'_{\kappa_2-2}=(V_{\kappa_2-\kappa_1-2}\, x_{\kappa_1}+V_{\kappa_2-\kappa_1-3})V_{\kappa_1-1}+V_{\kappa_1-2}V_{\kappa_2-\kappa_1-2}=B,$$

$$q'_{\kappa_2-1}=(V_{\kappa_2-\kappa_1-1}\, x_{\kappa_1}+V_{\kappa_2-\kappa_1-2})V_{\kappa_1-1}+V_{\kappa_1-2}V_{\kappa_2-\kappa_1-1}=A,$$

$$q'_{\kappa_2}=Ax_{\kappa}+B,$$

$$q'_{\kappa_2+1}=(V_1 x_{\kappa_2}+V_0)A+V_1 B,$$

$$q'_{\kappa_2+2}=(V_2 x_{\kappa_2}+V_1)A+V_2 B,$$

$$q'_{\kappa_2+3}=(V_3 x_{\kappa_2}+V_2)A+V_3 B,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q'_{\kappa_2+i}=(V_i x_{\kappa_2}+V_{i-1})A+V_i B,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$q'_n=(V_{n-\kappa_2}\, x_{\kappa_2}+V_{n-\kappa_2-1})A+V_{n-\kappa_2}B=$$

$$=V_{\kappa_1-1}V_{\kappa_2-\kappa_1-1}V_{n-\kappa_2}x_{\kappa_1}x_{\kappa_2}+(V_{\kappa_1-1}V_{\kappa_2-\kappa_1-1}V_{n-\kappa_2-1}+V_{\kappa_1-1}V_{\kappa_2-\kappa_1-2}V_{n-\kappa_2})x_{\kappa_1}+$$

$$+(V_{\kappa_1-1}V_{\kappa_2-\kappa_1-2}V_{n-\kappa_2}+V_{\kappa_1-2}V_{\kappa_2-\kappa_1-1}V_{n-\kappa_2})x_{\kappa_2}+V_{\kappa_1-1}V_{\kappa_2-\kappa_1-1}V_{n-\kappa_2-1}+$$

$$+V_{\kappa_1-1}V_{\kappa_2-\kappa_1-3}V_{n-\kappa_2}+V_{\kappa_1-2}V_{\kappa_2-\kappa_1-2}V_{n-\kappa_2-1}+V_{\kappa_1-2}V_{\kappa_2-\kappa_1-2}V_{n-\kappa_2}. \tag{6}$$

С другой стороны, тождество (4) при $r=2$ имеет вид:

$$q'_n(1,\dots,1,x_{\kappa_1},1,\dots,1,x_{\kappa_2},1,\dots,1)=t_n(\kappa_1,\kappa_2)x_{\kappa_1}x_{\kappa_2}+ \tag{4$^{\mathrm{I}}$}$$

$$+(t_n(K_1)-t_n(K_1,K_2))x_{K_1}+(t_n(K_2)-t_n(K_1,K_2))x_{K_2}+$$

$$+V_n-t_n(K_1)-t_n(K_2)+t_n(K_1,K_2).$$

Из (4^{I}) и (6) следует справедливость (5^{I}).

Замечание. Из (4^{I}) и (6) следуют тождества

$$V_{K_1-1}V_{K_2-K_1}+V_{K_1-2}V_{K_2-K_1-1}=V_{K_2-1},\quad 1\le K_1<K_2; \tag{7}$$

$$V_{K_2-K_1}V_{n-K_2}+V_{K_2-K_1-1}V_{n-K_2-1}=V_{n-K_1},\quad 1\le K_1<K_2\le n. \tag{8}$$

Заметим, что из (7), как нетрудно видеть, следуют известные тождества (см., напр., /4/):

$$V_{t-1}^2+V_t^2=V_{2t}, \tag{7^{I}}$$

$$V_t(V_{t-1}+V_{t+1})=V_{2t+1}, \tag{7^{II}}$$

а также соотношения

$$V_{2K}\,/\,V_{(4K+2)i+2K}\qquad (K=1,2,\ldots;\ i=0,1,2,\ldots), \tag{9}$$

которые приводят нас к следующему утверждению: для того чтобы число Фибоначчи V_n было простым, необходимо, чтобы $n=p-1$, где $p\ge 5$ – простое число (см. также /4/).

Займемся теперь нахождением максимума и минимума функции $t_n(K_1,K_2,\ldots,K_r)$. С этой целью докажем несколько вспомогательных предложений.

Лемма I. Для любого K, $1 \le K \le n$,

$$V_{K-1} V_{n-K} \le V_{K-3} V_{n-K} + V_{K-2} V_{n-K+1} ; \qquad (I0)$$

$$V_{K-1} V_{n-K} \geq V_{K-3} V_{n-K-1} + V_{K-2} V_{n-K} \qquad (II)$$

(здесь и ниже полагаем: $V_{-2} = 1$, $V_{-1} = 0$).

В самом деле,

$$V_{K-1} V_{n-K} = (V_{K-2} + V_{K-3}) V_{n-K} = V_{K-3} V_{n-K} + V_{K-2} V_{n-K} \le V_{K-3} V_{n-K} + V_{K-2} V_{n-K+1} ;$$

$$V_{K-1} V_{n-K} = (V_{K-2} + V_{K-3}) V_{n-K} = V_{K-2} V_{n-K} + V_{K-3} V_{n-K} \geq V_{K-3} V_{n-K-1} + V_{K-2} V_{n-K} .$$

Равенство в (I0) достигается при $K = 1$, а в (II) - при $K = 2$.

Лемма 2. Для любого K, $1 \le K \le n$,

$$V_{K-3} V_{n-K} + V_{K-2} V_{n-K+1} = V_{n-1} . \qquad (I2)$$

Доказательство проведем методом индукции. Для $K = 1$ имеем:

$$V_{-2} V_{n-1} + V_{-1} V_{n} = V_{n-1} .$$

Пусть для всех $K \le j < n$

$$V_{j-3} V_{n-j} + V_{j-2} V_{n-j+1} = V_{n-1} .$$

Тогда для $K = j + 1$ находим:

$$V_{j-2}V_{n-j-1}+V_{j-1}V_{n-j}=V_{j-2}V_{n-j-1}+(V_{j-2}+V_{j-3})V_{n-j}=$$

$$=V_{j-2}V_{n-j-1}+V_{j-2}V_{n-j}+V_{j-3}V_{n-j}=V_{j-2}(V_{n-j-1}+V_{n-j})+V_{j-3}V_{n-j}=$$

$$=V_{j-2}V_{n-j+1}+V_{j-3}V_{n-j}=V_{n-1}.$$

Лемма 3. Для любых $i,\ j,\ 1\le j<i\le n$,

$$V_{i-j-1}V_{n-i}\le V_{n-i-1}\ ; \qquad (13)$$

$$V_{i-j-1}V_{n-i}\geqslant V_{n-j-2}\,. \qquad (14)$$

Доказательство. В силу лемм I и 2, имеем

$$V_{i-j-1}V_{n-i}=V_{(i-j)-1}V_{(n-j)-(i-j)}\le V_{(i-j)-3}V_{(n-j)-(i-j)}+V_{(i-j)-2}V_{(n-j)-(i-j)+1}=$$
$$=V_{n-j-1}\ ;$$

$$V_{i-j-1}V_{n-i}=V_{(i-j)-1}V_{(n-j)-(i-j)}\geqslant V_{(i-j)-3}V_{(n-j)-(i-j)-1}+V_{(i-j)-2}V_{(n-j)-(i-j)}=$$
$$=V_{n-j-2}\,.$$

Равенство в (13) достигается при $i-j=1$, а в (14) - при $i-j=2$.

Теорема 2.

$$\max t_n(k_1,k_2,\dots,k_x)=V_{n-x}\,. \qquad (15)$$

Доказательство. Известно /2/, что

$$\max t_n(k)=\max V_{k-1}V_{n-k}=V_{n-1}\,. \qquad (16)$$

Применяя лемму 3, находим:

$$\gamma_{k_r - k_{r-1} - 1}\,\gamma_{n-k_r} \le \gamma_{n-k_{r-1}-1};$$

$$\gamma_{k_{r-1}-k_{r-2}-1}\,\gamma_{n-k_{r-1}-1} = \gamma_{(k_{r-1}-k_{r-2})-1}\,\gamma_{(n-1)-k_{r-1}} \le \gamma_{(n-2)-k_{r-2}}.$$

Продолжив этот процесс, на r -ом шагу, в силу (I6), получим:

$$\gamma_{k_1-1}\,\gamma_{k_2-k_1-1} \cdots \gamma_{k_r-k_{r-1}-1}\,\gamma_{n-k_r} \le \gamma_{k_1-1}\,\gamma_{(n-r+1)-k_1} \le \gamma_{n-r}.$$

Отсюда и из равенства

$$t_n(1,2,3,\ldots,r) = \gamma_{n-r}$$

следует (I5).

<u>Теорема 3</u>.

$$\min t_n(k_1,k_2,\ldots,k_r) = \begin{cases} \gamma_{n-2r}, & \text{если } n-2r>0, \\ 1, & \text{если } n-2r\le 0. \end{cases} \quad (I7)$$

<u>Доказательство.</u> Известно /2/, что

$$\min t_n(k) = \min \gamma_{k-1}\,\gamma_{n-k} = \gamma_{n-2}. \quad (I8)$$

На основе формулы (I4) имеем:

$$\gamma_{k_r-k_{r-1}-1}\,\gamma_{n-k_r} \ge \gamma_{n-k_{r-1}-2} = \gamma_{(n-2)-k_{r-1}};$$

$$\gamma_{k_{r-1}-k_{r-2}-1}\,\gamma_{(n-2)-k_{r-1}} \ge \gamma_{(n-4)-k_{r-2}}.$$

Продолжив, как выше, этот процесс, в силу (I8), получим:

$$V_{k_1-1} V_{k_2-k_1-1} \ldots V_{k_r-k_{r-1}-1} V_{n-k_r} \geqslant V_{k_1-1} V_{(n-2r+2)-k} \geqslant V_{n-2r}.$$

Отсюда и из равенства

$$t_n(2,4,\ldots,2r) = V_{n-2r}$$

следует первое утверждение (I7). Второе утверждение теоремы (случай $n-2r \leqslant 0$) почти тривиальное.

Поступила 24.IУ.1979

Кафедра математики
Юго-Осетинского госпединститута.

ЛИТЕРАТУРА

I. А.Я.Хинчин. Цепные дроби. Издательство физико-математической литературы, М., 1956.

2. П.Г.Когония. Труды ТГУ, 189, 1977, стр. 5-I4.

3. П.Г.Когония. Труды ТГУ, 56, 1955, стр. I05-I20.

4. Н.Н.Ворробьев. Числа Фибоначчи, "Наука", М., 1969.

ბ.ტასოევი

ერთი არითმეტიკული ფუნქციის თვისებების შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში მოცემულია ერთი არითმეტიკული ფუნქციის ფორმულა და მისი დახმარებით დადგენილია ამ ფუნქციის ზოგადი თვისება.

B.Tasoev

CONCERNING THE PROPERTIES OF ONE ARITHMETIC FUNCTION

Summary

The paper presents the formula of one arithmetic function and some of its properties are established with its help.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980.

УДК 519.21

О КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ ОТНОСИТЕЛЬНО СПЕКТРА ЛИНЕЙНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

К.О.Джапаридзе, А.Г.Осидзе

§ I. ВВЕДЕНИЕ

Пусть X_t, $t = \dots, -1, 0, 1, \dots$ – линейный временной ряд, представимый в виде

$$X_t = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu \varepsilon_{t-\nu}, \tag{I}$$

где ε_t – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями $E(\varepsilon_t) = 0$, ограниченными дисперсиями $E(\varepsilon_t^2) = \sigma^2 > 0$ и конечными моментами четвертого порядка $E(\varepsilon_t^4) < \infty$, а коэффициенты $g_0, g_1, g_2 \dots$ такие, что $g_0 = 1$ и $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu^2 < \infty$.

Предположим, что по данным наблюдений над случайным вектором $X=(X_1,\dots,X_n)$ требуется проверить статистическую гипотезу H_0 о виде спектральной плотности $f(\lambda)$, $-\pi\le\lambda\le\pi$ временного ряда X_t.

Настоящая работа посвящается задаче построения различных критериев согласия для проверки гипотезы H_0. При построении этих критериев мы существенно опираемся на тот замечательный факт, что при широких условиях, налагаемых на $f(\lambda)$ (включающих, разумеется, условие $f(\lambda)>0$), последовательность случайных функций

$$\xi_n(\tau,X)=\sqrt{2n}\left[\xi_n(\pi\tau,X)-\tau\xi_n(\pi,X)\right],\quad 0\le\pi<1,\qquad (2)$$

$$n=1,2\dots$$

где

$$\xi_n(s,X)=\frac{1}{2\pi}\int_0^s I_n(\lambda)f^{-1}(\lambda)\,d\lambda,\quad \text{а } I_n(\lambda,X)=\frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{t=0}^{\infty}X_t e^{i\lambda t}\right|^2$$

- периодограмма временного ряда X_t, сходится к броуновскому мосту $\xi(\tau)$, $0\le\tau\le1$, т.е. к гауссовскому процессу с нулевым математическим ожиданием и ковариационной функцией

$E\,\xi(\tau)\xi(s)=t(1-s)\quad 0\le t\le s\le1$ (см. ниже теорему I).

Отсюда следует, что если $V[c]=V[c(\tau),\,0\le\tau\le1]$ - непрерывный функционал, определенный на пространстве

$C[0,1]$ непрерывных функций $c = c(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, с нормой $\|c\| = \sup\limits_{0\le\tau\le 1} |c(\tau)|$, то тогда последовательность распределений $\mathcal{L}\{V[\xi_n(\tau)]\}$, $n = 1, 2 \ldots$, слабо сходится к распределению $\mathcal{L}\{V[\xi(\tau)]\}$. Доказательству этого факта посвящается § 2 настоящей работы.

Итак, для проверки гипотезы H_0 мы можем ввести в рассмотрение класс критериев согласия, определяемых критическими областями вида

$$\{\underline{x} : V[\xi_n(\underline{x})] > d\alpha\}, \tag{3}$$

где $d\alpha$ - квантиль распределения $\mathcal{L}[V(\xi(\tau))]$, отвечающий асимптотическому уровню значимости α.

Заметим, что критерии, входящие в этот класс, родственны критериям для проверки гипотезы о виде распределения случайной величины X по независимой выборке, таким, как, например, критерии Колмогорова-Смирнова, Реньи или ω^2. Действительно, поскольку функционалы $\max\limits_{0\le\tau\le 1} |c(\tau)|$, $\max\limits_{a\le\tau\le 1} |c(\tau)|/\tau$, $0 < a < 1$, $\int\limits_0^1 c^2(\tau)d\tau$ - непрерывны на $C[0,1]$, то при условиях теоремы I имеют место следующие соотношения:

$$\lim_{n\to\infty} P\{\max_{0\le\tau\le 1} |\xi_n(\tau)| < \varepsilon\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\alpha^2},$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\max_{a\le\tau\le 1}\left|\xi_n(\tau)\right|<\varepsilon\right\}=4\Phi(\varepsilon a')-3+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\Phi[(2k+1)\varepsilon a']-\Phi[2k\varepsilon a']\right),\quad a'=\left(\frac{a}{1-a}\right)^{1/2},$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\int_0^1 \xi_n^2(\tau)\,d\tau<\varepsilon\right\}=G(\varepsilon),$$

где $\Phi(x)$ и $G(x)$ - функции распределения, характеристические функции которых равны $e^{-\frac{t^2}{2}}$ и соответственно

$$\left(\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1-\frac{2it}{k^2\pi^2}}\right)^{-1}$$

В § 3 настоящей работы рассматривается вопрос об относительных достоинствах или недостатках различных критериев согласия, основанных на статистиках вида $V[\xi_n(\tau)]$. Как известно, о них можно судить, если будем сравнивать асимптотические (при $n\to\infty$) значения мощностей этих критериев при достаточно широком классе альтернативных гипотез.

Мы будем ограничиваться рассмотрением лишь таких альтернатив H_1, которые со скоростью $n^{-\frac{1}{2}}$ "сближаются" с нулевой гипотезой H_0 (подробнее см. ниже). Доказывается (см. теорему 2), что при справедливости гипотезы H_1 последовательность $\mathcal{L}\{V[\xi_n(\tau)]/H_1\}$, $n=1,2,\dots$ распределений $V[\xi_n(\tau)]$ слабо сходится к распределению $\mathcal{L}\{V[\xi(\tau)+A(\tau)]\}$, где $\xi(\tau)$, $0\le\tau\le 1$, – опять броуновский мост, а неслучайная функция $A(\tau)$ определяется формулой (I0) (см. ниже).

В § 4 мы рассмотрим важный частный случай, когда функционал V имеет вид

$$V[c]=2\sum_{j=1}^{m}\left\{\int_0^1\tilde{\varphi}_j(\tau)\,dc(\tau)\right\}^2, \tag{4}$$

где $\tilde{\varphi}_j(\tau)$, $j=\overline{1,m}$, – некоторые непрерывные и ограниченные функции, удовлетворяющие условию

$$\tilde{\varphi}_j(\tau)=\tilde{\varphi}_j(-\tau),\quad \int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}_j(\tau)\,d\tau=0,\quad \int_{-1}^{1}\tilde{\varphi}_j(\tau)\,\tilde{\varphi}_k(\tau)=\delta_{jk}. \tag{5}$$

Легко можно убедиться, что в этом случае $\mathcal{L}\{V[\xi(\tau)]\}$ является χ^2 - распределением с m степенями свободы.

§ 2. Асимптотическое распределение статистик критериев при справедливости гипотезы H_0

Как указывается Гренандером и Розенблатом /I/, для проверки гипотезы H_0 можно предложить различные критерии согласия, при построении которых по существу используется асимптотическая нормальность случайных величин $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\lambda)I_n(\lambda)\,d\lambda$, где $\varphi(\lambda)$ - некоторая весовая функция. Если же в качестве весовой функции использовать функцию

$$\varphi_\tau(\lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при } \lambda<0, \\ \sqrt{2n}\,(1-\tau)(2\pi f(\lambda))^{-1} & \text{при } 0\le\lambda\le\pi\tau, \\ \sqrt{2n}\,\tau(2\pi f(\lambda))^{-1} & \text{при } \pi\tau\le\lambda\le\pi, \end{cases}$$

то мы переходим к случайной функции, имеющей вид (2). В дальнейшем мы используем утверждение теоремы 3 работы /2/, которое здесь удобно будет сформулировать в виде следующей леммы:

Лемма I. Пусть X_t, $t=\dots,-1,0,1\dots,$ - линейный временной ряд, представимый в виде (I).

Тогда $\sqrt{n}\max\limits_{0\le\lambda\le\pi}|T_n(\lambda)|\to 0$ при $n\to\infty$ по вероятности, где $T_n(\lambda)=I_n(\lambda)-2\pi f(\lambda)I_{n,\varepsilon}(\lambda)$, а $I_n(\lambda)$ и $I_{n,\varepsilon}(\lambda)$ - периодограммы временных рядов X_t и ε_t соответственно.

Предположим, что при справедливости проверяемой нами гипотезы H_0 выполняются условия леммы I. Обозначим $\xi_{n,\varepsilon}(s)=\int_0^s I_{n,\varepsilon}(\lambda)\,d\lambda$, тогда имеет место

Лемма 2. Распределение, непрерывного в C функционала V от случайного процесса

$$\mathcal{E}_{n,\varepsilon}(\tau)=\sqrt{2n}\left[\xi_{n,\varepsilon}(\pi\tau)-\tau\,\xi_{n,\varepsilon}(\pi)\right], \qquad (6)$$
$$0\le\tau\le1,$$

при условии справедливости гипотезы H_0 слабо сходится при $n \to \infty$ к распределению функционала V от броуновокого моста $\mathcal{E}(\tau)$, $0 \le \tau \le 1$, т.е.

$$\mathcal{L}\{V[\mathcal{E}_{n,\varepsilon}(\tau), 0 \le \tau \le 1]/H_0\} \Longrightarrow \mathcal{L}\{V[\mathcal{E}(\tau), 0 \le \tau \le 1]\}.$$

<u>Доказательство</u>. Так как $I_{n,\varepsilon} = \frac{1}{2\pi n}\left|\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t e^{i\lambda t}\right|^2$,

то

$$2\pi I_{n,\varepsilon}(\lambda) = \frac{1}{n}\left[\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t e^{i\lambda t} \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t e^{-i\lambda t}\right] = \frac{1}{n}\left[\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1}\sum_{t=1}^{n-\nu} \varepsilon_t \varepsilon_{t+\nu} \cos\nu\lambda\right] = \gamma_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} \gamma_\nu \cos\nu\lambda,$$

$$\gamma_n = \sum_{t=1}^{n-\nu} \varepsilon_t \varepsilon_{t+\nu}/n;$$

используя (6), получаем

$$\mathcal{E}_{n,\varepsilon}(\tau) = \sqrt{2n}\left[\int_0^{\pi\tau} I_{n,\varepsilon}(\lambda)d\lambda - \tau\int_0^{\pi} I_{n,\varepsilon}(\lambda)d\lambda\right] =$$

$$= \sqrt{2n}\left\{\int_0^{\pi\tau}\left[\frac{\gamma_0}{2\pi} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\gamma_0\cos\nu\lambda}{\pi}\right]d\lambda - \tau\int_0^{\pi}\left[\frac{\gamma_0}{2\pi} + \sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\gamma_0\cos\nu\lambda}{\pi}\right]d\lambda\right\} =$$

$$= \sqrt{2n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\gamma_n \frac{\sin\nu\pi\tau}{\nu\pi}.$$

Положим $\mathcal{Z}_n(\tau) = \sqrt{2}\sum_{\nu=1}^{n-1}\gamma_n \frac{\sin\nu\pi\tau}{\nu\pi}$. Как известно (см., например, лемму 2 /I/), $\sqrt{n}\,\gamma_\nu$, $\nu = 0,1,2,\ldots$, при $n \to \infty$ независимы и имеют нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, поэтому

$$\operatorname{cov}\left[\tilde{Z}_n(\tau)\, Z_n(s)\right] = 2\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\sin \nu\pi\tau \,\sin \nu\pi s}{(\nu\pi)^2}$$

Известно также (см. /3/, стр. 235), что

$$2\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\pi\tau \,\sin\nu\pi s}{(\nu\pi)^2} = t(1-s), \quad 0 \le t \le s \le 1,$$

и получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{cov}\left[Z_n(\tau)\, Z_n(s)\right] = t(1-s),$$

поэтому можно сказать, что предельное распределение случайной функции (6) есть броуновский мост. Используя непрерывность функционала V, лемму 2 легко доказать.

Предположим теперь, что $\max\limits_{0\le\lambda\le\pi} f^{-1}(\lambda) = M < \infty$ и выполняются условия леммы I. Тогда имеет место

<u>Теорема I</u>. $\mathcal{L}\{V[\xi_n(\tau), 0\le\tau\le1]/H_0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{L}\{V[\xi(\tau), 0\le\tau\le1]\}$, т.е. последовательность распределений $\mathcal{L}\{V[\xi_n(\tau)]\}$ при гипотезе H_0 слабо сходится к распределению $\mathcal{L}\{V[\xi(\tau)]\}$ функционала

V от броуновского моста $\xi(\tau),\ 0\leq\tau\leq1$.

Доказательство. В силу равенства (2) и (6), получаем

$$\xi_n(\tau)-\xi_{n,\epsilon}(\tau)=\sqrt{2n}\left\{\left[\xi_n(\pi\tau)-\xi_{n,\epsilon}(\pi\tau)\right]-\tau\left[\xi_n(\pi)-\xi_{n,\epsilon}(\pi)\right]\right\}.$$

Используя лемму 2, достаточно показать, что

$$\sqrt{n}\,\|\xi_n-\xi_{n,\epsilon}\|=\sqrt{n}\max_{0\leq\lambda\leq\pi}\left|\int_0^s T_n(\lambda)\left[2\pi f(\lambda)\right]^{-1}d\lambda\right|\leq$$

$$\leq M\sqrt{n}\max_{0\leq\lambda\leq\pi}\left|T_n(\lambda)\right|$$

при $n\to\infty$ стремится к нулю по вероятности, а это немедленно вытекает из леммы I.

Ввиду непрерывности функционала V, теорема доказана.

Теорема I позволяет рассмотреть класс критериев согласия для проверки гипотезы H_0 о виде спектральной плотности с асимптотическим уровнем значимости α определяемым критическими областями вида (3), где d_α находится из соотношения $\int\limits_{d_\alpha}^{\infty}\ell_p(x)dx=\alpha$ (ℓ_p - плотность распределения $\mathcal{L}\{V[\xi(\tau)]\}$).

§ 3. Асимптотическое распределение статистик критериев при справедливости альтернативной гипотезы

Мы будем предполагать, что при справедливости альтернативной гипотезы H_1 линейный процесс X_t опять может быть представлен в виде (I), однако теперь коэффициенты $g_{\nu n}$

(удовлетворяющие условиям $g_{0n}=1$, $\sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu n}^2 < \infty$, $n=1,2\ldots$) зависят от n так, что последовательность внешних функций $\tilde{g}_n(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu n} z^{\nu}$, $n=1,2\ldots$, сходится к внешней функции $\tilde{g}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} g_{\nu} z^{\nu}$ равномерно по $z=e^{i\lambda}$.

Как известно, при справедливости гипотезы H_0 спектральная плотность имеет вид

$$f(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\tilde{g}(z)\right|^2, \tag{7}$$

а при справедливости гипотезы H_1 -

$$f_n(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\tilde{g}_n(z)\right|^2. \tag{8}$$

Пусть

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\tilde{g}_n(z)-\tilde{g}(z)}{\tilde{g}(z)}\right]=h(z). \tag{9}$$

Тогда из (7), (8) и (9) легко следует, что

$$\sqrt{n}\;\frac{f_n(\lambda)-f(\lambda)}{f(\lambda)}-a(\lambda)\longrightarrow 0 \quad \text{при } n\to\infty$$

равномерно по λ, где $a(\lambda)=2\,\mathrm{Re}\,h(z)$.

При указанных выше условиях имеет место

Теорема 2. При справедливости альтернативной гипотезы H_1 последовательность $\mathcal{L}\{V[\xi_n(\tau)]/H_1\}$, $n=1,2,\dots$, распределений $V[\xi_n(\tau)]$ слабо сходится к распределению $\mathcal{L}\{V[\xi(\tau)+A(\tau)]\}$, где $\xi(\tau)$, $0\le\tau\le1$, - опять броуновский мост, а

$$A(\tau)=\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\int_0^{\pi\tau}a(\lambda)d\lambda-\tau\int_0^{\pi}a(\lambda)d\lambda\right],\quad 0\le\tau\le1. \tag{10}$$

Доказательство. Обозначим через $I_n^{(0)}(\lambda)$ и $I_n^{(n)}(\lambda)$ периодограмму линейного процесса $X_t^{(0)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}g_\nu\varepsilon_{t-\nu}$ и соответственно $X_t^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}g_{\nu n}\varepsilon_{t-\nu}$. Рассмотрим величину

$$\sqrt{n}\int_0^s\frac{I_n^{(n)}(\lambda)-I_n^{(0)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda.$$

После некоторых преобразований получаем, что

$$\sqrt{n}\int_0^s\frac{I_n^{(n)}(\lambda)-I_n^{(0)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda=\frac{1}{\pi\sqrt{n}}Re\int_0^s\frac{\sum_{t=1}^{n}X_t^{(0)}\bar{z}^t\sum_{t=1}^{n}(X_t^{(n)}-X_t^{(0)})z^t}{f(\lambda)}d\lambda+ \tag{11}$$
$$+\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_0^s\frac{\left|\sum_{t=1}^{n}(X_t^{(n)}-X_t^{(0)})z^t\right|^2}{f(\lambda)}d\lambda.$$

Легко показать, что первое слагаемое в правой части (11) стремится при $n\to\infty$ по вероятности к $\int_0^s a(\lambda)d\lambda$, а второе - к нулю. Кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}\left[\int_0^s \frac{I_n^{(n)}(\lambda)-I_n^{(0)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda\right]=0$$

Следовательно, $\sqrt{n}\int_0^s \frac{I_n^{(n)}(\lambda)-I_n^{(0)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda \longrightarrow \int_0^s a(\lambda)d\lambda$

по вероятности.

Используя (2) и (10), можно написать, что при $n\to\infty$

$$\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\left[\int_0^{\pi\tau}\frac{I_n^{(n)}(\lambda)-I_n^{(0)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda-\tau\int_0^{\pi}\frac{I_n^{(n)}(\lambda)-I_n^{(0)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda\right]\longrightarrow$$

$$\longrightarrow\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\left[\int_0^{\pi\tau}a(\lambda)d\lambda-\tau\int_0^{\pi}a(\lambda)d\lambda\right].$$

По теореме I, при $n\to\infty$

$\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\left[\int_0^{\pi\tau}\frac{I_n^{(0)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda-\tau\int_0^{\pi}\frac{I_n^{(0)}}{f(\lambda)}d\lambda\right]\longrightarrow\mathcal{E}(\tau)$, поэтому искомое распределение $\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\left[\int_0^{\pi\tau}\frac{I_n^{(n)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda-\tau\int_0^{\pi}\frac{I_n^{(n)}(\lambda)}{f(\lambda)}d\lambda\right]$ стремится при $n\to\infty$ по вероятности к $\mathcal{E}(\tau)+\mathcal{A}(\tau)$. В силу непрерывности функционала V, то же самое имеет место для последовательностей функционалов. Теорема доказана.

В силу этой теоремы, при $n\to\infty$ мощность критерия с критической областью (3) равна $\int_{d_\alpha}^{\infty}\ell_\rho(X,\mathcal{A})dx$, где $\ell_\rho(x,\mathcal{A})$ - плотность распределения $\mathcal{L}\{V[\mathcal{E}(\tau)+\mathcal{A}(\tau)]\}$.

§ 4. χ^2 критерии согласия

Рассмотрим важный случай, когда функционал V имеет вид (4), а $\tilde{\varphi}_j(\tau)$, $j=\overline{1,m}$, удовлетворяют условиям (5). Из определения броуновского моста и (5) следует, что

$$E\int_0^1 \tilde{\varphi}_j(\tau)\,d\xi(\tau)=0 \quad \text{и} \quad 2E\left[\int_0^1 \tilde{\varphi}_j(\tau)\,d\xi(\tau)\int_0^1 \tilde{\varphi}_k(\tau)\,d\xi(\tau)\right]=\delta_{jk}. \tag{12}$$

Поэтому $\mathcal{L}\{V[\xi(\tau)]\}$ является χ^2- распределением с m степенями свободы. При альтернативной гипотезе имеем

$$V[\xi(\tau)+A(\tau)]=2\sum_{j=1}^{m}\left\{\int_0^1 \tilde{\varphi}_j(\tau)\,d(\xi+A)\right\}^2=$$

$$=2\sum_{j=1}^{m}\left\{\int_0^1 \tilde{\varphi}_j(\tau)\,d\xi(\tau)+\int_0^1 \tilde{\varphi}_j(\tau)\,dA(\tau)\right\}^2.$$

Так как

$$\frac{dA(\tau)}{d\tau}=\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}a(\pi\tau)-\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^{\pi}a(\lambda)\,d\lambda\right\},$$

то мы получаем

$$V[\xi(\tau)+A(\tau)]=2\sum_{j=1}^{m}\left\{\int_0^1 \tilde{\varphi}_j(\tau)\,d\xi(\tau)+\int_0^1 \tilde{\varphi}_j(\tau)\,a(\pi\tau)\,d\tau\right\}^2.$$

Учитывая (12), окончательно получаем, что $\mathcal{L}\{V[\xi(\tau)+A(\tau)]\}$ - это нецентральное χ^2- распределение с m степенями свободы и параметром нецентральности $\mu'\mu$, где μ - вектор-столбец, k - тый элемент которого равен

$$\mu_k = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(\lambda)\, a(\lambda)\, d\lambda, \tag{13}$$

где $\Phi_k(\lambda) = 2\,\tilde{\varphi}_k\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)$.

Рассмотрим класс критериев с асимптотическим уровнем значимости, определяемый критической областью

$$\left\{\underline{x} : \Phi_n'(x)\,\Phi_n(x) > d_\alpha\right\}, \tag{14}$$

где $\Phi_n(x)$ - это m-мерный вектор-столбец, k-тый элемент которого имеет вид $\frac{\sqrt{n}}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_k(\lambda)\frac{I_n(\lambda)}{f(\lambda)}\,d\lambda$.

где Φ_k задается соотношением (13), а случайная величина $\Phi_n'\Phi$ при $n \to \infty$ имеет χ^2 - распределение с m степенями свободы. Если ограничимся классом альтернатив, введенных ранее, то асимптотическое значение мощности критерия, равное

$$\int_{d_\alpha}^{\infty} \ell_m(x, \mu'\mu)\, dx, \tag{15}$$

где $\ell_m(x, \mu'\mu)$ - плотность χ^2-распределения с m степенями и параметром нецентральности $\mu'\mu$, будет существенно зависеть от m и вида функции $\Phi_1 \ldots \Phi_m$. Ортогональные функции $\Phi_1 \ldots \Phi_m$, разумеется, должны быть подобраны так, чтобы величина (15) принимала, по возможности, наибольшее значение.

Используя ортогональность $\Phi_k(\lambda)$, (13) и неравенство Бесселя, получаем

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 = \mu'\mu \le \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a^2(\lambda)\,d\lambda . \qquad (16)$$

Предположим теперь, что функция $a(\lambda)$ может быть представима в виде линейной комбинации некоторых ортогональных функций

$$a(\lambda) = \sum_{k=1}^{p} h_k \Phi_k(\lambda) \qquad (17)$$

при некоторых $h_1 \dots h_p$. Если же эти ортогональные функции используются и при построении критической области (14), то тогда

$$\sum_{k=1}^{m} \mu_k^2 = \sum_{k=1}^{\min(m,p)} h_k^2 \le \sum_{k=1}^{p} h_k^2 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a^2(\lambda)\,d\lambda$$

и равенство достигается лишь при $m \geqslant p$.

Из известных свойств нецентрального χ^2-распределения следует, что при фиксированном m асимптотическая мощность критерия тем больше, чем больше параметр нецентральности и, принимая во внимание (16), число степеней свободы следует выбирать равным p.

<u>Пример</u>: Предположим, что линейный процесс X_t, $t = \dots -1, 0, 1 \dots$, является смешанным процессом авторегрессии и скользящего среднего и что при справедливости гипотезы H_0 её спектральная плотность имеет вид

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| g_r(z) \right|^2 \left| h_q(z) \right|^{-2},$$

где $g_r(z)=1-\alpha_1 z-\dots-\alpha_r z^r$, $h_q(z)=1-\Phi_1-\dots-\Phi_q z^q$ –

многочлены, все корни которых по модулю меньше единицы, а при справедливости гипотезы H_1

$$f_n(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\left|g_r(z)-n^{-\frac{1}{2}}g^{(1)}_{r'}(z)\right|^2\left|h_q(z)-n^{-\frac{1}{2}}h^{(1)}_{q'}(z)\right|^{-2},$$

где

$$g^{(1)}_{r'}(z)=1-\alpha^{(1)}_1 z-\dots-\alpha^{(1)}_{r'}z^{r'},\quad h^{(1)}_{q'}=1-\Phi^{(1)}_1 z-\dots-\Phi^{(1)}_{q'}z^{q'}$$

$$r\le r',\quad q\le q',$$

– многочлены, все корни которых по модулю меньше единицы.

Тогда очевидно, что функция

$$a(\lambda)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\frac{f_n(\lambda)-f(\lambda)}{f(\lambda)}=2\,Re\left[\frac{h^{(1)}_{q'}(z)}{h_q(z)}-\frac{g^{(1)}_{r'}(z)}{g_r(z)}\right] \tag{18}$$

может быть представима в виде (17), где

$$p=q+r+\max\{(q'-q),(r'-r)\},$$

$$\Phi_j(\lambda)=\begin{cases}2\,Re\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{q}\omega_{ki}\,z^k}{h_q(z)}-\dfrac{\sum\limits_{e=1}^{r}\omega_{j,q+e}\,z^e}{g_r(z)}\right], & j=\overline{1,q+r}\\[2ex] 2\,Re\,\dfrac{h_q(\bar z)\,g_r(\bar z)}{h_q(z)\,g_r(z)}\,z^j, & j=q+r+1,\ q+r+2\dots\end{cases} \tag{19}$$

ω_{ke} — (k,e) - элемент треугольной $(q+r)\times(q+r)$

матрицы W, удовлетворяющий условию

$$W\begin{bmatrix}\Gamma_{q,\varphi} & -\Phi^{*}\\ -\Phi & \Gamma_{r,\alpha}\end{bmatrix}W' = I_{q+r},$$

где

$$\Gamma_{q,\varphi}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda(k-j)}}{|h_q(z)|^2}\,d\lambda\right],\ k,j=\overline{1,q},\ \varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_q)',$$

$$\Gamma_{r,\alpha}=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda(k-j)}}{|g_r(z)|^2}\,d\lambda\right],\ k,j=\overline{1,r},\ \alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)',$$

$$\Phi=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\lambda(k-j)}}{h_q(z)\,g_r(z)}\,d\lambda\right]$$

а I_{q+r} – единичная матрица порядка $q+r$.

Отсюда следует, что мощность критерия согласия, определяемого критической областью вида (I4), где $m=r+q+\max\{(q'-q),(r'-r)\}$, а $\Phi_1,\dots,\Phi_m$ – первые m из ортогональных функций (I9), при $n\to\infty$ сходится к величине (I5), где число степеней свободы равно $q+r+\max\{(q'-q),(r'-r)\}$, а параметр нецентральности равен

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}a^2(\lambda)\,d\lambda=\begin{bmatrix}\Phi'_{(1)} & \alpha'_{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma_{q',\varphi} & -\Phi^{*}\\ -\Phi & \Gamma_{r^{(1)},\alpha}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{(1)}\\ \alpha_{(1)}\end{bmatrix}.$$

Поступила I2.УI.1978

Кафедра теории вероятностей ТГУ

Институт экономики и права АН ГССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. У.Гренандер, М.Розенблат, "Математика", сб.переводов, 2,5, 1958, 123-144.

2. A.M.Walker, J.Aust. Math. Soc., v.I(1965), 107-119.

3. Я.Гаек, З.Шидак, Теория ранговых критериев, М., "Наука", 1971.

კ.ჯაფარიძე, ა.ოსიძე

თანხმობის კრიტერიუმები წრფივი დროითი რიგების სპექტრის შესახებ ჰიპოთეზების შესამოწმებლად

რეზიუმე

შემოთავაზებულია თანხმობის კრიტერიუმების კლასი (3)- სახის კრიტიკული არეებით.

შესწავლილია ამ კრიტერიუმების ასიმპტოტური სიმძლავრეები. ალტერნატიული ჰიპოთეზების გარკვეული კლასის დროს ერთ სპეციალურ შემთხვევაში მიღებული კრიტერიუმი ემთხვევა ცნობილ χ^2 კრიტერიუმს.

K. Japaridze, A.Osidze.

ON THE GOODNESS OF FIT TESTS FOR CHECKING THE HYPOTHESIS CONCERNING LINEAR TIME SERIES

Summary

A class of goodness of fit tests is suggested, defined by critical regions of type (3). Asymptotic power values of these tests are studied with a clss of alternative hypotheses; for a particular case the obtaned test is shown to be a χ^2 test.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980

УДК 519.21 + 518.88

О ЯДЕРНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

З.Г.Горгадзе, Т. Кюн, В.И.Тариеладзе

Понятие ядерного оператора сыграло и продолжает играть важную роль в теории вероятностных распределений в бесконечномерных пространствах. Недавно было установлено, что ковариационные операторы плотных мер сильно второго порядка в банаховом пространстве являются ядерными, и был охарактеризован класс банаховых пространств, в которых ядерные операторы и только они служат ковариационными операторами гауссовских мер / I /. Используя эти результаты, мы находим условия ядерности интегральных операторов, действующих из сопряженного банахова пространства в исходное. Ранее такие условия были известны лишь для гильбертовых пространств (см., например, / 2 /, гл.III, § 10).

Пусть X и Y - действительные банаховы пространства, X^*, Y^* - сопряженные пространства. Линейный оператор $S : X \longrightarrow Y$ называется я д е р н ы м, если существуют такие последовательности $(x^*_k)_{k \in N} \subset X^*$ и $(y_k)_{k \in N} \subset Y$, что $\sum_k \|x_k^*\| \|y_k\| < \infty$ и $Sx = \sum_k \langle x, x_k^* \rangle y_k$ для всех $x \in X$.

Пусть μ - мера слабого второго порядка на цилиндрической σ-алгебре банахова пространства X. Ковариационный оператор $R: X^* \longrightarrow X^{**}$ меры μ определяется равенством

$$\langle R x_1^*, x_2^* \rangle =$$

$$= \int_X \langle x, x_1^* \rangle \langle x, x_2^* \rangle d\mu(x) - \int_X \langle x, x_1^* \rangle d\mu(x) \int_X \langle x, x_2^* \rangle d\mu(x),$$

$$x_1^*, x_2^* \in X^*.$$

Оператор R положителен ($\langle R x^*, x^* \rangle \geq 0$, $x^* \in X^*$) и симметричен ($\langle R x_1^*, x_2^* \rangle = \langle R x_2^*, x_1^* \rangle$, $x_1^*; x_2^* \in X^*$). Если μ - плотная мера, то $R X^* \subset X$.

Положительный симметричный оператор $R: X^* \to X$ называется гауссовской ковариацией, если существует такая плотная гауссовская мера μ в X, что R является ковариационным оператором этой меры, или, что то же самое,

$$\exp\{-\frac{1}{2} \langle R x^*, x^* \rangle\} = \int_X \exp\{i \langle x, x^* \rangle\} d\mu(x),$$

$$x^* \in X^*.$$

В произвольном банаховом пространстве ковариационный оператор плотной меры сильного второго порядка (в частности, гауссовская ковариация) является ядерным оператором / I /. Утверждение "если оператор симметричен, положителен и является ядерным, то он есть гауссовская ковариация" характеризует пространства типа 2. Напомним, что банахово пространство X называется пространством т и п а 2, если существует такая постоянная $c > 0$, что для произвольного набора $(x_k)_{k=1}^n \subset X$ $(n \in N)$ имеет место неравенство

$$\mathbb{E} \| \sum_{k=1}^n x_k \gamma_k \|^2 \le c \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 .$$

Здесь и всюду ниже $(\gamma_k)_{k \in N}$ - последовательность независимых стандартных гауссовских случайных величин и $\mathbb{E}$ - символ математического ожидания.

Пространства $L_p(T, \Sigma, \nu)$, $2 \le p < \infty$, являются пространствами типа 2.

Пусть ℓ_∞^n обозначает пространство $\mathbb{R}^n$ с максимум-нормой. Говорят, что банахово пространство X с о д е р ж и т р а в н о м е р н о ℓ_∞^n, если для каждых $n \in N$ и $\varepsilon > 0$ существует такой инъективный линейный оператор $J: \ell_\infty^n \to X$, что $\|J\| \|J^{-1}\| < 1 + \varepsilon$. Пространства, не содержащие равномерно ℓ_∞^n, обладают рядом важных свойств.

В данной работе мы рассматриваем банаховы пространства измеримых функций. Мы придерживаемся терминологии /3/.

Пусть (T, Σ, ν) - пространство с положительной σ - конечной мерой, $L_o = L_o(T, \Sigma, \nu)$ - пространство (классов ν - эквивалентных) измеримых ν - почти всюду конечных действительных функций, снабженное топологией сходимости по мере ν на множествах конечной меры. В этой топологии оно есть метризуемое топологическое векторное пространство. L_o - векторная решетка относительно обычного порядка. Мы говорим, что E - банахово фундаментальное пространство (БФП), если E - векторное подпространство пространства L_o, снабженное нормой $\|\cdot\|_E$ таким образом, что $(E, \|\cdot\|_E)$ - банахово пространство и если $x \in E$ и $x_1 \in L_o, |x_1| \leq |x|$, то $x_1 \in E$ и $\|x_1\|_E \leq \|x\|_E$. Кроме этого, мы полагаем, что E содержит ненулевые ν -п.в. положительные функции. Введем обозначение

$$E' = \{y \in L_o : \int_T |x(t)y(t)| d\nu(t) < \infty \text{ для всех } x \in E\}.$$

Каждый элемент $y \in E'$ равенством $f(x) = \langle x, y \rangle \equiv \int_T x(t)y(t)d\nu(t)$ определяет линейный непрерывный функционал f на E, что позволяет отождествить E' с замкнутым тотальным подпространством сопряженного пространства E^* (/ 3 /, гл.VI, § I).

Примерами пространств рассматриваемого вида могут служить пространства $L_p(T,\Sigma,\nu)$, $1\le p\le\infty$ (в этом случае $L_p' = L_{p'}$, $p'=p/p-1$), пространства Орлича $L_\Phi(T,\Sigma,\nu)$ (в этом случае $L_\Phi' = L_{\Phi'}$, где Φ' - дополнительная к Φ функция Орлича) и т.д.

Пусть E_1 и E_2 - БФП. Говорят, что линейный оператор $K: E_1 \to E_2$ является интегральным оператором с ядром $k: T\times T \to \mathbb{R}$, если интеграл $\int_T k(s,t)y(t)d\nu(t)$ существует для всех $y\in E_1$ и ν - почти всех $s\in T$ и для каждого $y\in E_1$ имеем

$$(Ky)(s)=\int_T k(s,t)y(t)d\nu(t), \quad \nu\text{ - п.в.}$$

Ясно, что если K имеет два интегральных представления, то ядра этих представлений $\nu\otimes\nu$ -п.в. совпадают. Отметим, что интегральный оператор непрерывен(/ 3 /, гл.XI, §I).

Говорят, что функция $r: T\times T\to\mathbb{R}$ симметрична, если $r(s,t)=r(t,s)$, $s,t\in T$, и что r положительно определена, если для каждого $n\in\mathbb{N}$ и для произвольных наборов $(c_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$, $(t_i)_{i=1}^n\subset T$ имеем $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n c_i\bar{c}_j\, r(t_i,t_j)\ge 0.$

<u>Предложение I.</u> Пусть E - БФП на (T,Σ,ν), $R: E^* \to E$ - гауссовская ковариация. Тогда

$$(Ry)(s) = \int_T r(s,t)y(t)d\nu(t), \quad y \in E',$$

где $r: T \times T \to \mathbb{R}$ - положительно определенная симметричная функция, $r(s,t) = \sum_k x_k(s) x_k(t)$ $\nu \otimes \nu$ - п.в., $(x_k)_{k \in N} \subset E$, $(\sum_k x_k^2)^{1/2} \in E$.

<u>Доказательство</u>. Поскольку оператор R положителен и симметричен, то существует такой оператор $A: E^* \longrightarrow \ell_2$, $A^*(\ell_2) \subset E$, что $R = A^* A$. Пусть $x_k = A^* e_k$, где $(e_k)_{k \in N}$ - естественный базис пространства ℓ_2.

Мы покажем, что $(\sum_k x_k^2)^{1/2} \in E$.

Из того, что R - гауссовская ковариация, вытекает, что ряд $\sum_k x_k \gamma_k$ с вероятностью 1 сходится в E.

Покажем, что

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^n x_k \gamma_k\right| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$$

Для каждого $y \in E'$, $y \geq 0$, имеем:

$$\langle \mathbb{E}|\sum_{k=1}^{n} x_k \gamma_k|, y\rangle = \mathbb{E}\int_T |\sum_{k=1}^{n} x_k(t)\gamma_k| y(t)d\nu(t) =$$

$$= \int_T \mathbb{E}|\sum_{k=1}^{n} x_k(t)\gamma_k|\, y(t)d\nu(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_T \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t)\Big)^{1/2} y(t)d\nu(t).$$

Так как $\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ и E есть БФП, имеем, что $\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2} \in E$. Далее,

$$\mathbb{E}\|\sum_{k=1}^{n} x_k \gamma_k\| = \mathbb{E}\||\sum_{k=1}^{n} x_k \gamma_k|\| \geq$$

$$\geq \|\mathbb{E}|\sum_{k=1}^{n} x_k \gamma_k|\| = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\|\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2}\|.$$

Обозначим $f_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big)^{1/2}$. Покажем, что последовательность $(f_n)_{n\in N}$ фундаментальна. Имеем $|f_n - f_m| \leq$ $\leq \Big(\sum_{k=n+1}^{m} x_k^2\Big)^{1/2}$ и при $n, m \to \infty$

$$\|f_n - f_m\| \leq \|\Big(\sum_{k=n+1}^{m} x_k^2\Big)^{1/2}\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathbb{E}\|\sum_{k=n+1}^{m} x_k \gamma_k\| \to 0$$

Положим теперь $r(s,t) = \sum_k x_k(s)x_k(t)$, $s,t \in T$. Легко проверить, что интегральный оператор с таким ядром совпадает с оператором R.

Предложение 2. Пусть E - БФП и $R: E' \longrightarrow E$ - положительный симметричный компактный интегральный оператор с ядром r и существует $\sigma \in E$ такая, что $r^{1/2}(t,t) \leq \sigma(t)$ ν - п.в. Тогда существует последовательность $(x_\kappa)_{\kappa \in N} \subset E$, $\left(\sum_\kappa x_\kappa^2\right)^{1/2} \leq \sigma$, такая, что $r(s,t) = \sum_\kappa x_\kappa(s) x_\kappa(t)$ $\nu \otimes \nu$ - почти всюду.

Доказательство. Так же, как и в доказательстве предложения I, имеем $R = A^* A$ и пусть $x_\kappa = A^* e_\kappa$. Тогда для всех $y \in E'$ $\sum_\kappa \langle x_\kappa, y\rangle^2 \leq \langle \sigma, y\rangle^2$. Покажем, что $\left(\sum_\kappa x_\kappa^2\right)^{1/2} \leq \sigma$. Пусть $(\alpha_\kappa)_{\kappa=1}^n \subset R$, $\sum_{\kappa=1}^n \alpha_\kappa^2 \leq 1$, $y \in E'$, $y \geq 0$.

Тогда

$$\left\langle \sum_{\kappa=1}^n \alpha_\kappa x_\kappa, y\right\rangle \leq \left(\sum_{\kappa=1}^n \alpha_\kappa^2\right)^{1/2} \left(\sum_{\kappa=1}^n \langle x_\kappa, y\rangle^2\right)^{1/2} \leq \langle \sigma, y\rangle.$$

Отсюда $\sum_{\kappa=1}^n \alpha_\kappa x_\kappa(t) \leq \sigma(t)$ для ν - почти всех $t \in T$. В силу произвольности выбора $(\alpha_\kappa)_{\kappa=1}^n$ имеем $\left|\sum_{\kappa=1}^n \alpha_\kappa x_\kappa(t)\right| \leq \sigma(t)$ и если в этом неравенстве перейти к супремуму по всевозможным $(\alpha_\kappa)_{\kappa=1}^n \subset R$, $\sum_{\kappa=1}^n \alpha_\kappa^2 \leq 1$, получим $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2(t)\right)^{1/2} \leq \sigma(t)$ ν - п.в. Остается перейти к пределу при $n \to \infty$.

Пусть теперь $K(s,t) = \sum_k x_k(s)\, x_k(t)$. Легко видеть, что ядро K задает тот же самый оператор R и тем самым $K(s,t) = \varkappa(s,t)$ $\nu \otimes \nu$ -п.в.

<u>Теорема I</u>. Пусть E - БФП, не содержащее равномерно ℓ_∞^n. Если $R: E' \to E$ - интегральный оператор, ядро которого положительно определено, симметрично и таково, что для некоторого $\sigma \in E$ $\varkappa^{1/2}(t,t) \leq \sigma(t)$ ν - п.в., то R - симметричный положительный ядерный оператор.

<u>Доказательство</u>. Симметричность оператора R очевидна. Покажем, что он положителен.

Пусть $T = \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m$, где T_m таковы, что $T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots$, $\nu(T_m) < \infty$ и если $t \in T_m$, то $|\sigma(t)\, y(t)| \leq m$, где $y \in E'$ фиксировано. В силу положительной определенности ядра $\varkappa$ при $(t_i)_{i=1}^n \subset T_m$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varkappa(t_i, t_j)\, y(t_i)\, y(t_j) \geq 0$$

и так как $r^{1/2}(t,t) \le \sigma(t)$,

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma^2(t_i) y^2(t_i) + \sum_{i \ne j} r(t_i, t_j) y(t_i) y(t_j) \geq 0.$$

Проинтегрируем это неравенство сначала по t_1, потом по t_2 и т.д. Получим

$$n\nu(T_m)^{n-1} \int_{T_m} \sigma^2(t) y^2(t) d\nu(t) + n(n-1)\nu(T_m) \iint_{T_m T_m} r(s,t) y(s) y(t) d\nu(s) d\nu(t) \geq 0$$

и, деля обе части на $n(n-1)\nu(T_m)^{n-2}$,

$$\frac{\nu(T_m)}{n-1} \int_{T_m} \sigma^2(t) y^2(t) d\nu(t) + \iint_{T_m T_m} r(s,t) y(s) y(t) d\nu(s) d\nu(t) \geq 0.$$

Остается перейти к пределу сначала при $n \to \infty$, а затем при $m \to \infty$.

Теперь, в силу предложения 2, можно считать, что $r(s,t) = \sum_k x_k(s) x_k(t)$ $\nu \otimes \nu$ - п.в., где $(x_k)_{k \in N} \subset E$ и $\left(\sum_k x_k^2\right)^{1/2} \le \sigma$, и, тем самым $\left(\sum_k x_k^2\right)^{1/2} \in E$.

Так как по предположению E не содержит равномерно ℓ_∞^n, в силу теоремы 2 /работы / 4/, имеем, что R есть гауссовская ковариация, откуда в силу теоремы 4 из работы / I / следует, что R - ядерный оператор.

Теорема 2. Пусть E - БФП, не содержащее равномерно ℓ_∞^n. Следующие утверждения эквивалентны:

а) E имеет тип 2;

б) класс симметричных положительных ядерных операторов $R: E' \to E$ совпадает с классом операторов, отображающих E' в E и допускающих интегральное представление с положительно определенным симметричным ядром $\varkappa$, таким, что для некоторого $\sigma \in E$ имеем $\varkappa^{1/2}(t,t) \le \sigma(t)$ ν-п.в.

Доказательство. Импликация (а) $\Longrightarrow$ (б) вытекает из предыдущей теоремы I и теоремы 5 из / I /. Далее, в силу теоремы I и того, что E не содержит равномерно ℓ_∞^n, получаем, что каждый ядерный оператор является гауссовской ковариацией, что, как отмечалось выше, характеризует пространства типа 2 (/ I /, теорема 5).

Следствие. Симметричный положительный оператор R, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(T, \Sigma, \nu)$, в том и только в том случае является ядерным, когда он допускает интегральное представление

$$(Rh)(s) = \int_T \varkappa(s,t)\, h(t)\, d\nu(t), \quad h \in L_2,$$

где $\varkappa$ - симметричная и положительно определенная измеримая функция, для которой функция $t \to \varkappa(t,t)$ измерима и $\int_T \varkappa(t,t)\, d\nu(t) < \infty$. След оператора R в таком случае равен

$$sp\,R = \int_T \varkappa(t,t)\,d\nu(t).$$

Тот факт, что интегральные операторы предлагаемого вида являются ядерными в случае, когда T есть интервал числовой оси, а $\varkappa$ - непрерывная функция двух переменных, был известен и раньше (см. / 2 /, стр.147, а также / 5 /).

Поступила 30.IУ.1979

Кафедра теории случайных процессов ТГУ, Секция математики Йенского университета им. Ф.Шиллера (ГДР)

Вычислительный центр АН ГССР им.Н.И.Мусхелишвили

ЛИТЕРАТУРА

1. S.Chevet, S.A.Chobanjian, W.Linde, V.I.Tarieladze, Caracterisation de certaines classes d' espaces de Banach par les mesures gaussienes, C.R.Acad. Sci.Paris, 285(1977), 793-796.

2. И.Ц.Гохберг, М.Г.Крейн. Введение в теорию линейных несамосоятельных операторов, "Наука", М., 1965.

3. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. Функциональный анализ, "Наука", М.,1977.

4. З.Г.Горгадзе, В.И.Тариеладзе, С.А.Чобанян. Гауссовские ковариации в банаховых подрешетках пространства $L_0(T,\Sigma,\nu)$, Докл. АН СССР, 241, 3, 1978, 528-531.

5. J.A.Cochran, Compositive intergral operators and nuclearity, Ark. Mat., 15,2, 1977, 215-222.

ზ.გორგაძე, ტ.კიუნი, ვ.ტარიელაძე

ინტეგრალური ოპერატორების ბირთვულობის შესახებ

რეზიუმე

მიღებულია ზომადი ფუნქციების ბანახის სივრცეებში ინტეგრალური ოპერატორების ბირთვულობის პირობები. ეს ჰილბერტის სივრცეებისათვის ცნობილი შედეგების განზოგადოებაა.

Z.Gorgadze, T.Kühn, V.Tarieladze

ON THE NUCLEARITY OF INTEGRAL OPERATORS

Summary

The conditions of nuclearity of integral operators in Banach spaces of measurable functions are obtained. This is a generalization of well-known results for Hilbert spaces.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980

УДК 517.9

ОБ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОМ СВОЙСТВЕ СФЕРЫ

А.И.Чахтаури

Как известно, изопериметрическая задача для поверхностей состоит в следующем: "Найти среди замкнутых поверхностей с данным периметром (площадь всей поверхности), такую поверхность, которая ограничивает тело максимальным объемом". Разными способами показано, что только сфера может быть решением этой задачи, однако все эти способы довольно сложны (см. / I /, стр. 58-99). В настоящей работе мы приводим новый способ доказательства этого факта, который нам кажется непосредственным (не требуется специального вспомогательного материала) и простым (не применяется вариационное исчисление).

На выпуклой части поверхности (на замкнутой регулярной поверхности такая часть существует) рассматриваются точки M и M_1, где $H \neq H_1$ (H и H_1 - средние кривизны поверхности в точках M и M_1). Допустим, что $H > H_1$. Поместим начало координат в точке M , а направления осей

ox и oy совместим с главными направлениями поверхности. Тогда уравнение поверхности запишется в виде (по крайней мере в окрестности точки M)

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+ty^2)+f_3(x,y), \tag{I}$$

где r и t - главные кривизны поверхности, а $f_3(x,y)$ - ряд, не содержащий членов степени <3. Ясно, что гауссова и средняя кривизны поверхности в этом случае выражаются в виде

$$K=rt,\quad H=\frac{1}{2}(r+t). \tag{2}$$

Пересекая поверхность плоскостью $z=h$, где h -достаточно малое число, получим линию пересечения

$$h=\frac{1}{2}(rx^2+ty^2)+f_3(x,y), \tag{3}$$

являющуюся контуром основания отсекаемого сегмента. Так как h можно рассматривать сколь угодно малым числом, то линия (3) будет близка к эллипсу с полуосями

$$\sqrt{\frac{2h}{r}},\ \sqrt{\frac{2h}{t}}.$$

Теперь рассмотрим новую поверхность, данную уравнением

$$z=(1-\xi)h+\frac{\xi}{2}(rx^2+ty^2)+\frac{2}{3}f_3(x,y), \tag{4}$$

где ξ - некоторый параметр, причем $\xi < 1$.

Легко проверить, что пересечение этой поверхности с плоскостью $z = h$ выражается тем же уравнением (3). Итак, сегменты, отсекаемые от поверхностей (I) и (4) плоскостью $z = h$, имеют общее основание. Обозначим площади боковых поверхностей этих сегментов через ω и $\overset{*}{\omega}$, а объемы через v и $\overset{*}{v}$ соответственно. Вычисляя эти величины соответствующими определенными интегралами, получим

$$\omega - \overset{*}{\omega} \approx \frac{2\pi h^2}{\sqrt{K}} H(1-\xi^2), \tag{5}$$

$$\overset{*}{v} - v \approx \frac{\pi h^2}{\sqrt{K}} (1-\xi).$$

Аналогично, в окрестности точки M_1 будем иметь

$$z_1 = \frac{1}{2}(r_1 x_1^2 + t_1 y_1^2) + f_3(x_1, y_1). \tag{6}$$

Соответствующая новая поверхность определяется уравнением

$$z_1 = (1-\eta)h + \frac{\eta}{2}(r_1 x_1^2 + t_1 y_1^2) + \eta f_{31}(x_1, y_1), \tag{7}$$

где η - некоторый параметр, причем $\eta > 1$. Пересекая поверхность (6) и (7) плоскостью $z = h$, получим два сегмента с общим основанием[x)]. Если обозначать площади боковых

---

x) h берется столь малым, что эти сегменты не имели общих точек.

поверхностей этих сегментов через ω_1 и $\overset{*}{\omega}_1$, а их объемы - через v_1 и $\overset{*}{v}_1$ соответственно, то получим

$$\overset{*}{\omega}_1 - \omega_1 \approx \frac{2\pi h^2}{\sqrt{K_1}} H_1 (\eta^2 - 1), \tag{8}$$

$$\overset{*}{v}_1 - v_1 \approx \frac{\pi h^2}{\sqrt{K_1}} (\eta - 1).$$

Теперь выберем ξ и η так, чтобы

$$\overset{*}{\omega}_1 - \omega_1 = \omega - \overset{*}{\omega}, \tag{9}$$

$$\overset{*}{v}_1 - v_1 > v - \overset{*}{v}.$$

В силу формул (5) и (8), получим соотношения относительно ξ и η:

$$\frac{H_1}{\sqrt{K_1}} (\eta^2 - 1) = \frac{H}{\sqrt{K}} (1 - \xi^2), \tag{10}$$

$$\frac{\eta - 1}{\sqrt{K_1}} > \frac{1 - \xi}{\sqrt{K}}.$$

Отсюда определяется интервал изменения для ξ:

$$1 > \xi > 1 - \frac{2\left(\frac{H}{H_1} - 1\right)}{\sqrt{\frac{K_1}{K}} + \frac{H}{H_1}} \tag{11}$$

Так как $H > H_1$, такие значения ξ существуют. Соответствующие значения η определяются из первого равенства соотношений (10). Ясно, что будем иметь $\eta > 1$. Легко проверить, что при $H = H_1$ система (10) не совместима. Таким образом, поверхность может быть решением изопериметрической задачи только в том случае, если все выпуклые части этой поверхности имеют постоянную среднюю кривизну. Если для всех пар точек поверхности имеет место равенство $H=H_1$, то поверхность будет поверхностью постоянной средней кривизны. Но замкнутая выпуклая регулярная поверхность о постоянной средней кривизной - только сфера (/2/, стр. 2I3-2I7).

Теперь допустим, что на поверхности существует пара точек M и M_1, для которой $H>H_1$. Заменим данную поверхность новой поверхностью, которая получается от данной поверхности заменой вышеуказанных сегментов данной поверхности новыми сегментами. Если обозначить периметры данной и новой поверхностей через Ω и $\overset{*}{\Omega}$, а объемы тел, ограниченных этими поверхностями, через v и $\overset{*}{v}$ соответственно, то получим

$$\Omega-\overset{*}{\Omega}=(\omega-\overset{*}{\omega})-(\overset{*}{\omega}_1-\omega_1),$$
$$\overset{*}{v}-v=(\overset{*}{v}_1-v_1)-(v-\overset{*}{v}). \tag{I2}$$

В силу соотношений (9), будем иметь

$$\overset{*}{\Omega}=\Omega,\quad \overset{*}{v}>v. \tag{I3}$$

Таким образом, если H непостоянна, данную поверхность, с сохранением периметра, можно заменить новой замкнутой поверхностью, ограничивающей тело объемом большим, чем объем тела, ограниченного данной поверхностью, т.е. в этом случае данная поверхность не может быть решением изопериметрической задачи.

Таким образом, среди замкнутых поверхностей с данным периметром только сфера может быть решением изопериметрической задачи.

Примечание. При доказательстве мы потребовали от замкнутой поверхности положительность гауссовой кривизны (т.е. выпуклость поверхности), но от этого требования можно освободиться.

Теперь мы можем доказать, что существует решение изопериметрической задачи. Для этого рассмотрим множество выпуклых поверхностей с данным периметром Ω, которые одновременно замкнуты и регулярны. Это множество должно быть бесконечным и непрерывным, потому что данную поверхность можно непрерывно деформировать с сохранением выпуклости и периметра. Примером такого множества является множество поверхностей вращения, полученное вращением эллипсов вокруг своих больших осей, полуоси (т.е. a и b) которых удовлетворяют условиям

$$a^2 = \frac{\Omega \operatorname{tg} t}{\pi(2t + \sin 2t)}, \quad b = \frac{\Omega \sin 2t}{2\pi(2t + \sin 2t)},$$

где параметр t меняется в интервале $(0, \frac{\pi}{2})$. Ясно, что множество объемов тел, ограниченных множеством выпуклых поверхностей с данным периметром, будет также бесконечным и непрерывным множеством. Это множество будет ограничено сверху, так как объем любого замкнутого тела с периметром Ω удовлетворяет условию

$$v < d\,\Omega, \tag{14}$$

где d - минимальная ширина тела. Шириной тела в данном направлении называется расстояние между двумя плоскостями (перпендикулярными данному направлению), внутри которых заключено тело так, чтобы оно имело по крайней мере по одной общей точке с каждой из названных плоскостей. Как известно (по теореме Больцано), ограниченное сверху множество, имеет свою точную верхнюю границу.

Пусть V_0 - точная верхняя грань рассматриваемого множества. Тогда, в силу непрерывности множества, для всякого положительного ε будет существовать тело, объем которого удовлетворяет условию

$$V_0 - \varepsilon < V \leq V_0. \tag{15}$$

Пусть это тело ограничено поверхностью Γ. Эта поверхность должна быть очень близкой к сфере с периметром Ω. В противном случае мы могли бы так увеличить объем этого тела, с сохранением периметра, чтобы его объем вышел из интервала $(V_0 - \varepsilon,\ V_0)$. Действительно, пусть H и H_1 -максимум и минимум средней кривизны поверхности Γ, соответственно. Произведя вышеуказанные увеличения объема, будем иметь (см. формулы (5) и (8))

$$\overset{\alpha}{V} - V \approx \pi h^2 \left(\frac{\eta - 1}{\sqrt{K_1}} - \frac{1 - \xi}{\sqrt{K}} \right).$$

Положим $1 - \xi = \alpha$, где α - достаточно малое число. Тогда из соотношений (8) получим

$$\eta - 1 \approx \frac{H}{H_1}\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa}} \cdot \alpha .$$

Предыдущее равенство принимает вид

$$\overset{*}{V} - V \approx \frac{\pi h^2 \alpha}{\sqrt{\kappa}}\left(\frac{H}{H_1} - 1\right)$$

Если при уменьшении ε разность $H - H_1$ не стремится к нулю, то можно подобрать ε так, чтобы иметь[x)]

$$\varepsilon < \frac{\pi h^2 \alpha}{\sqrt{\kappa}}\left(\frac{H}{H_1} - 1\right).$$

Но это невозможно, потому что $\overset{*}{V} - V < \varepsilon$. Итак, поверхность Γ близка к сфере с периметром Ω. Следовательно:

$$\lim V = \frac{\Omega\sqrt{\Omega}}{6\sqrt{\pi}},$$

где $\frac{\Omega\sqrt{\Omega}}{6\sqrt{\pi}}$ - объем сферы с периметром Ω. Но, с другой стороны, $\lim V = V_0$, т.е.

$$V_0 = \frac{\Omega\sqrt{\Omega}}{6\sqrt{\pi}}.$$

---

x) В этом случае α находится в конечном (постоянном) интервале и не зависит от ε. То же самое можно сказать относительно h.

Таким образом, сфера и только сфера является решением изопериметрической задачи для поверхностей.

Примечание I. Хотя вышеприведенная операция увеличения объема с сохранением периметра нарушает выпуклость поверхности, но нетрудно поправить новую поверхность вдоль разреза сегментов таким образом, чтобы её выпуклость восстановилась без увеличения периметра и без уменьшения объема.

Примечание 2. Вышеприведенный метод (который можно назвать методом нивелирования) решений изопериметрической задачи для поверхностей можно применять для решения аналогичных задач на плоскости (изопериметрическая задача для линий) и в пространствах размерности > 3 (изопериметрическая задача для гиперповерхностей). Например, изопериметрическая задача для линий на плоскости формулируется так: найти среди замкнутых линий с данным периметром (равным длине всей линии) линию, которая ограничивает фигуру максимальной площади. Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, приводят нас к соотношениям, подобным соотношениям (I0), но здесь место средней кривизны занимает кривизна линий. Получается, что замкнутая линия может быть решением изопериметрической задачи только в том случае, когда её выпуклые части имеют постоянную кривизну. Если замкнутая линия имеет непрерывную кривизну всюду, то она будет линией постоянной кривизны, т.е. окружностью.

Рассмотренным выше методом можно решить такие задачи, в которых метод Штейнера не применим (/ I /, стр.58-99). Например, плоский сегмент с данным основанием и с данным периметром не подается изучению методом Штейнера, в то время как по нашему он имеет наибольшую площадь только тогда, когда криволинейная часть периметра есть дуга окружности. Аналогично, для пространственного сегмента кривая часть оболочки будет поверхностью постоянной средней кривизны.

Поступила 5.УI.1979 Кафедра алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

I. В.Бляшке. Круг и шар (перевод с немецкого), М., 1967.

2. В.Бляшке. Дифференциальная геометрия (перевод с немецкого), т.I, М., 1936.

ა.ჩახტაური

სფეროს იზოპერიმეტრული თვისების შესახებ

რეზიუმე

შრომაში ახალი ხერხით არის მიღებული სფეროს იზოპერიმეტრული თვისების დამტკიცება. ეს ხერხი გამოიყენება უფრო ზოგადი იზოპერიმეტრული ამოცანების შესასწავლადაც (სფეროს იზოპერიმეტრულ ამოცანასთან შედარებით).

A.Chakhtauri

ON THE ISOPERIMETRIC PROPERTY OF A SPHERE

Summary

The isoperimetric property of a sphere is proved by a new method. This method is applicable to the solution of more complex isoperimetric problems (as compared to the isoperimetric problem of a sphere).

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени

государственного университета

თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო

უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980.

УДК 517.9

О СЕТЯХ R И R_0.

З.А.Баркалая

Как известно, нелинейчатые проективно-деформируемые поверхности делятся на два класса: поверхности R и поверхности R_0. Для первого класса характерным является тот факт, что проективные инварианты поверхности β и γ (в асимптотических координатах), специальным подбором асимптотических параметров, удовлетворяют условию:

$$\beta_v = \gamma_u , \tag{a}$$

а для второго класса те же самые инварианты, подбором асимптотических параметров, удовлетворяют условию:

$$\beta = 1 , \quad \text{или} \quad \gamma = 1 . \tag{в}$$

Благодаря своим интересным свойствам поверхности R и R_0 стояли в центре внимания многих исследователей /I,2,3,4/.

В последнее время удалось определить характерные признаки упомянутых поверхностей в инвариантном тензорном виде /5, 6,7/.

Известно также, что так называемая внутренняя геометрия плоской асимптотической сети (центральной проекции сети асимптотических линий поверхности) и внутренняя геометрия поверхности одна и та же, но плоские сети не исчерпываются плоскими асимптотическими сетями. Каждая плоская сеть имеет свою внутреннюю геометрию, которая отражает внутреннюю геометрию поверхности в случае асимптотичности рассматриваемой плоской сети, т.е. теория плоских сетей представляется как своеобразное расширение теории поверхностей /I/.

Очевидно, что при центральном проектировании асимптотические сети поверхностей R и R_o образуют специальные асимптотические сети, для которых будут выполняться условия (а) и (в) соответственно. Естественно таким плоским сетям сохранить наименование классов соответствующих поверхностей, т.е. назвать сети R и R_o. Однако условия (а) и (в) будут характерными не только для плоских асимптотических сетей. И в общем случае их будем называть сетями R и R_o, а в случае асимптотичности эти последние представляют внутреннюю геометрию поверхностей R и R_o.

Таким образом, теория плоских сетей R и R_o представляется как своеобразное расширение теории поверхностей R и R_o, но здесь же следует заметить, что классы плоских сетей R и R_o не образуются проективной деформацией плоской сети, потому что произвольная плоская сеть деформируема. Но все-таки классы плоских сетей R и R_o связаны с проективной деформацией сети, именно такая классификация сетей инварианта относительно проективной деформации, т.е. сети R и R_o после проективной деформации опять остаются сетями R и R_o.

Характерные свойства поверхностей R и R_o легко переносятся на плоские асимптотические сети R и R_o. Но аналогичные свойства в неасимптотических сетях R и R_o должны быть найдены независимо, они не получаются из теории поверхностей. Более того, в теории поверхностей характерные свойства поверхностей R и R_o получаются из условий интегрируемости системы основных уравнений с дополнением условий деформации, состоящим в том, что фиксирован и тензор асимптотической поверхности и тензор Дарбу, а для остальных величин требуется возможность различных решений /6/. Такая последовательность рассуждения в теории плоских сетей не дает никаких классов, так как тензор сети и тензор Дарбу, которые удовлетворяют условиям интегрируемости системы основных уравнений, не могут определить однозначно плоскую сеть никогда. Здесь к условиям интегрируемости системы основных уравнений добавляются условия (а) и (в) соответственно и требуется их инвариантное представление.

Эта работа посвящается составлению характерных дифференциальных соотношений для сетей R и R_o, а в следующей работе будут найдены характерные признаки /критерии/ этих сетей.

Предположим, что на проективной плоскости определена некоторая криволинейная система координат u^1, u^2 таким образом, что текущие координаты точки x^1, x^2, x^3 являются известными функциями этих параметров

$$x^\alpha = x^\alpha(u^1, u^2), \tag{I}$$

где $\alpha = 1,2,3$.

Произвольный невырожденный тензор

$$a_{ij} = a_{ij}(u^1, u^2), \tag{2}$$

где $i, j = 1,2$, определяет сеть линий с помощью следующего дифференциального уравнения:

$$a_{ij}\, du^i du^j = 0, \tag{3}$$

и обратно, произвольная сеть на плоскости (две системы кривых одного параметра) связывается с уравнением вида (3), т.е. с некоторым тензором второго ранга, но следует помнить, что с помощью данного тензора сеть определяется однозначно, а сетью соответствующий тензор определяется до произвольного множителя.

Из уравнения (3) определяются две системы решений (зависимости между параметрами u^1 и u^2):

$$\left.\begin{aligned} f_1(u^1, u^2, c_1) = 0, \\ f_2(u^1, u^2, c_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти уравнения, совместно с уравнением (I), определяют соответствующую сеть линий. Таким образом, характер сети линий зависит одновременно от уравнений (I) и (3), т.е. от функций

$$x^\alpha(u^1, u^2) \quad \text{и} \quad a_{ij}(u^1, u^2).$$

Если линии сети (3) принять за координатные линии, то функции $x^\alpha(u^1, u^2)$ и $a_{ij}(u^1, u^2)$ изменит вид и будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} {}'x^\alpha &= {}'x^\alpha({}'u^1, {}'u^2), \\ {}'a_{ij} &= {}'a_{ij}({}'u^1, {}'u^2). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В этом случае уравнению сети линий

$${}'a_{ij}\, d'u^1 d'u^2 = 0$$

должны удовлетворять решения ${}'u^1 = const$, ${}'u^2 = const$.

Это будет в том случае, когда коэффициенты ${}'a_{ij}$ удовлетворят условиям:

$${}'a_{11} = 0, \quad {}'a_{22} = 0.$$

При дальнейшем исчислении, в случае надобности, будем полагать, что рассматриваемая сеть линий с самого начала принимается за координатную сеть, т.е. будем пользоваться предположением:

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{12} \neq 0. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial u^i} = \partial_i x^\alpha, \qquad \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial u^i \partial u^j} = \partial_{ij} x^\alpha.$$

Точки $\partial_1 x^\alpha$ и $\partial_2 x^\alpha$ лежат на касательных прямых координатных линий соответственно, и так как сеть не вырожденная, т.е.

$$|a_{ij}| = \mathcal{D}_{et}\,(a_{ij}) \neq 0,$$

касательные прямые линии сети в точках x^α не сливаются между собою. Таким образом, точки x^α, $\partial_1 x^\alpha$, $\partial_2 x^\alpha$ не будут коллинеарными (они образуют треугольник).

Примем эти точки за базисную систему и определим в этой системе точки $\partial_{ij} x^\alpha$, получим:

$$\partial_{ij} x^\alpha = \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}\, \partial_m x^\alpha + \overset{\circ}{P}_{ij}\, x^\alpha, \tag{7}$$

где $\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}$ являются коэффициентами афинной связности, а $\overset{\circ}{P}_{ij}$ - тензор второго ранга. Эти величины удовлетворяют условиям интегрируемости системы (7), которые выражаются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\circ}{R}_{ij} &= -\overset{\circ}{P}_{ij}, \\ \overset{\circ}{\nabla}_{[k}\, \overset{\circ}{P}_{j]i} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\overset{\circ}{R}_{ij}$ есть тензор Риччи, составленный коэффициентами афинной связности.

Известно, что прямая Лапласа сети определяется следующими точками:

$$y_i = \partial_i x^\alpha + \frac{1}{2} t_i\, x^\alpha, \tag{9}$$

где

$$t_i = \frac{1}{2}\tilde{a}^{ks}(\overset{\circ}{\nabla}_k a_{si} - \overset{\circ}{\nabla}_i a_{ks}). \qquad (I0)$$

Здесь оператор абсолютного дифференцирования $\overset{\circ}{\nabla}_i$ составлен по связности $\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}$. Легко проверить, что в сетевой системе координат (т.е. когда данная сеть принимается за координатную сеть) будут иметь место равенства:

$$t_1 = -2\overset{\circ}{\Gamma}{}^2_{12}, \quad t_2 = -2\overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{12}. \qquad (II)$$

Теперь примем за новую базисную систему точки x^α, y_1^α, y_2^α и определим точки $\partial_i y^\alpha$ в этой системе. Будем иметь:

$$\partial_i y^\alpha = \ell_j y_i^\alpha + \Gamma^m_{ij} y_m^\alpha + P^m_{ij}, \qquad (12)$$

где ℓ_i есть нормализатор прямой Лапласа, т.е.

$$y_i^\alpha = \partial_i x^\alpha - \ell_i x^\alpha, \qquad (I3)$$

Γ^m_{ij} - коэффициенты афинной связности, а P_{ij} - тензор второго ранга.

Величины Γ^m_{ij} и P_{ij} не зависят от перенормирования проективных координат точки. Эти величины удовлетворяют условиям интегрируемости системы (I2), которые выражаются так:

$$\left.\begin{aligned} R_{ij} &= P_{ij} - 2P_{ji}, \\ \nabla_{[k} P_{j]i} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (\text{I4})$$

где R_{ij} – тензор Риччи относительно связности Γ^m_{ij}.

Если подставить в (I2) системе уравнений значение из формулы (9), получим зависимость между Γ^m_{ij} и $\overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij}$:

$$\Gamma^m_{ij} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^m_{ij} + \frac{1}{2}\left(t_i \delta^m_j + t_j \delta^m_i\right). \qquad (\text{I5})$$

В сетевых координатах, в силу формулы (9), имеем:

$$\Gamma^1_{12} = 0, \quad \Gamma^2_{12} = 0. \qquad (\text{I6})$$

Обозначим через ∇_i оператор абсолютного дифференцирования относительно связности Γ^m_{ij} и вычислим выражение (тензор Чебышева данной сети относительно связности Γ^m_{ij}) / 4 /

$$T_i = \frac{1}{2}\tilde{a}^{ks}\left(2\nabla_k a_{si} - \nabla_i a_{ks}\right). \qquad (\text{I7})$$

В сетевых координатах, аналогично формулам (II), получим:

$$T_1 = -2\Gamma^2_{12}, \quad T_2 = -2\Gamma^1_{12},$$

а если примем во внимание и формулу (16) (т.е. y^α_1 y^α_2 рассмотрим на прямой Лапласа), то получим:

$$T_i = 0, \quad \text{или}$$

$$\tilde{a}^{ks}(2\nabla_k a_{si} - \nabla_i a_{ks}) = 0. \tag{18}$$

Это условие указывает на то, что оператор ∇_i связан с нормализацией Лапласа.

Заметим, что в силу формулы (15)

$$\Gamma^1_{11} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{11}, \quad \Gamma^1_{22} = \overset{\circ}{\Gamma}{}^1_{22}.$$

Таким образом, величины Γ^2_{11} и Γ^1_{22} не зависят от нормализации плоскости. Эти величины в классической дифференциальной геометрии /1,3/ обозначены через β и γ соответственно и представляют основные инварианты, которые упомянуты в начале настоящей работы.

Итак, следует помнить, что в сетевых координатах

$$\beta = \Gamma^2_{11}, \quad \gamma = \Gamma^1_{22}. \tag{19}$$

Введем обозначение:

$$\mathcal{D}_{kij} = \nabla_k a_{ij} - h_k a_{ij}, \tag{20}$$

где

$$h_i = \frac{1}{2}\tilde{a}^{ks}\nabla_i a_{ks}. \tag{21}$$

Легко показать, что тензор $\mathcal{D}_{kij}$ симметричен относительно каждой пары индексов, а это значит, что тензор $\mathcal{D}_{kij}$ будет иметь только 4 компонента, отличных друг от друга, эти компоненты суть: $\mathcal{D}_{111}$, $\mathcal{D}_{222}$, $\mathcal{D}_{112}$, $\mathcal{D}_{122}$.

В сетевых координатах, используя равенства (I6),(20),(2I), легко получим:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{D}_{111}=-2\Gamma^2_{11}a_{12},\ \mathcal{D}_{222}=-2\Gamma^1_{22}a_{12},\\ &\mathcal{D}_{112}=0,\quad \mathcal{D}_{122}=0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

По этим условиям дифференциальное уравнение

$$\mathcal{D}_{kij}\,du^i du^j du^k=0 \tag{23}$$

примет следующий вид:

$$\Gamma^2_{11}(du^1)^3+\Gamma^1_{22}(du^2)^3=0,$$

или в силу зависимостей (I9) (если обозначить $u^1=u$, $u^2=v$)

$$\beta(du)^3+\gamma(dv)^3=0.$$

Но это уравнение есть дифференциальное уравнение линии Дарбу для данной плоской сети.

Таким образом, уравнение (23) представляет дифференциальное уравнение линий Дарбу, поэтому тензор $\mathcal{D}_{kij}$ называется <u>тензором Дарбу</u> плоской сети.

Что касается тензора h_i, то в сетевых координатах он представляется в виде:

$$h_i = \partial_i \lg |a_{12}| - \Gamma^k_{ik}. \tag{24}$$

Рассмотрим выражение

$$J = \frac{1}{8} \tilde{a}^{ij} \tilde{a}^{kj} \tilde{a}^{mn} \mathcal{D}_{ikm} \mathcal{D}_{jsn}, \tag{25}$$

которое называется инвариантом Пика /I/.

В сетевых координатах будем иметь:

$$J = \frac{\Gamma^2_{11} \Gamma^1_{22}}{a_{12}}. \tag{26}$$

Если произвести перенормирование координат точки и одновременно взять тем же нормирующим множителем тензор сети a_{ij} (нормирование которого зависит от нас), величина J выразится формулой:

$$\bar{J} = \frac{J}{\rho},$$

где ρ - нормирующий множитель.[x] Если подставить $\rho = J$, то будем иметь $\bar{J}$ = I. Таким образом, нормированием проективных координат точки и соответственным нормированием тензора сети инвариант J можем приравнять единице. В дальнейшем, где это понадобится, будем предполагать, что такое нормирование было выбрано с самого начала, и можно писать J = I. В этом случае, в силу формулы (26) будем иметь:

$$\Gamma^2_{11} \Gamma^1_{22} = a_{12}. \tag{27}$$

---

x Так как Γ^2_{11} и Γ^1_{22} не зависят от нормализации точки, поэтому, в силу формулы (26), преобразование инварианта J зависит только от нормирования тензора a_{ij}. Но в теории поверхностей сам a_{ij} тензор зависит от нормирования точки, поэтому и здесь упоминаем об этом.

Из обозначений (20) и (2I), как следствие, легко получится (умножением равенства (20) на $\tilde{a}^{ij}$)

$$\tilde{a}^{ij}\mathcal{D}_{kij}=0. \tag{28}$$

Это условие называется условием <u>аполарности</u> тензоров a_{ij} и $\mathcal{D}_{kij}$.

Очевидно, это условие не зависит от нормирования a_{ij} тензора, оно всегда выполняется.

Ниже нам часто понадобятся компоненты тензора R_{ij}, которые легко вычисляются по соответствующей формуле

$$R_{ij}=\partial_k\Gamma^k_{ji}-\partial_j\Gamma^k_{ki}+\Gamma^k_{sk}\Gamma^s_{ji}-\Gamma^k_{sj}\Gamma^s_{ki}.$$

В сетевых координатах, с учетом уоловий (I6), получим:

$$\left.\begin{aligned}
R_{11}&=\partial_2\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{22}\Gamma^2_{11},\\
R_{22}&=\partial_1\Gamma^1_{22}+\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22},\\
-R_{12}&=\partial_2\Gamma^1_{11}+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22},\\
-R_{21}&=\partial_1\Gamma^2_{22}+\Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22}.
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Здесь же заметим, что для асимптотичности плоской сети (чтобы она представляла асимптотическую сеть некоторой поверхности) характерна симметричность тензора R_{ij} /I,9/.

Наконец, упомянем еще один тензор, который часто встречается в дальнейших вычислениях. Он определяется формулой

$$\tau_i=\frac{1}{2J}R^{ks}\mathcal{D}_{iks}, \tag{30}$$

где $R^{ks}=\tilde{\varepsilon}^{ki}\tilde{\varepsilon}^{sj}R_{ij}$ (ε_{ij} – дискриминатный тензор от тензора a_{ij}).

В асимптотических координатах компоненты этого тензора выражаются так:

$$\left.\begin{aligned} -\tau_1 = \frac{R_{22}}{\Gamma^1_{22}} = \partial_1 \lg \Gamma^1_{22} + \Gamma^1_{11}, \\ -\tau_2 = \frac{R_{11}}{\Gamma^2_{11}} = \partial_2 \lg \Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{22}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Этот тензор замечателен тем, что точки

$$z^\alpha_i = y^\alpha_i + \frac{1}{2}\tau_i x^\alpha$$

определяют директриссу Вильчинского плоской сети в точке x^α /8/.

<u>Определение</u>. Плоская сеть называется сетью R, если в сетевых координатах существуют такие криволинейные параметры, что компоненты афинной связности Γ^2_{11} и Γ^1_{22}, связанные с сетью, удовлетворяют условию

$$\partial_1 \Gamma^1_{22} = \partial_2 \Gamma^2_{11}. \tag{32}$$

Если вспомнить формулы (19) и обозначить $u^1 = u$, $u^2 = v$, тогда равенство (32) превратится в равенство (а) введения.

Таким образом, это определение согласовано с понятием поверхности R.

Если вместе с тем сеть R есть асимптотическая, то тогда она представится как центральная проекция асимптотической сети такой поверхности, для которой выполняется условие (а), а это означает, что <u>плоская асимптотическая сеть R представляет центральную проекцию асимптотической сети поверхности R</u>.

Теперь предположим, что уравнение (2), совместно со следующими уравнениями:

$$x^{\alpha} = x^{\alpha}(u^1, u^2),$$
$$\overset{*}{x}{}^{\alpha} = \overset{*}{x}{}^{\alpha}(u^1, u^2),$$

определяет сети, связанные между собою проективной деформацией. В этом случае связности Γ^m_{ij} и $\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij}$, связанные с сетями, удовлетворяют условию /9/.

$$\overset{*}{\Gamma}{}^m_{ij} = \Gamma^m_{ij} + \lambda_{(i}\delta^m_{j)} + \mu^m a_{ij},$$

что в сетевых координатах дает:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^2_{11} = \Gamma^2_{11}, \quad \overset{*}{\Gamma}{}^1_{22} = \Gamma^1_{22}.$$

По этим равенствам из (32) условия получим:

$$\partial_2 \overset{*}{\Gamma}{}^2_{11} = \partial_1 \overset{*}{\Gamma}{}^1_{22},$$

а это означает, что и вторая сеть есть сеть R.

Итак, можем сделать следующее <u>заключение</u>: произвольная проективная деформация сети R переводит в сети R.

Как видно из определения, плоская сеть R охарактеризована общими условиями интегрируемости основных уравнений и условием (32).

Теперь главное — записать эти условия (особенно условие (32)) в инвариантном виде. Но это очень трудно, для подтверждения этого достаточно вспомнить, что аналогичный вопрос долгое время не разрабатывался в теории поверхностей. Задачей первого этапа данной работы является составление в тензорном виде той системы уравнений, условия интегрируемости которой должны дать ответ на поставленную задачу.

Здесь мы приводим первую часть поставленной задачи (составление системы), а вторая часть (нахождение условий интегрируемости) будет проделана в следующей работе.

Рассмотрим коэффициенты связности $\overset{\vee}{\Gamma}{}^m_{ij}$, определенные следующим уравнением (здесь подразумевается такое нормирование тензора a_{ij}, что $J = 1$):

$$\overset{\vee}{\nabla}_k a_{ij} = -\omega_k a_{ij}, \tag{33}$$

где

$$\omega_k = \tau_k - h_k. \tag{34}$$

Из (33) находится $\overset{\vee}{\Gamma}{}^m_{ij}$ и будем иметь:

$$\overset{\vee}{\Gamma}{}^m_{ij} = \left\{ {m \atop ij} \right\}_a + \frac{1}{2}\left[\omega_i \delta^m_j + \omega_j \delta^m_i - \tilde{a}^{ms}\omega_s a_{ij}\right]. \tag{35}$$

Определим симметричный тензор φ_{ij} следующими условиями:

$$\tilde{a}^{ij}\varphi_{ij} = 0, \quad \overset{\vee}{\nabla}_{[k}\varphi_{j]i} = 0. \tag{36}$$

По формулам (35) легко проверить, что в сетевых координатах

$$\left.\begin{aligned} &\check{\Gamma}^{2}_{11}=0, \quad \check{\Gamma}^{1}_{22}=0, \\ &\check{\Gamma}^{1}_{12}=0, \quad \check{\Gamma}^{2}_{12}=0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Согласно этим условиям, уравнения (36) дают:

$$\varphi_{12}=0, \quad \partial_1 \varphi_{22}=0, \quad \partial_2 \varphi_{11}=0. \tag{38}$$

Отсюда $\varphi_{11}=f(u^1)$, $\varphi_{22}=\psi(u^2)$, где функции $f(u^1)$ и $\psi(u^2)$ совершенно произвольные и для каждого выбора их существуют криволинейные параметры, так, чтобы $\varphi_{11}=1$ и $\varphi_{22}=1$. Таким образом, тензор φ_{ij}, удовлетворяющий уравнениям (38) в сетевых координатах, представится так (подбором параметров):

$$\varphi_{12}=0, \quad \varphi_{11}=\varphi_{22}=1. \tag{39}$$

Вычислим выражение:

$$\check{\nabla}_k \varphi_{ij}=\partial_k \varphi_{ij}-\check{\Gamma}^{m}_{ki}\varphi_{mj}-\check{\Gamma}^{m}_{kj}\varphi_{im}.$$

По формулам (24) и (26) в сетевых координатах будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} &\check{\nabla}_1 \varphi_{11}=-2\check{\Gamma}^{1}_{11}, \quad \check{\nabla}_2 \varphi_{22}=-2\check{\Gamma}^{2}_{22}, \\ &\check{\nabla}_1 \varphi_{12}=0, \quad \check{\nabla}_2 \varphi_{12}=0, \\ &\check{\nabla}_1 \varphi_{22}=0, \quad \check{\nabla}_2 \varphi_{11}=0. \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

По формуле (35) в сетевых координатах будем иметь (с учетом равенства (33)):

$$\left.\begin{aligned} \check{\Gamma}^1_{11} &= \left\{ {1 \atop 11} \right\}_a + \tau_1 - h_1 , \\ \check{\Gamma}^2_{22} &= \left\{ {2 \atop 22} \right\}_a + \tau_2 - h_2 . \end{aligned}\right\} \quad (41)$$

С другой стороны,

$$\left\{ {1 \atop 11} \right\}_a = \frac{1}{2} \tilde{a}^{12}\, 2\, \partial_1 a_{12} = \partial_1 \lg a_{12} ,$$

$$\left\{ {2 \atop 22} \right\}_a = \frac{1}{2} \tilde{a}^{12}\, 2\, \partial_2 a_{12} = \partial_2 \lg a_{12} .$$

Согласно формуле (24)

$$\partial_1 \lg a_{12} = h_1 + \Gamma^1_{11} ,$$

$$\partial_2 \lg a_{12} = h_2 + \Gamma^1_{22} ,$$

т.е.

$$\left.\begin{aligned} \left\{ {1 \atop 11} \right\}_a &= h_1 + \Gamma^1_{11} , \\ \left\{ {2 \atop 22} \right\}_a &= h_2 + \Gamma^2_{22} . \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Сравнение формул (4I) и (42) дает:

$$\check{\Gamma}^1_{11} = \Gamma^1_{11} + \tau_1 ,$$

$$\check{\Gamma}^2_{22} = \Gamma^2_{22} + \tau_2 ,$$

а последние формулы, согласно формуле (3I), примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\vee}{\Gamma}{}^{1}_{11} &= -\partial_1 \lg \Gamma^{1}_{22}, \\ \Gamma^{2}_{22} &= -\partial_2 \lg \Gamma^{2}_{11}. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Из этих формул легко получить зависимость:

$$\Gamma^{1}_{22}\overset{\vee}{\Gamma}{}^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{11}\overset{\vee}{\Gamma}{}^{2}_{22} = \partial_2 \Gamma^{2}_{11} - \partial_1 \Gamma^{1}_{22}. \tag{44}$$

Если сеть есть сеть R , т.е. удовлетворяется условие (32), тогда будем иметь:

$$\Gamma^{11}_{22}\overset{\vee}{\Gamma}{}^{1}_{11} - \Gamma^{2}_{11}\overset{\vee}{\Gamma}{}^{2}_{22} = 0. \tag{45}$$

Это условие можно переписать так:

$$\frac{\overset{\vee}{\Gamma}{}^{1}_{11}}{\Gamma^{2}_{11}} = \frac{\overset{\vee}{\Gamma}{}^{2}_{22}}{\Gamma^{1}_{22}}.$$

В данном случае произвольные функции $f(u^1)$, $\psi(u^2)$ будут выбраны так, чтобы иметь $\varphi_{11} = 1$, $\varphi_{22} = 1$, как раз для тех параметров, которые соответствуют равенствам (22).

Применение последнего равенства, равенства (22) и (40) дает:

$$\overset{\vee}{\nabla}_k \varphi_{ij} = \alpha \mathcal{D}_{kij}. \tag{46}$$

Таким образом, для того чтобы данная сеть (определенная тензором a_{ij}) была сетью R, необходимо чтобы система

$$\tilde{a}^{ij}\varphi_{ij} = 0, \quad \overset{\vee}{\nabla}_k \varphi_{ij} = \alpha \mathcal{D}_{kij} \tag{47}$$

была совместной (здесь неизвестные φ_{ij} и α) при $\varphi_{ij} \neq 0$.

Заметим, что эта система эквивалентна следующей системе при $\alpha \neq 0$ (которая получается альтернацией и исключением α):

$$\tilde{a}^{ij}\varphi_{ij}=0, \quad \check{\nabla}_{[k}\varphi_{i]j}=0, \quad \mathcal{D}^{kij}\check{\nabla}_{k}\varphi_{ij}=0. \tag{47}$$

Теперь докажем достаточность условий (47). Из этих условий, в силу симметричности тензора $\mathcal{D}_{kij}$ легко получить условия (36), откуда вытекают условия (38).

Эти условия дают:

$$\varphi_{12}=0, \; \varphi_{11}=f(u^1), \; \varphi_{22}=\psi(u^2), \tag{48}$$

где $f(u^1)$ и $\psi(u^2)$ - произвольные функции.

Мы можем произвести такую замену криволинейных параметров, чтобы иметь в новых параметрах для каждого выбора функции

$$\bar{\varphi}_{12}=0, \quad \bar{\varphi}_{11}=1, \quad \bar{\varphi}_{22}=1, \tag{49}$$

или

$$\bar{\varphi}_{12}=0, \quad \bar{\varphi}_{11}=0, \quad \bar{\varphi}_{22}=1, \tag{50}$$

или

$$\bar{\varphi}_{12}=0, \quad \bar{\varphi}_{11}=0, \quad \bar{\varphi}_{22}=0. \tag{51}$$

В первом случае мы получим (в сетевых координатах)

$$\left.\begin{aligned} \overset{\vee}{\nabla}_1 \bar{\varphi}_{11} &= \alpha \mathcal{D}_{111} = -\alpha 2 \bar{\Gamma}^2_{11} \bar{a}_{12}, \\ \overset{\vee}{\nabla}_2 \bar{\varphi}_{22} &= \alpha \mathcal{D}_{222} = -\alpha 2 \bar{\Gamma}^1_{22} \bar{a}_{12}. \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

С другой стороны,

$$\left.\begin{aligned} \overset{\vee}{\nabla}_1 \bar{\varphi}_{11} &= -2 \overset{\vee}{\bar{\Gamma}}{}^1_{11}, \\ \overset{\vee}{\nabla}_2 \bar{\varphi}_{22} &= -2 \overset{\vee}{\bar{\Gamma}}{}^2_{22}. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Равенства (52) и (53) дают:

$$\bar{\Gamma}^2_{11} \overset{\vee}{\bar{\Gamma}}{}^2_{22} - \bar{\Gamma}^1_{22} \overset{\vee}{\bar{\Gamma}}{}^1_{11} = 0. \quad (54)$$

Но аналогично формуле (44)

$$\bar{\Gamma}^2_{11} \overset{\vee}{\bar{\Gamma}}{}^2_{22} - \bar{\Gamma}^1_{22} \overset{\vee}{\bar{\Gamma}}{}^1_{11} = \partial_2 \bar{\Gamma}^2_{11} - \partial_1 \bar{\Gamma}^1_{22}.$$

Таким образом, будем иметь:

$$\partial_2 \bar{\Gamma}^2_{11} - \partial_1 \bar{\Gamma}^1_{22} = 0, \quad (55)$$

а это значит, что данная сеть в первом случае есть сеть R. Если вместе с условием совместности системы уравнений (47) потребовать невырождаемость тензора φ_{ij}, т.е. ограничить тензор условием

$$\mathcal{D}_{et}(\varphi_{ij}) \neq 0, \quad (56)$$

тогда эти условия будут необходимыми и достаточными для сети R. Таким образом, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема I. Для того чтобы плоская сеть была сетью R, необходимо и достаточно, чтобы система (47) определяла невырождаемый тензор φ_{ij}.

Заметим, что при условии (50) $|\varphi_{ij}|=0$. Этот случай будет рассмотрен ниже, а случай (5I) вообще исключен.

Определение. Плоская сеть кривых называется сетью R_o, если компоненты Γ^2_{11} и Γ^1_{22} в сетевых координатах удовлетворяют условию

$$\partial_2 \Gamma^2_{11} = 0, \quad \text{или} \quad \partial_1 \Gamma^1_{22} = 0, \tag{57}$$

отсюда $\Gamma^2_{11} = f(u^1)$, или $\Gamma^1_{22} = \psi(u^2)$, где $f(u^1)$ и $\psi(u^2)$ - произвольные. В этом случае возможно подобрать криволинейные параметры так, чтобы иметь (для каждого выбора f и ψ):

$$\Gamma^2_{11} = 1 \quad \text{или} \quad \Gamma^1_{22} = 1. \tag{58}$$

Если принять во внимание равенства (I9), тогда условия (58) превращаются в условия (в) введения (т.е. определение сети R_o согласовано с понятием поверхности R_o).

В том случае, когда сеть R_o одновременно асимптотическая, тогда она представится в виде центральной проекции асимптотической сети такой поверхности, для которой выполняется условие (в) введения, т.е. плоская асимптотическая сеть представляется как центральная проекция на плоскости асимптотической сети поверхности R_0.

Очевидно, что для асимптотической сети R_0 прямо переносятся характерные свойства поверхности R_0 и обратно. Но для неасимптотической сети R_0 характерные условия должны быть определены независимо, они не получаются непосредственно из теории поверхностей. Так как в условиях (58) два указанных случая эквивалентны между собой с точки зрения проведения вычислений, поэтому подробно рассмотрим только один случай, например, первый, т.е.

$$\Gamma^2_{11} = 1. \qquad (59)$$

Это осуществляется выбором одного параметра (u^1) или выбором одной функции $f(u^1)$, другой параметр (u^2) пока остается произвольным. Очевидно подразумевается, что с самого начала $\Gamma^2_{11} \neq 0$, т.е. данная сеть не является полугеодезической (тем более и геодезической).

Так как формулы (43) были установлены для произвольной неполугеодезической (и тем более негеодезической) сети, поэтому и для сети R_0 эти равенства справедливы.

Согласно равенства (59) эти условия (равенство второе) дают:

$$\overset{v}{\Gamma}{}^2_{22} = 0. \qquad (60)$$

Рассмотрим тензор $\mathcal{S}_{ij}$, определенный следующими уравнениями:

$$\tilde{a}^{ij}\varphi_{ij}=0,\quad \overset{\vee}{\nabla}_{[k}\varphi_{i]j}=0,\quad |\varphi_{ij}|=0. \tag{61}$$

В сетевых координатах будем иметь:

$$\varphi_{12}=0,\quad \partial_2\varphi_{11}=0,\quad \partial_1\varphi_{22}=0,\quad \varphi_{11}\varphi_{22}=0.$$

Из этого возьмем такой вариант:

$$\varphi_{12}=0,\quad \varphi_{11}=0,\quad \partial_1\varphi_{22}=0.$$

Отсюда следует $\varphi_{22}=\psi(u^2)$, где $\psi(u^2)$ – произвольная функция и ее можно подобрать так, чтобы иметь (для данного выбора параметров):

$$\varphi_{12}=0,\quad \varphi_{11}=0,\quad \varphi_{22}=1. \tag{62}$$

Это осуществляется выбором функции $\psi(u^2)$ или самого параметра u^2. Таким образом, условия (59) и (62) имеют место одновременно.

Применяя условия (37), (60) и (62), легко получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{\vee}{\nabla}_1\varphi_{11}=-2\overset{\vee}{\Gamma}{}^1_{11}\varphi_{11}=0,\\
&\overset{\vee}{\nabla}_2\varphi_{22}=-2\overset{\vee}{\Gamma}{}^2_{22}\varphi_{22}=0,\\
&\overset{\vee}{\nabla}_1\varphi_{22}=-2\overset{\vee}{\Gamma}{}^2_{12}\varphi_{22}=0,\\
&\overset{\vee}{\nabla}_2\varphi_{11}=-2\overset{\vee}{\Gamma}{}^2_{12}\varphi_{11}=0,\\
&\overset{\vee}{\nabla}_1\varphi_{12}=-\overset{\vee}{\Gamma}{}^2_{11}\varphi_{22}-\overset{\vee}{\Gamma}{}^1_{12}\varphi_{11}=0,\\
&\overset{\vee}{\nabla}_2\varphi_{12}=-\overset{\vee}{\Gamma}{}^2_{21}\varphi_{22}-\overset{\vee}{\Gamma}{}^1_{22}\varphi_{11}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Таким образом,

$$\check{\nabla}_k \varphi_{ij} = 0.$$

Итак, для сети R_o характерными необходимыми условиями являются условия совместности системы:

$$\tilde{a}^{ij} \varphi_{ij} = 0, \quad |\varphi_{ij}| = 0, \quad \check{\nabla}_k \varphi_{ij} = 0. \tag{64}$$

Мы докажем, что эти условия, вместе с условиями интегрируемости системы основных уравнений, будут достаточными условиями. В самом деле, предположим, что система (64) совместна. Тогда тензор φ_{ij} (подразумевается решение, отличное от нуля) в сетевых координатах, соответствующим подбором криволинейных параметров, представится в виде

$$\varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{11} = 0, \quad \varphi_{22} = 1,$$

или

$$\varphi_{12} = 0, \quad \varphi_{22} = 0, \quad \varphi_{11} = 1. \tag{65}$$

В сетевых координатах из системы (64) получаются равенства (63), а эти последние в условиях (62) вместе дают $\check{\Gamma}^2_{22} = 0$, а в условиях (65) – $\bar{\Gamma}^1_{11} = 0$. Эти равенства же вместе с формулами (43) дают соответственно:

$$\partial_2 \Gamma^2_{11} = 0 \quad \text{и} \quad \partial_1 \Gamma^1_{22} = 0.$$

Как мы знаем, эти равенства, каждое в отдельности, соответствуют сети R_0. Итак, можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 2. Для того чтобы плоская сеть была сетью R_0 необходимо и достаточно, чтобы внутренняя геометрия сети в конфигурации Лапласа, кроме общих условий интегрируемости, удовлетворяла бы условиям интегрируемости системы (64).

Примечание. Мы упустили из виду тот случай, когда Γ^2_{11} и Γ^1_{22}, в сетевых координатах, удовлетворяют одновременно условиям:

$$\partial_2 \Gamma^2_{11} = 0, \quad \partial_1 \Gamma^1_{22} = 0. \tag{66}$$

В этом случае возможно так подобрать криволинейные параметры, чтобы иметь:

$$\Gamma^2_{11} = 1, \quad \Gamma^1_{22} = 1. \tag{67}$$

Так как в этом случае Γ^2_{11} и Γ^1_{22} удовлетворяют условию (32), поэтому соответствующая сеть будет сеть R.

В этом случае из формулы (43) получим:

$$\check{\Gamma}^1_{11} = 0, \quad \check{\Gamma}^2_{22} = 0.$$

Если для φ_{ij} взять вариант, данный формулами (39), тогда последние равенства, согласно (40), дают:

$$\check{\nabla}_k \varphi_{ij} = 0. \tag{68}$$

Таким образом, последнее уравнение, с условием $|\varphi_{ij}| \neq 0$, определяет специальный класс сетей R. Для этой сети характерным является тот факт, что её канонические прямые совпадают между собою и ее называют сетью совпадения. Когда эта сеть и асимптотическая, тогда она представится как центральная проекция на плоскости асимптотической сети поверхности совпадения.

Здесь же заметим, что система (68) есть частный случай системы (47), именно тот случай, когда система (47) имеет решение $\alpha = 0$ и $|\varphi_{ij}| \neq 0$.

Поступила 18.IX.1977

Грузинский политехнический институт им. В.И.Ленина

ЛИТЕРАТУРА

1. C.Fubini et E.Čech, Introduction à la Géometrie projective differentielle des surfaces, Paris, 1930.

2. E.Cartan, Sur la deformations projective des surfaces. C.R. 170, 171, 1920.

3. А.Фиников. Проективно-дифференциальная геометрия, М.-Л., 1937.

4. А.П.Норден. Пространства афинной связности, М., 1963.

5. В.И.Шуликовский. Проективная теория сетей, Казань, 1964.

6. А.И.Чахтаури. О проективно-деформируемых поверхностях, Труды Тбилисского университета, т.129, 1968.

7. Г.Н.Тевзадзе. О некоторых сетях на поверхности проективного пространства, Труды Тбилисского университета, т.129, 1968.

8. А.И.Чахтаури. Внутренние геометрии плоских сетей, Труды Тбилисского математического института АН ГССР, т.ХУ,1947.

9. А.И.Чахтаури. Применение внутренней геометрии плоских сетей в теории поверхностей, Труды Тбилисского математического института АН ГССР, т.ХХ, 1954.

გ.ბარკალაია

R და R_0 ბადეების შესახებ

რეზიუმე

ნაშრომში შესწავლილია პროექციულად დეფორმად ზედაპირთა, ე.ი. R და R_0, შინაგანი გეომეტრიის ანალოგიური შინაგანი გეომეტრიის მქონე ბრტყელი ბადეები, განხილულია მათი დამახასიათებელი დიფერენციალური განტოლებები

$$\tilde{a}^{ij}\varphi_{ij}=0,\ \check{\nabla}_k\varphi_{ij}=\alpha\mathcal{D}_{kij},\ |\varphi_{ij}|\neq 0$$

(R ბადისათვის) და

$$\tilde{a}^{ij}\varphi_{ij}=0,\ \check{\nabla}_k\varphi_{ij}=0,\ |\varphi_{ij}|=0$$

(R_0 ბადისათვის).

Z. Barkalaia

CONCERNING R AND R_0 NETS

Summary

Plane nets having the inner geometry analogous to the geometry of projective-deformable surfaces, i.e. R u R_0, are studied.

Characteristic differential equations for the R net are derived:

$$\tilde{a}^{ij}\varphi_{ij}=0, \quad \check{\nabla}_k \varphi_{ij}=\alpha \mathcal{D}_{kij}, \quad |\varphi_{ij}|\neq 0,$$

as well as for the R_0 net

$$\tilde{a}^{ij}\varphi_{ij}=0, \quad \check{\nabla}_k \varphi_{ij}=0, \quad |\varphi_{ij}|=0.$$

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

214, 1980

УДК 511.4

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ, III

Л. А. Сулаквелидзе

Предлагаемая работа является непосредственным продолжением предыдущих одноименных работ / 4, 5 / и в ней будут сохранены все прежние обозначения. В настоящей, завершающей части, будут выведены формулы для числа представлений натуральных чисел конкретными тернарными квадратичными формами, принадлежащими как одноклассным, так и многоклассным родам.

§ 1. В настоящем параграфе выводятся некоторые соотношения для функций $\Psi(\tau, \omega; F)$ (см. формулу (12) работы /5/) и

$$\vartheta(\tau;F)=\sum_{x,y,z=-\infty}^{+\infty} e(F(x,y,z)\tau)=1+\sum_{n=1}^{\infty} r(n;F)\,e(n\tau),^{*} \qquad (1)$$

где $r(n;F)$ — число представлений числа n формой F. Для удобства ссылок, сначала приведем некоторые известные

---

* В настоящей работе пользуемся общепринятым обозначением $e(\omega)=e^{2\pi i\omega}$.

определения и результаты.

Пусть Γ — модулярная группа, т.е. группа линейных подстановок $\tau \to \dfrac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$, где $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Далее, пусть $\Gamma_0(N)$ обозначает ту подгруппу группы Γ, в подстановках которой $\gamma \equiv 0 \pmod N$.

Определение I (см.напр., /8/, стр. 808-809). Функция F, определенная на $H=\{\tau\in\mathbb{C}\,/\,\Im m\,\tau>0\}$, называется целой модулярной формой размерности $-r$ относительно $\Gamma_0(N)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

I) F голоморфна на H;

2) для каждой подстановки $\Gamma_0(N)$

$$F\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=(\gamma\tau+\delta)^r F(\tau); \tag{2}$$

3) в окрестности $\tau=i\infty$ имеет место разложение

$$F(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} A_m\, e(m\tau);$$

4) в окрестности $\tau=-\frac{\delta}{\gamma}\ (\gamma\neq 0,\ (\gamma,\delta)=1)$ для любой подстановки группы Γ имеет место разложение

$$(\gamma\tau+\delta)^r F(\tau)=\sum_{m=0}^{\infty} C_m\, e\left(\frac{m}{N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

Лемма I (см. напр., /8/, стр. 8II, 953). Целая модулярная форма F размерности $-r$ относительно $\Gamma_0(N)$ тождественно равна нулю, если в ее разложении

$$A_m = 0 \quad \text{для всех} \quad m \leq \frac{r}{12} N \prod_{p|N} \left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Целочисленную матрицу, состоящую из одного столбца, будем называть вектором.

Если $\overline{m}$ — вектор с компонентами m_1, m_2, m_3, то через $\overline{m'}$ будем обозначать однострочную матрицу $m' = (m_1, m_2, m_3)$. Будем говорить, что вектор $\overline{m}$ делится на число r, если r/m_1, r/m_2, r/m_3.

Если $\overline{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{pmatrix}$ и $\overline{m} = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$, то $\overline{\ell} \equiv \overline{m} \pmod{r}$ обозначает, что $\ell_\kappa \equiv m_\kappa \pmod{r}$ $(\kappa = 1, 2, 3)$.

Определение 2 (/9/, стр. 338). Пусть $\mathcal{F}$ — матрица положительной квадратичной формы $F = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exy + 2fyz$ определителя Δ. Вектор $\overline{m}$ называется специальным (по отношению к $\mathcal{F}$), если вектор $\mathcal{F}\overline{m}$ делится на Δ.

В дальнейшем $\sum\limits_{\overline{b} \bmod r}^{*}$ будет обозначать сумму, в которой суммирование распространяется лишь на специальные векторы $\overline{b}$ из полной системы вычетов по модулю r.

Пусть $\bar{g}$, $\bar{h}$ и $\bar{a}$ — специальные векторы; $\bar{v} = \Delta \mathcal{F}^{-1} \bar{t}$, где $\bar{t}$ — вектор, компонентами которого являются диагональные элементы матрицы $\mathcal{F}$.

Положим

$$S_{\bar{g},\bar{h}}\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}; \bar{a}, N, F \Bigg) =$$

$$= \sum_{\substack{\bar{m} \bmod N\Delta|H_2| \\ \bar{m} \equiv \bar{a} \pmod{N\Delta}}} (-1)^{\frac{\bar{h}'\mathcal{F}(\bar{m}-\bar{a})}{N\Delta^2}} e\left(\frac{H_1(\bar{m}+\frac{1}{2}\bar{g})'\mathcal{F}(\bar{m}+\frac{1}{2}\bar{g})}{2N\Delta^2 H_2}\right)$$

(здесь $\mathcal{F}(H_1\bar{g}+H_2\bar{h}+H_1H_2N\bar{v}) \equiv \pmod{2\Delta})$),

$$\vartheta_{\bar{g},\bar{h}}(\tau; \bar{a}, N; F) = \tag{3}$$

$$= \sum_{\bar{m} \equiv \bar{a} \pmod{N\Delta}} (-1)^{\frac{\bar{h}'\mathcal{F}(\bar{m}-\bar{a})}{N\Delta^2}} e\left(\frac{\tau(\bar{m}+\frac{1}{2}\bar{g})'\mathcal{F}(\bar{m}+\frac{1}{2}\bar{g})}{2N\Delta^2}\right).$$

Далее, положив

$$\vartheta_{gh}(w|\tau; c, N) = \sum_{m \equiv c \pmod{N}} (-1)^{\frac{h(m-c)}{N}} e\left(\frac{(m+\frac{g}{2})^2}{2N}\tau\right) e\left((m+\tfrac{g}{2})w\right),$$

$$\vartheta_{gh}(\tau; c, N) = \vartheta_{gh}(0|\tau; c, N),$$

$$\vartheta'_{gh}(\tau; c, N) = \frac{\partial}{\partial w}\vartheta_{gh}(w|\tau; c, N)\Big|_{w=0},$$

получим

$$\vartheta_{gh}(\tau;0,N)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^{hm}\,e\left(\frac{(2Nm+g)^2}{8N}\tau\right), \qquad (4)$$

$$\vartheta'_{gh}(\tau;0,N)=\pi i\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(-1)^{hm}(2Nm+g)\,e\left(\frac{(2Nm+g)^2}{8N}\tau\right). \qquad (5)$$

Пусть $\bar{\ell}$ — специальный вектор, а $\bar{K}$ — произвольный вектор. Известно (/9/, стр. 323, форм. (2.4), (2.5) и (2.6)), что

$$S_{\bar{g}+2\bar{\ell},\bar{h}}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix};\bar{a},N,F\right)=S_{\bar{g},\bar{h}}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix};\bar{a}+\bar{\ell},N,F\right), \qquad (6)$$

$$S_{\bar{g},\bar{h}+2\bar{\ell}}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix};\bar{a},N,F\right)=S_{\bar{g},\bar{h}}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix};\bar{a},N,F\right), \qquad (7)$$

$$S_{\bar{g},\bar{h}}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix};\bar{a}+N\Delta\bar{K},N,F\right)=(-1)^{\frac{\bar{h}'\mathcal{F}\bar{K}}{\Delta}}S_{\bar{g},\bar{h}}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix};\bar{a},N,F\right). \qquad (8)$$

Известно также (/9/,стр.318, форм. (1.2), (1.3); стр.321, форм. (1.12); стр. 327, форм. (3.9), (3.5), (3.3), (3.7), (2.16), (3.10) и (3.11)), что

$$\vartheta_{\bar{g}+2\bar{\ell},\bar{h}}(\tau;\bar{a},N,F)=\vartheta_{\bar{g},\bar{h}}(\tau;\bar{a}+\bar{\ell},N,F), \qquad (9)$$

$$\vartheta_{\bar g, \bar h+2\bar l}(\tau; \bar a, N, F)=\vartheta_{\bar g, \bar h}(\tau; \bar a, N, F), \qquad (10)$$

$$\vartheta_{\bar 0\bar 0}\left(-\frac{1}{\tau}; \bar 0, 2, F\right)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{-i\tau}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\sum_{\bar b \bmod 2\Delta}^{*}\vartheta_{\bar 0\bar 0}(\tau; \bar b, 2, F) \qquad (11)$$

и что для любых α , β , γ , δ , удовлетворяющих условию $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, имеют место равенства

$$\vartheta_{\bar 0\bar 0}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; \bar 0, 2, F\right)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{-i(\gamma\tau+\delta)\operatorname{sgn}\gamma}{2|\gamma|}\right)^{\frac{3}{2}}\times$$

$$\times\sum_{\bar b \bmod 2\Delta}^{*} e\left(\frac{-\beta\delta(\bar b+\alpha\gamma\bar v)'\mathcal{F}(\bar b+\alpha\gamma\bar v)}{4\Delta^2}\right) S_{-2\delta\alpha\gamma\bar v, 2\beta\alpha\gamma\bar v}\left(\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}; -\delta\bar b, 2, F\right)\times$$

$$\times\vartheta_{2\alpha\gamma\bar v, 2\beta\delta\bar v}(\tau; \bar b, 2, F) \quad \text{при } \gamma\neq 0, \qquad (12)$$

$$\vartheta_{\bar 0\bar 0}(\tau\pm\beta; \bar 0, 2, F)=\vartheta_{\bar 0, 2\beta\delta\bar v}(\tau; \bar 0, 2, F) \quad \text{при } \gamma=0. \qquad (13)$$

В силу инвариантности функций $\Psi(\tau, w; F)$ и $\vartheta(\tau; F)$ относительно эквивалентности квадратичных форм, согласно лемме 8 работы /4/, без ограничения общности будем предполагать, что данная форма F определителя Δ имеет вид

$$F=ax^2+by^2+cz^2+2exz+2fyz, \ (a, 2\Delta)=1, \ e\equiv 0 \pmod{2\Delta}.$$

В дальнейшем полагаем: $\mathcal{R}=(b, f, c)$, $b=2^{r_0}b'$, $f=2^{\mu_0}f'$,

$c=2^{x_0}c'$.

<u>Лемма 2</u>. Если $\overline{m}$ — специальный вектор, то $\mathcal{R}$ делит $\overline{m}$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\overline{m}=\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}$. Так как

$$\mathfrak{F}\overline{m}=\begin{pmatrix} am_1+em_3 \\ bm_2+fm_3 \\ em_1+fm_2+cm_3 \end{pmatrix},$$

то Δ/am_1+em_3, Δ/bm_2+fm_3, $\Delta/em_1+fm_2+cm_3$.

Отсюда, в силу условий $(a,\Delta)=1$, $e\equiv 0(\bmod\Delta)$, следует, что Δ/m_1, $bm_2+fm_3=h_1\Delta$, $fm_2+cm_3=h_2\Delta$, где h_1 и h_2 - некоторые целые числа. Следовательно, $\mathcal{R}/m_1$ и

$$m_2=\frac{\Delta(h_1c-h_2f)}{bc-f^2},\quad m_3=\frac{\Delta(h_2b-h_1f)}{bc-f^2}. \tag{14}$$

Так как $\Delta=a(bc-f^2)-e^2b$ и $e\equiv 0(\bmod\Delta)$, то $\Delta/bc-f^2$. Ввиду того, что $\mathcal{R}/\Delta$, $(a,\Delta)=1$ и $a\frac{bc-f^2}{\Delta}=1+\frac{e^2}{\Delta}b$, имеем:

$$\left(\frac{bc-f^2}{\Delta},\mathcal{R}\right)=\left(a\,\frac{bc-f^2}{\Delta},\mathcal{R}\right)=\left(1+\frac{e}{\Delta}eb,\mathcal{R}\right)=1.$$

Следовательно, так как $k \mid h_1 c - h_2 f$ и $k \mid h_2 b - h_1 f$, то из (14) получаем, что $k \mid m_2$, $k \mid m_3$.

Лемма 3. Для каждой подстановки группы $\Gamma_0\left(4\frac{\Delta}{k}\right)$ имеет место равенство

$$\vartheta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; F\right) =$$

$$= i^{\frac{3}{2}\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta - 1)}\, i^{\frac{3}{4}(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}\vartheta(\tau; F),$$

где $\eta(\gamma)=1$ при $\gamma \geqslant 0$ и $\eta(\gamma)=-1$ при $\gamma<0$.

Доказательство. Из (3) видно, что

$$\vartheta(\tau; F) = \vartheta_{\bar{0}\bar{0}}(\tau; \bar{0}, 2, F). \qquad (15)$$

Рассмотрим два случая:

1) Пусть $\gamma \neq 0$. В (12) взяв β, $-\alpha$, δ, $-\gamma$, τ' вместо α, β, γ, δ, τ, согласно (6), (7) и (9), получим, что

$$\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}\left(\frac{\beta\tau'-\alpha}{\delta\tau'-\gamma}; \bar{0}, 2, F\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{-i(\delta\tau'-\gamma)\operatorname{sgn}\delta}{2|\delta|}\right)^{\frac{3}{2}} \times$$

$$\times \sum_{\bar{b} \bmod 2\Delta}^{*} e\left(\frac{-\alpha\gamma(\bar{b}+\beta\delta\bar{v})'\mathfrak{F}(\bar{b}+\beta\delta\bar{v})}{4\Delta^2}\right) S_{2\gamma(\bar{b}+\beta\delta\bar{v}),\bar{0}}\left(\frac{\beta}{\delta}; \bar{0}, 2, F\right)\vartheta_{2\beta\delta\bar{v},\bar{0}}(\tau'; \bar{b}, 2, F).$$

Так как вектор b — специальный, а вектор $\bar{v}$ делится на Δ, то вектор $\bar{b}+\beta\delta\bar{v}$ также будет специальным. Следовательно, Δ делит $\mathcal{F}(\bar{b}+\beta\delta\bar{v})$ и R делит $(\bar{b}+\beta\delta\bar{v})'$, ибо, согласно лемме 2, R делит $\bar{b}+\beta\delta\bar{v}$. Отсюда, в силу условия $\gamma\equiv 0\left(\bmod 4\frac{\Delta}{R}\right)$, получим, что

$$e\left(\frac{-\alpha\gamma(\bar{b}+\beta\delta\bar{v})'\mathcal{F}(\bar{b}+\beta\delta\bar{v})}{4\Delta^2}\right)=1.$$

Далее, согласно (6) и (8)

$$S_{2\gamma(\bar{b}+\beta\delta\bar{v}),\bar{0}}\left(\frac{\beta}{\delta};\bar{0},2,F\right)=S_{\bar{0}\bar{0}}\left(\frac{\beta}{\delta};\gamma(\bar{b}+\beta\delta\bar{v}),2,F\right)=$$

$$=S(F\beta\operatorname{sgn}\delta,|\delta|),^{*)}$$

ибо 4Δ делит $\gamma(\bar{b}+\beta\delta\bar{v})$.

Поэтому, согласно лемме 2 работы /4/ и (6),

$$\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}\left(\frac{\beta\tau'-\alpha}{\delta\tau'-\gamma};\bar{0},2,F\right)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{-i(\delta\tau'-\gamma)\operatorname{sgn}\delta}{2|\delta|}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)\times$$

$$\times i^{3\left(\frac{|\delta|-1}{2}\right)^2}|\delta|^{\frac{3}{2}}\sum_{\bar{b}\bmod 2\Delta}^{*}\vartheta_{\bar{0},\bar{0}}(\tau';\bar{b}+\beta\delta\bar{v},2,F). \qquad (I6)$$

В (I6) взяв $-\frac{1}{\tau}$ вместо τ', согласно (II), получим, что

---

*) Здесь и в дальнейшем $S(F,q)$ — кратная сумма Гаусса.

$$\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\bar{0},2,F\right)=\left(\frac{-i\,sgn\,\delta\left(-\frac{\delta}{\tau}-\gamma\right)}{2|\delta|}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\Delta\beta\,sgn\,\delta}{|\delta|}\right)\times$$

$$\times\, i^{3\left(\frac{|\delta|-1}{2}\right)^2}|\delta|^{\frac{3}{2}}(-2i\tau)^{\frac{3}{2}}\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}(\tau;\bar{0},2,F). \tag{I7}$$

Известно (см.,напр., /I/,стр.20, форм. (5.6)), что

$$\left(\frac{-i\,sgn\,\delta\left(-\frac{\delta}{\tau}-\gamma\right)}{2|\delta|}\right)^{\frac{1}{2}}(-2i\tau)^{\frac{1}{2}}=i^{\frac{1}{2}sgn\,\gamma(sgn\,\delta-1)}\frac{(\gamma\tau+\delta)^{\frac{1}{2}}}{|\delta|^{1/2}}. \tag{I8}$$

Из (I7) , (I8) и (I5) вытекает утверждаемое при $\gamma\neq 0$.

2) Пусть $\gamma=0$. Тогда, согласно (I3) и (I0), получим, что

$$\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}(\tau\pm\beta,\bar{0},2,F)=\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}(\tau;\bar{0},2,F),$$

т.е. утверждаемое при $\gamma=0$.

<u>Лемма 4</u>. Пусть $\alpha\delta-\beta\gamma=1,\ \gamma\neq 0,\ \gamma\equiv 0\ (mod\ 4\frac{\Delta}{\mathcal{R}})$.

Тогда в окрестности точки $\tau=-\frac{\delta}{\gamma}$ имеет место разложение.

$$(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}\vartheta(\tau;F)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\mathcal{B}_{\mu}\,e\left(\frac{\mu}{2\frac{\Delta}{\mathcal{R}}}\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

<u>Доказательство</u>. В (I2) написав $\delta,-\beta,-\gamma,\alpha,\tau'$ вместо $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\tau,$ получим, что

$$\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}\left(\frac{\delta\tau'-\beta}{-\gamma\tau'+\alpha};\bar{0},2,F\right)=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{-i(-\gamma\tau'+\alpha)\,sgn(-\gamma)}{2|\gamma|}\right)^{\frac{3}{2}}\times$$

$$\times \sum_{\bar{b} \bmod 2\Delta}^{*} e\left(\frac{\alpha\beta(\bar{b}-\delta\gamma\bar{v})'\mathcal{F}(\bar{b}+\delta\gamma\bar{v})}{4\Delta^2}\right) S_{2\alpha\delta\gamma\bar{v},\,2\beta\delta\gamma\bar{v}}\left(\begin{smallmatrix}\delta\\-\gamma\end{smallmatrix}; -\alpha\bar{b}, 2, F\right) \times$$

$$\times\, \vartheta_{-2\delta\gamma\bar{v},\,-2\beta\alpha\bar{v}}(\tau'; \bar{b}, 2, F). \tag{19}$$

В (19) написав $\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$ вместо τ', согласно (8) и (10), получим, что

$$\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}(\tau; \bar{0}, 2, F) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{i \operatorname{sgn}\gamma}{2|\gamma|(\gamma\tau+\delta)}\right)^{\frac{3}{2}} \times$$

$$\times \sum_{\bar{b} \bmod 2\Delta}^{*} e\left(\frac{\alpha\beta(\bar{b}-\delta\gamma\bar{v})'\mathcal{F}(\bar{b}-\delta\gamma\bar{v})}{4\Delta^2}\right) S_{2\alpha\delta\gamma\bar{v},\,2\beta\delta\gamma\bar{v}}\left(\begin{smallmatrix}\delta\\-\gamma\end{smallmatrix}; -\alpha\bar{b}, 2, F\right) \times$$

$$\times\, \vartheta_{\bar{0}\bar{0}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; \bar{b}-\delta\gamma\bar{v}, 2, F\right). \tag{20}$$

Можно показать, что

$$\left(\frac{i \operatorname{sgn}\gamma}{2|\gamma|(\gamma\tau+\delta)}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{e\left(\frac{3 \operatorname{sgn}\gamma}{8}\right)}{(2|\gamma|)^{\frac{3}{2}}\,(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}}. \tag{21}$$

Далее, согласно (3),

$$\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; b-\delta\gamma\bar{v}, 2, F\right) = \sum_{\bar{m} \equiv \bar{b}-\delta\gamma\bar{v} \pmod{2\Delta}} e\left(\frac{\bar{m}'\mathcal{F}\bar{m}}{4\Delta^2}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) =$$

$$= \sum_{\bar{m} \equiv \bar{b} \pmod{2\Delta}} e\left(\frac{\bar{m}'\mathcal{F}\bar{m}}{4\Delta^2}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right), \tag{22}$$

ибо $\Delta/\bar{v}$ и γ четно.

Так как $\bar{b}$ - специальный вектор, специальным будет также и $\bar{m}$. Следовательно, Δ делит $\mathcal{F}\bar{m}$ и $\mathcal{R}$ делит m', ибо, согласно лемме 2, $\mathcal{R}$ делит $\bar{m}$. Отсюда следует, что $\Delta\mathcal{R}$ целит $\bar{m}'\mathcal{F}\bar{m}$.

Положив в (22) $\mu = \frac{\bar{m}'\mathcal{F}\bar{m}}{\Delta\mathcal{R}}$, получим:

$$\vartheta_{\bar{0}\bar{0}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};\bar{b}-\delta\gamma\bar{v},2,F\right)=\sum_{\bar{m}\equiv\bar{b}(\mathrm{mod}\,2\Delta)} e\left(\frac{\bar{m}'\mathfrak{F}\bar{m}}{\Delta k}\,\frac{1}{4\frac{\Delta}{k}}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{\infty} A_{\mu}\, e\left(\frac{\mu}{4\frac{\Delta}{k}}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right). \qquad (23)$$

Из (20), (21) и (15) следует утверждаемое.

Лемма 5. При $\mathcal{R}e\,w>\frac{1}{2}$ для каждой подстановки группы $\Gamma_0\left(4\frac{\Delta}{k}\right)$ имеет место соотношение

$$\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},w;F\right)=i^{\frac{3}{2}\eta(\gamma)(\mathrm{sgn}\,\delta-1)}\, i^{\frac{3}{4}(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)\left(\frac{\beta\,\mathrm{sgn}\,\delta}{|\delta|}\right)\times$$

$$\times(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}|\gamma\tau+\delta|^{w}\,\Psi(\tau,w;F), \qquad (24)$$

где функция $\Psi(\tau,w;F)$ определена формулой 2 работы /5/, а $\eta(\gamma)=1$ при $\gamma\geqslant 0$ и $\eta(\gamma)=-1$ при $\gamma<0$.

Доказательство. Написав в формуле 2 работы /5/ $\frac{\alpha\tau'+\beta}{\gamma\tau'+\delta}$ вместо τ, получим, опустив штрих при τ', что

$$\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},w;F\right)=$$

$$=1+\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\Delta^{1/2}}\sum_{\substack{q,H=-\infty\\(q,H)=1}}^{+\infty}{}'\,\frac{i^{\frac{3}{2}(\mathrm{sgn}\,q-1)}\,S(-FH\,\mathrm{sgn}\,q,|q|)}{|q|^{\frac{3}{2}}\left(\frac{q_0\tau+H_0}{\gamma\tau+\delta}\right)^{\frac{3}{2}}\left|\frac{q_0\tau+H_0}{\gamma\tau+\delta}\right|^{w}}, \qquad (25)$$

где положено:

$$H=\alpha H_0-\beta q_0 \quad \text{и} \quad q=\delta q_0-\gamma H_0, \quad \text{т.е.} \quad \alpha q+\gamma H=q_0,$$

$$\beta q+\delta H=H_0. \tag{26}$$

Рассмотрим в отдельности случаи: $\gamma\neq 0$ и $\gamma=0$.

I) Пусть $\gamma\neq 0$. Тогда из (25), так же, как и при доказательстве леммы I2 работы /I/, следует, что

$$\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},w;F\right)=1+\frac{i^{-\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\gamma}S(F\alpha\operatorname{sgn}\gamma,|\gamma|)(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}|\gamma\tau+\delta|^{w}}{2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\Delta^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{3}{4}\pi i\operatorname{sgn}\gamma}(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}\sum_{\substack{q_0,H_0=-\infty\\(q_0,H_0)=1}}^{\infty}{}''\frac{i^{\frac{3}{2}(\operatorname{sgn}q_0-1)}e\left(\frac{3\operatorname{sgn}q\,q_0\gamma}{8}\right)S(-FH\operatorname{sgn}q,|q|)(\gamma\tau+\delta)^{w}}{|q|^{\frac{3}{2}}(q_0\tau+H_0)^{\frac{3}{2}}|q_0\tau+H_0|^{w}}. \tag{27}$$

Два штриха при знаке суммы обозначают, что отсутствуют члены с $q_0=0, H_0=\pm 1$, с $q_0=\gamma, H_0=\delta$ и с $q_0=-\gamma, H_0=-\delta$.

Из (27), согласно (25) и (38) работы /4/ и (3.I) и (3.2) работы /I/ следует, что

$$\frac{\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},w;F\right)2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\gamma}}{S(F\alpha\operatorname{sgn}\gamma,|\gamma|)(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}|\gamma\tau+\delta|^{w}}=1+\frac{2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\gamma}}{S(F\alpha\operatorname{sgn}\gamma,|\gamma|)(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}|\gamma\tau+\delta|^{w}}+$$

$$+\frac{1}{2}\, i^{\frac{3}{2}(\operatorname{sgn}\gamma+1)}|\gamma|^{\frac{3}{2}} e\left(\frac{-3\operatorname{sgn}\gamma}{8}\right)\sideset{}{''}\sum_{\substack{q_0,H_0=-\infty\\(q_0,H_0)=1}}^{+\infty}\frac{i^{\frac{3}{2}(\operatorname{sgn}q_0-1)}\dfrac{S(-FH\operatorname{sgn}q,|q|)}{S(F\alpha\operatorname{sgn}\gamma,|\gamma|)}e\left(\dfrac{3\operatorname{sgn}q\,q_0\gamma}{8}\right)}{|q|^{\frac{3}{2}}(q_0\tau+H_0)^{\frac{3}{2}}|q_0\tau+H_0|^{w}}=$$

$$=1+\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\Delta^{1/2}}\frac{i^{\frac{3}{2}(\operatorname{sgn}\gamma-1)}S(-F\delta\operatorname{sgn}\gamma,|\gamma|)}{|\gamma|^{\frac{3}{2}}(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}|\gamma\tau+\delta|^{w}}+\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\Delta^{1/2}}\frac{i^{\frac{3}{2}(-\operatorname{sgn}\gamma-1)}S(-F\delta\operatorname{sgn}\gamma,|\gamma|)}{|\gamma|^{\frac{3}{2}}\{-(\gamma\tau+\delta)\}^{\frac{3}{2}}|\gamma\tau+\delta|^{w}}+$$

$$+\frac{1}{2}\, i^{\frac{3}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}\sideset{}{''}\sum_{\substack{q_0,H_0=-\infty\\(q_0,H_0)=1}}^{+\infty}\frac{i^{\frac{3}{2}(\operatorname{sgn}q_0-1)}|q|^{\frac{3}{2}}S(-FH_0\operatorname{sgn}q_0,|q_0|)\,i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}q\,q_0\gamma}}{2^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}|q_0|^{\frac{3}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}q\,q_0\gamma}|q|^{\frac{3}{2}}(q_0\tau+H_0)^{\frac{3}{2}}|q_0\tau+H_0|^{w}}=$$

$$=1+\frac{\left(\frac{i}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{2\Delta^{1/2}}\sum_{\substack{q_0,H_0=-\infty\\(q_0,H_0)=1,\ q_0\neq 0}}^{+\infty}\frac{i^{\frac{3}{2}(\operatorname{sgn}q_0-1)}S(-FH_0\operatorname{sgn}q_0,|q_0|)}{|q_0|^{\frac{3}{2}}(q_0\tau+H_0)^{\frac{3}{2}}|q_0\tau+H_0|^{w}}=\Psi(\tau,w;F). \tag{28}$$

В формуле (34) работы /4/ взяв δ, $-\beta$, $-\gamma$, α, соответственно, вместо α, β, γ, δ, получим, что

$$S(F\alpha\operatorname{sgn}\gamma,|\gamma|)=$$

$$=\left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)\left(\frac{-\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\delta\gamma}\, i^{\frac{1}{4}(|\delta|-1)^2}\, 2^{\frac{3}{2}}|\gamma|^{\frac{3}{2}}\Delta^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, из (28) получим, что

$$\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},w;F\right)=\left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)\left(\frac{\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)i^{\frac{3}{2}\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, i^{\frac{3}{4}(|\delta|-1)^2}\times$$

$$\times (\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}} |\gamma\tau+\delta|^{\omega} \Psi(\tau, \omega; F),$$

т.е. утверждаемое при $\gamma \neq 0$.

2) Пусть $\gamma = 0$. В этом случае $\alpha=\delta=1$ или $\alpha=\delta=-1$.

Следовательно, согласно (26), из (25) получим, что

$$\Psi(\tau \pm \beta, \omega; F) = \Psi(\tau, \omega; F),$$

т.е. утверждаемое при $\gamma = 0$.

<u>Лемма 6</u>. Функция $\theta(\tau; F) = \Psi(\tau, \omega; F)\Big|_{\omega=0}$ удовлетворяет условиям I) и 3) определения I. Далее, для каждой подстановки группы $\Gamma_0\left(4\frac{\Delta}{R}\right)$ имеет место соотношение

$$\theta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; F\right) =$$

$$= i^{\frac{3}{2}\eta(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)} \, i^{\frac{3}{4}(|\delta|-1)^2} \left(\frac{\Delta\beta \operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}} \theta(\tau; F),$$

где $\eta(\gamma)$ определено в лемме 5.

<u>Доказательство.</u> Принимая во внимание (24) и рассуждая так же, как и при доказательстве леммы I2 работы /2/, получаем утверждаемое.

<u>Лемма 7</u>. Пусть

$$\psi(\tau; F) = \vartheta(\tau; F) - \theta(\tau; F) - \tag{29}$$

$$-\sum_{j=1}^{\nu_1} A_j \prod_{k=1}^{3} \vartheta_{g_{kj} h_{kj}}(\tau; 0, 2N_{kj}) - \sum_{r=1}^{\nu_2} B_r \vartheta_{g_r h_r}(\tau; 0, 2N_r),$$

где A_j и B_r — произвольные комплексные числа, а ν_1 и ν_2 — произвольные натуральные числа. Далее, пусть

$$2\,|\,g_{kj},\ 2\,|\,g_r,\ N_{kj}\,|\,N,\ 4N_r\,|\,N,\ \frac{\Delta}{R}\,\Big|\,N,\ 4\,\Big|\,N\sum_{k=1}^{3}\frac{b_{ki}^2}{N_{kj}},$$

$$4N_r\,\Big|\left(\frac{g_r}{2}\right)^2,\ 4N_{1j}N_{2j}N_{3j}\,\Big|\left(\frac{g_{1i}}{2}\right)^2 N_{2j}N_{3j}+\left(\frac{g_{2i}}{2}\right)^2 N_{3j}N_{1j}+$$

$$+\left(\frac{g_{3i}}{2}\right)^2 N_{1j}N_{2i} \tag{30}$$

$$(k=1,2,3;\ j=1,2,\ldots,\nu_1;\ r=1,2,\ldots,\nu_2)$$

и для всех α и δ, удовлетворяющих условию $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{4N}$, выполняются равенства

$$\sum_{j=1}^{\nu_1} A_j \prod_{k=1}^{3}\left\{\left(\frac{N_{kj}}{|\delta|}\right)\vartheta_{\alpha g_{kj},h_{kj}}(\tau;0,2N_{kj})\right\}= \tag{31}$$
$$=\left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)\sum_{j=1}^{\nu_1} A_j \prod_{k=1}\vartheta_{g_{kj}h_{kj}}(\tau;0,2N_{kj}),$$

$$\operatorname{sgn}\delta\sum_{r=1}^{\nu_2} B_r\left(\frac{-N_r}{|\delta|}\right)\vartheta'_{\alpha g_r,h_r}(\tau;0,2N_r)= \tag{32}$$
$$=\left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right)\sum_{r=1}^{\nu_2} B_r\vartheta_{g_r h_r}(\tau;0,2N_r).$$

Тогда функция $\psi^4(\tau;F)$ будет целой модулярной формой размерности - 6 относительно подгруппы $\Gamma_0(4N)$.

Примечания: 1) В частности, если одновременно взять все $A_j=0$, то все условия, содержащие индекс j следует опустить; если же одновременно взять все $B_r=0$, то следует опустить все условия, содержащие индекс ν .

2) Согласно лемме 9 из работы /4/, число $4\frac{\Delta}{R}$ является ступенью формы F при $\eta_0 < \mu_0 + 1$ и при $\mu_0 = 0$, $\eta_0 = 1$ и является удвоенной ступенью — при $\eta_0 = \mu_0 + 1$, $\mu_0 > 0$.

Доказательство. Согласно (29), (1), лемме 6, (4) и (5), функция $\psi(\tau; F)$, а следовательно и $\psi^4(\tau; F)$ удовлетворяет условию 1) определения 1.

Для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеют место (см. /2/, лемма 13 и /3/, лемма 4) соотношения:

$$\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_{kj}h_{kj}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 2N_{kj}\right) = e\left(-\frac{\alpha\gamma\delta^2}{16}\sum_{k=1}^{3}\frac{h_{kj}^2}{N_{kj}}\right)\times$$

$$\times e\left(\frac{\beta\delta}{4}\sum_{k=1}^{3}\delta^{2\varphi(2N_{kj})-2}\frac{g_{kj}^2}{4N_{kj}}\right)\left(\frac{2\beta\,\mathrm{sgn}\,\delta}{|\delta|}\right) i^{\frac{3}{2}\eta(\gamma)(\mathrm{sgn}\,\delta-1)}\times$$

$$\times i^{\frac{3}{2}(1-|\delta|)}\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{N_{kj}}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{\alpha g_{kj}h_{kj}}(\tau; 0, 2N_{kj})$$

$$(j = 1, 2, \ldots, \nu_1)$$

и

$$\vartheta'_{g_n h_n}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; 0, 2N_n\right) = \mathrm{sgn}\,\delta\, e\left(\frac{\alpha\gamma\delta^2 h_n^2}{16N_n}\right) e\left(\frac{\beta\delta}{4N_n}\delta^{2\varphi(2N_n)-2}\left(\frac{g_n}{2}\right)^2\right)\times$$

$$\times i^{\frac{3}{2}\eta(\gamma)(\mathrm{sgn}\,\delta-1)}\, i^{\frac{1}{2}(1-|\delta|)}\left(\frac{2\beta N_n\,\mathrm{sgn}\,\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}\times$$

$$\times\vartheta'_{\alpha g_n h_n}(\tau; 0, 2N_n), \quad (n = 1, 2, \ldots, \nu_2),$$

где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, а $\eta(\gamma)$ определено в лемме 5 .

Из этих соотношений, в силу (30), (31) и (30), (32), соответственно, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{\nu_1} A_j \prod_{k=1} \vartheta_{g_{kj}h_{kj}}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};0,2N_{kj}\right) =$$

$$= i^{\frac{3}{2} r(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, i^{\frac{3}{4}(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)\times \tag{33}$$

$$\times\,(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{\nu_1} A_j \prod_{k=1} \vartheta_{g_{kj}h_{kj}}(\tau;0,2N_{kj})$$

и

$$\sum_{r=1}^{\nu_2} B_r \vartheta'_{g_r h_r}\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};0,2N_r\right) =$$

$$= i^{\frac{3}{2} r(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, i^{\frac{3}{4}(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)\times \tag{34}$$

$$\times\,(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}\sum_{r=1}^{\nu_2} B_r \vartheta'_{g_r h_r}(\tau;0,2N_r).$$

Так как $\frac{\Delta}{R}\,\big|\,N$, то каждая подстановка группы $\Gamma_0(4N)$ является также и подстановкой группы $\Gamma_0\left(4\frac{\Delta}{R}\right)$. Следовательно, согласно леммам 3, 6 и формулам (33) и (34), получаем, что для каждой подстановки группы $\Gamma_0(4N)$ имеет место равенство:

$$\psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta};F\right) =$$

$$= i^{\frac{3}{2} r(\gamma)(\operatorname{sgn}\delta-1)}\, i^{\frac{3}{4}(|\delta|-1)^2}\left(\frac{\Delta\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right)(\gamma\tau+\delta)^{\frac{3}{2}}\psi(\tau;F),$$

т.е.

$$\psi^4\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}; F\right) = (\gamma\tau+\delta)^6\psi^4(\tau; F). \qquad (35)$$

Таким образом, функция $\psi^4(\tau; F)$ удовлетворяет также и условию 2) определения I.

Так же, как и в лемме I8 работы /I/ и лемме 4 работы /3/ при помощи условий (30), можно показать, что функции

$\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_{kj}h_{kj}}(\tau; 0, 2N_{kj})$ и $\vartheta'_{g_r h_r}(\tau; 0, 2N_r)$ $(j=1,2,\ldots,\nu_1;\ r=1,2,\ldots,\nu_2)$,

а тем самым и функции $\sum_{j=1}^{\nu_1} A_j \prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_{kj}h_{kj}}(\tau; 0, 2N_{kj})$ и

$\sum_{r=1}^{\nu_2} B_r \vartheta'_{g_r h_r}(\tau; 0, 2N_r)$ удовлетворяют условию 3) определения I. Следовательно, согласно (29), (I) и лемме 6 и функция $\psi^4(\tau; F)$ удовлетворяет условию 3) определения I.

При помощи равенства (35) так же, как и при доказательстве леммы 2I работы /I0/, можно показать, что

$$(\gamma\tau+\delta)^6\psi^4(\tau; F) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu\, e\left(\frac{\mu}{4N}\,\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

Следовательно, условие 4) определения I также выполнено. Лемма доказана.

В следующих параграфах будут выведены формулы для числа представлений чисел некоторыми тернарными квадратичными формами. Во всех этих формулах, ради сокращения, положено:

$$\mathcal{J}_1=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

$$\mathcal{J}_{2q}=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-q\varkappa}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{1\le h\le q\varkappa/4}\left(\frac{h}{q\varkappa}\right),$$

$$\mathcal{J}_{3q}=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-q\varkappa}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{1\le h\le q\varkappa/2}\left(\frac{h}{q\varkappa}\right),$$

$$\mathcal{J}_4=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

$$\mathcal{J}_{5q}=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2q\varkappa}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\left\{\sum_{1\le h\le q\varkappa/8}\left(\frac{h}{q\varkappa}\right)-\sum_{3q\varkappa/8<h\le q\varkappa/2}\left(\frac{h}{q\varkappa}\right)\right\},$$

$$\mathcal{J}_{6q}=\sum_{d|s} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2q\varkappa}{p}\right)\frac{1}{p}\right)\sum_{q\varkappa/8<h\le 3q\varkappa/8}\left(\frac{h}{q\varkappa}\right).$$

§ 2. В настоящем параграфе рассматривается представление натуральных чисел формами: $F_1=3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2xz+2yz$, $F_2=3x^2+3y^2+3z^2+2xy+2xz-2yz$, $F_3=2x^2+3y^2+6z^2+2xy+2yz$, $F_4=3x^2+5y^2+5z^2-4xy+2xz+2yz$, $F_5=5x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-2yz$,

принадлежащими одноклассным родам (/6/, стр.7,9,I3,25,42). В этом случае непосредственно можно воспользоваться хорошо известным результатом Зигеля /II/ о числе представлений родом квадратичных форм, согласно которому

$$r(n;F)=\rho(n;F), \tag{36}$$

где $r(n;F)$ — число представлений числа n формой F,

а $\rho(n;F)$ — сумма соответствующего этой форме сингулярного ряда.

Мы со всеми подробностями выведем формулу для числа представлений чисел только первой из указанных выше форм. Для остальных форм мы приведем лишь окончательные результаты, которые получаются аналогично.

<u>Теорема I</u>. Пусть $n=2^{\alpha}5^{\beta}u$, $(u,10)=1$, $u=s^2 \varkappa$. Тогда

$$
\begin{aligned}
r(n;F_1) &= 12\left(2^{\frac{\alpha}{2}}-1\right)\chi_{21} && \text{при } 2|\alpha,\ \alpha>0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 13,17 \pmod{20};\\
&= 2\left(2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot 3-2\right)\chi_{31} && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3,27 \pmod{40};\\
&= 6\cdot 2^{\frac{\alpha}{2}}\chi_{31} && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 7,23 \pmod{40};\\
&= 6\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}-1\right)\chi_{4} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\nmid\beta,\ u=s^2;\\
&= 12\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}-1\right)\chi_{51} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1,9 \pmod{20}, \text{ но } u\neq s^2;\\
&= 12\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}-1\right)\chi_{61} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 11,19 \pmod{20};\\
&= 6\left(2^{\frac{\alpha}{2}}-1\right)\chi_{25} && \text{при } 2|\alpha,\ \alpha>0,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod{4};\\
&= 3\cdot 2^{\frac{\alpha}{2}}\chi_{35} && \text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod{8};\\
&= \left(2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot 3-2\right)\chi_{35} && \text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 7 \pmod{8};\\
&= 6\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}-1\right)\chi_{55} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod{4};\\
&= 6\left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}-1\right)\chi_{65} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod{4};\\
&= 0 && \text{при } \alpha=1, \text{ при } \alpha=0,\ 2|\beta,\\
& && u\equiv 1 \pmod{4},
\end{aligned}
$$

$r(n;F_1)=0$ при $\alpha=0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 13,17 \pmod{20}$, при

$2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1,9 \pmod{10}$ и при $2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta$,
$u\equiv 3,7 \pmod{10}$.

Доказательство. Применив к форме F_1 подстановку*

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 0 & 13\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

определителя I, получим форму

$$F_0=3x^2+4y^2+536z^2+80xz-4yz,$$

эквивалентную F_1 и удовлетворяющую условиям леммы I3 работы /4/. Следовательно, положив в леммах I0, 7, 2) и 8 работы /5/: $a_0=3,\ b_0=4,\ \Delta=20,\ k=2,\ \mathcal{D}=\frac{\Delta}{k_2}=5,\ \eta_0=2,\ \mu_0=1$

$\gamma=2,\ \bar{a}=60,\ a'=4,\ \underline{a}=3,\ l=\bar{l}=1,\ l'=\underline{l}=0,$

$n=2^\alpha m,\ \Delta n=2^{\alpha+2}5\cdot m=2^{\alpha+2}uv=r^2\omega,\ u=5^2\varkappa,\ v=5^{\beta+1}=s_1^2\varkappa_1,$

т.е. $m=5^\beta u$, (37)

получим, что

$$\rho(n;F_1)=2^{\frac{\alpha}{2}}5^{\frac{\beta+1}{2}+1}\frac{\varkappa^{1/2}}{3\pi}X_2X_5\times \tag{38}$$

$$\times\left(1-\left(\frac{\omega}{5}\right)\frac{1}{5}\right)L(1,-\omega)\sum_{d|s}d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

---

*) Подбор подстановки σ осуществляется при помощи рассуждений, приведенных при доказательстве леммы 8 работы /4/.

где

$$\chi_2 = 3\left(1-2^{-\frac{\alpha}{2}}\right) \quad \text{при } 2|\alpha,\ \alpha>0,\ m\equiv 1 \pmod 4;$$

$$= 3 \quad \text{при } 2|\alpha,\ m\equiv 3 \pmod 8;$$

$$= 3-2^{-\frac{\alpha}{2}+1} \quad \text{при } 2|\alpha,\ m\equiv 7 \pmod 8;$$

$$= 3\left(1-2^{-\frac{\alpha-1}{2}}\right) \quad \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1;$$

$$= 0 \quad \text{при } \alpha=0,\ m\equiv 1 \pmod 4) \text{ и при } \alpha=1;$$

$$\chi_5 = 6\cdot 5^{-\frac{\beta}{2}-1} \quad \text{при } 2|\beta,$$

$$= 2\cdot 5^{-\frac{\beta+1}{2}} \quad \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv \pm 1 \pmod{10} \text{ и при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv\pm 3 \pmod{10},$$

$$= 0 \quad \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv\pm 3 \pmod{10} \text{ и при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv\pm 1 \pmod{10}.$$

Согласно (37),

I) при $2|\alpha,\ \alpha>0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 13, 17 \pmod{20}$ имеем: $m\equiv 1 \pmod 4$,

$\omega = \varkappa \equiv u \equiv 1 \pmod 4),\ \omega>1,\ u=s^2\omega,\ \left(\frac{u}{5}\right)=\left(\frac{\omega}{5}\right);$

2) при $2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3, 27 \pmod{40}$ имеем: $m\equiv 7 \pmod 8$,

$\omega=\varkappa\equiv u\equiv 3 \pmod 4),\ u=s^2\omega,\ \left(\frac{u}{5}\right)=\left(\frac{\omega}{5}\right);$

3) при $2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 7, 23 \pmod{40}$ имеем: $m\equiv 3 \pmod 8$,

$\omega=\varkappa\equiv u\equiv 3 \pmod 4),\ u=s^2\omega,\ \left(\frac{u}{5}\right)=\left(\frac{\omega}{5}\right);$

4) при $2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\nmid\beta,\ u=s^2$ имеем: $\omega=2;$

5) при $2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1,9 \pmod{20}$, но $u\neq s^2$, имеем:

$\omega=2x\equiv 2u\equiv 2 \pmod 8,\ \omega>2,\ 2u=s^2,\ \left(\frac{\omega}{5}\right)=-\left(\frac{u}{5}\right)$;

6) при $2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 11,19 \pmod{20}$ имеем: $\omega=2x\equiv 2u\equiv$ $\equiv 6 \pmod 8,\ 2u=s^2\omega,\ \left(\frac{\omega}{5}\right)=-\left(\frac{u}{5}\right)$;

7) при $2\mid\alpha,\ \alpha>0,\ 2\mid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4$ имеем: $m\equiv 1 \pmod 4$, $\omega=5x\equiv 5u\equiv 1 \pmod 4,\ \omega>1$;

8) при $2\mid\alpha,\ 2\mid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 8$ имеем: $m\equiv 3 \pmod 8$, $\omega=5x\equiv 5u\equiv 3 \pmod 4$;

9) при $2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\mid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4$ имеем: $\omega=10x\equiv$ $\equiv 10u\equiv 2 \pmod 8,\ \omega>2$;

10) при $2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\mid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4$ имеем: $\omega=10x\equiv$ $\equiv 10u\equiv 6 \pmod 8$;

11) при $\alpha=1$, при $\alpha=0,\ 2\mid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4$, при $\alpha=0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 13,17 \pmod{20}$,

при $2\mid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1,9 \pmod{10}$ и при $2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta$, $u\equiv 3,7 \pmod{10}$ имеем: $X_2X_5=0$.

Приняв во внимание только что сказанное, из формул (36), (38) выражений для $X_2, X_5, \mathcal{Z}(1,-\omega)$, $\mathcal{Z}_4$ и $\mathcal{Z}_{kq}$ (при $q=1,5$), после некоторых вычислений, получим утверждаемое.

<u>Следствие</u>. Числа вида

$$4\eta+2,\ 25^{\mu}(4\eta+1),\ 4^{\lambda}\cdot 25^{\mu}(50\eta\pm5),\ 4^{\lambda}\cdot 25^{\mu}(100\eta\pm30),$$

и только они, непредставимы формой F_1.

<u>Доказательство</u>. Согласно теореме I, $r(n;F_1)=0$ лишь тогда, когда

I) $\alpha=1$, т.е. $n=4\eta+2$;

2) $\alpha=0,\ 2|\beta,\ u\equiv1 \pmod 4$ или $\alpha=0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 13,17 \pmod{20}$, т.е. $n=25^{\mu}(4\eta+1)$;

3) $2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv1,9 \pmod{10}$, т.е. $n=4^{\lambda}\cdot 25^{\mu}(50\eta\pm5)$;

4) $2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3,7 \pmod{10}$, т.е. $n=4^{\lambda}\cdot 25^{\mu}(100\eta\pm30)$.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $n=2^{\alpha}u,\ u=5^{2}\varkappa$. Тогда

$r(n;F_2)=6\mathcal{Z}_1$ при $n=t^2,\ \alpha>0$;

$=24\mathcal{Z}_{21}$ при $2|\alpha,\ \alpha>0,\ u\equiv1 \pmod 4$, но $n\neq t^2$;

$=8\mathcal{Z}_{31}$ при $2|\alpha,\ u\equiv 3 \pmod 8$;

$=12\mathcal{Z}_4$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ u=5^2$;

$=24\mathcal{Z}_{51}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ u\equiv1 \pmod 4$, но $u\neq5^2$;

$=24\mathcal{Z}_{61}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ u\equiv 3 \pmod 4$;

$=0$ при $\alpha=0,\ u\equiv1 \pmod 4$, при $\alpha=0$, $u\equiv 7 \pmod 8$ и при $\alpha=1$.

<u>Следствие</u>. Числа вида

$$4\eta+1,\ 8\eta+7,\ 4\eta+2,$$

и только они, непредставимы формой F_2 .

<u>Теорема</u> 3. Пусть $n=2^{\alpha}7^{\beta}u,\ (u,14)=1,\ u=s^2\varkappa$.

Далее, пусть $\varepsilon=2$ при $\alpha=0$; $\varepsilon=1$ при $\alpha=1$; $\varepsilon=3$ при $\alpha>1$; $\delta=\frac{1}{3}(7^{\frac{\beta+1}{2}}-1)$ при $2\nmid\beta,\ u\equiv 1,9,11,15,23,25 \pmod{28}$, $\delta=\frac{1}{4}7^{\frac{\beta+1}{2}}$ при $2\nmid\beta,\ u\equiv 3,5,13,17,19,27 \pmod{28}$, $\delta=\frac{1}{3}(7^{\frac{\beta}{2}+1}-4)$ при $2|\beta$.

Тогда

$$
\begin{aligned}
r(n;F_3) &= 2\varepsilon\delta\varkappa_1 && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u=s^2;\\
&= 8\varepsilon\delta\varkappa_{21} && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ но } u\neq s^2;\\
&= \varepsilon\delta\varkappa_{27} && \text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4;\\
&= 8\varepsilon\delta\varkappa_{31} && \text{при } 2|\alpha,\ \alpha>0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 8;\\
&= \delta\cdot\varkappa_{37} && \text{при } 2|\alpha,\ \alpha>0,\ 2|\beta,\ u\equiv 5 \pmod 8;\\
&= 4\varepsilon\delta\varkappa_4 && \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u=s^2;\\
&= 8\varepsilon\delta\varkappa_{51} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ но } u\neq s^2;\\
&= \varepsilon\delta\varkappa_{57} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4;\\
&= 8\varepsilon\delta\varkappa_{61} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4;\\
&= \varepsilon\delta\varkappa_{67} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4;\\
&= 0 && \text{при } \alpha=0,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ при}\\
& && \alpha=0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4,
\end{aligned}
$$

$r(n;F_3)=0$ при $2|\alpha,\ \alpha>0,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 8$ и при
$2|\alpha,\ \alpha>0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 7 \pmod 8$.

<u>Следствие</u>. Числа вида

$$49^{r}(4\eta+1),\ 4^{\nu}\cdot 49^{r}(8\eta+1),$$

и только они, непредставимы формой F_3.

<u>Теорема 4</u>. Пусть $n=2^{\alpha}7^{\beta}u,\ (u,14)=1,\ u=s^2\varkappa$.

Далее, пусть
$$\varepsilon=\begin{cases} 3\cdot 7^{\frac{\beta}{2}} & \text{при } u\equiv 3,5,13,17,19,27 \pmod{28},\\ 4(7^{\frac{\beta}{2}}-1) & \text{при } u\equiv 11,15,19,23,25 \pmod{28}.\end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} r(n;F_4)&=2(7^{\frac{\beta}{2}}-1)\chi_1 && \text{при } n=t^2,\ \beta>0;\\ &=2\varepsilon\chi_{21} && \text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ \beta>0,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ но } u\neq t^2;\\ &=\tfrac{2}{3}\varepsilon\chi_{31} && \text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ \beta>0,\ u\equiv 3 \pmod 8;\\ &=2\varepsilon\chi_{51} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2|\beta,\ \beta>0,\ u\equiv 1 \pmod 4;\\ &=2\varepsilon\chi_{61} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2|\beta,\ \beta>0,\ u\equiv 3 \pmod 4;\\ &=\tfrac{1}{3}(7^{\frac{\beta+1}{2}}-4)\chi_{37} && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 5 \pmod 8;\\ &=(7^{\frac{\beta+1}{2}}-4)\chi_{27} && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4;\\ &=(7^{\frac{\beta+1}{2}}-4)\chi_{57} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4;\end{aligned}$$

$$r(n;F_7)=\left(7^{\frac{\beta+1}{2}}-4\right)\mathcal{Z}_{67}$$ при $2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4$;

$=0$ при $2|\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 7 \pmod 8$, при $2|\alpha$,

$2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 8$, при $\beta=0,\ 2\nmid\alpha,\ u\equiv 1,9,11 \pmod{14}$,

при $2|\alpha,\ \beta=0,\ u=11,43,51 \pmod{56}$

и при $2|\alpha,\ \beta=0,\ u\equiv 1,9,25 \pmod{28}$.

<u>Следствие</u>. Числа вида

$$4^{\lambda}49^{\mu}(8\eta+7),\ 4^{\lambda}(28\eta+2),\ 4^{\lambda}(28\eta+18),$$

$$4^{\lambda}(28\eta+22),\ 4^{\lambda}(56\eta+11),\ 4^{\lambda}(56\eta+43),$$

$$4^{\lambda}(56\eta+51),\ 4^{\lambda}(28\eta+1),\ 4^{\lambda}(28\eta+9),\ 4^{\lambda}(28\eta+25)$$

и только они, непредставимы формой F_7.

<u>Теорема 5</u>. Пусть $n=2^{\alpha}3^{\beta}u$, $u=5^{\nu}\varkappa$. Далее, пусть

$$\varepsilon=\begin{cases} 1 & \text{при } \alpha=0,1,2, \\ \left(2^{\frac{\alpha-1}{2}}-1\right) & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ u\equiv 1,17,19 \pmod{24}, \\ 2^{\frac{\alpha-1}{2}} & \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ u\equiv 5,7,13 \pmod{24}, \\ 2^{\frac{\alpha}{2}}-3 & \text{при } 2|\alpha,\ \alpha>2. \end{cases}$$

Тогда

$$r(n;F_5)=2\left(2^{\frac{\alpha+1}{2}}-3\right)\chi_1 \text{ при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2|\beta,\ u=s^2;$$

$$=8\left(2^{\frac{\alpha+1}{2}}-3\right)\chi_{21} \text{ при } 2\nmid\alpha,\alpha>1, 2|\beta, u\equiv 1 \pmod{12}, \text{ но } u\neq s^2;$$

$$=4\left(2^{\frac{\alpha+1}{2}}-3\right)\chi_{23} \text{ при } 2\nmid\alpha,\alpha>1, 2\nmid\beta, u\equiv 3 \pmod 4;$$

$$=8\varepsilon\chi_{31} \quad \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 7 \pmod{12};$$

$$=4\varepsilon\chi_{33} \quad \text{при } 2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4;$$

$$=8\varepsilon\chi_{51} \quad \text{при } 2|\alpha, 2|\beta,\ u\equiv 5 \pmod{12};$$

$$=4\varepsilon\chi_{53} \quad \text{при } 2|\alpha, 2\nmid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4;$$

$$=8\varepsilon\chi_{61} \quad \text{при } 2|\alpha, 2|\beta,\ u\equiv 11 \pmod{12};$$

$$=4\varepsilon\chi_{63} \quad \text{при } 2|\alpha, 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4;$$

$$=0 \quad \text{при } \alpha=0,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ при}$$

$$\alpha=1, 2\nmid\beta, u\equiv 3 \pmod 4, \text{ при } \alpha=0, 2|\beta,$$

$$u\equiv 1 \pmod{12}, \text{ при } \alpha=1,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod{12},$$

$$\text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 6 \quad \text{и}$$

$$\text{при } 2\nmid\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 5 \pmod 6.$$

<u>Следствие.</u> Числа вида

$$9^{\mu}(12\eta+3),\ 9^{\mu}(24\eta+18),\ 9^{\mu}(12\eta+11),$$

$$9^{\mu}(24\eta+2),\ 4^{\lambda}9^{\mu}(6\eta+1),\ 4^{\lambda}9^{\mu}(12\eta+10)$$

и только они, непредставимы формой F_5.

§ 3. В настоящем параграфе рассматривается представление натуральных чисел иррегулярными (см. /7/, стр.49)формами:

$F_6=x^2+3y^2+11z^2+2yz$, $\tilde F_6=3x^2+4y^2+4z^2+2xy+4yz$, $F_7=x^2+7y^2+7z^2+2yz$, $\tilde F_7=3x^2+4y^2+5z^2+4yz$, $F_8=x^2+8y^2+10z^2+8yz$, $\tilde F_8=3x^2+3y^2+9z^2+2xy+2xz-2yz$, $F_9=x^2+5y^2+13z^2+2yz$, $\tilde F_9=4x^2+5y^2+5z^2+4xy+4yz$, $F_{10}=x^2+5y^2+20z^2+4yz$, $\tilde F_{10}=4x^2+5y^2+6z^2+4xz+2yz$, $F_{11}=2x^2+5y^2+13z^2+2yz$, $\tilde F_{11}=5x^2+6y^2+6z^2+4xy+4xz+4yz$, $F_{12}=x^2+6y^2+22z^2+4yz$, $\tilde F_{12}=4x^2+6y^2+7z^2+4xz+4yz$, $F_{13}=x^2+12y^2+12z^2+8y^2$, $\tilde F_{13}=4x^2+5y^2+9z^2+4xy+4xz+2yz$.

Как показали Брандт и Интрау (/6/, стр.I5,25,36,62,93) эти формы принадлежат разным классам одних и тех же двухклассных родов.

Мы со всеми подробностями выводим формулы для числа представлений чисел формами F_6 и $\tilde F_6$. Для остальных форм мы приводим лишь окончательные результаты, которые получаются аналогично.

<u>Теорема 6</u>. I) Имеет место тождество

$$\vartheta(\tau;F_6)=\theta(\tau;F_6)+\vartheta_{01}(\tau;0,8)\,\vartheta_{80}(\tau;0,16)\,\vartheta_{81}(\tau;0,16). \qquad (39)$$

2) Пусть $n=2^{\alpha}u,\ u=s^2\varkappa$. Далее, пусть $\varepsilon=1$ при $\alpha=0$, $\varepsilon=6$ при $\alpha=2$ и $\varepsilon=12$ при $\alpha>2$.

Тогда

$$r(n;F_6)=\rho(n;F_6)+\sum_{\substack{2n=x^2+y^2+8z^2\\ x\equiv y\equiv 1 \pmod 4}}(-1)^{\frac{y-1}{2}+z} \quad \text{при } n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$r(n;\tilde{F}_6)=\rho(n;F_6)-\sum_{\substack{2n=x^2+y^2+8z^2\\ x\equiv y\equiv 1 \pmod 4}}(-1)^{\frac{y-1}{2}+z} \quad \text{при } n\equiv 1 \pmod 4 \qquad (40)$$

$$r(n;F_6)=r(n;\tilde{F}_6)=\rho(n;F_6) \quad \text{при} \quad n\equiv 0,2,3 \pmod 4,$$

где

$$\rho(n;F_6)=6\chi_1 \quad \text{при} \quad 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u=s^2;$$

$$=24\chi_{21} \quad \text{при} \quad 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ но } u\neq s^2;$$

$$=8\chi_{31} \quad \text{при} \quad 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 3 \pmod 8;$$

$$=\varepsilon\chi_4 \quad \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ u=s^2;$$

$$=\varepsilon\chi_{51} \quad \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ но } u\neq s^2;$$

$$=\varepsilon\chi_{61} \quad \text{при} \quad 2\mid\alpha,\ u\equiv 3 \pmod 4;$$

$$=0 \quad \text{при } \alpha=1,3 \text{ и при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 7 \pmod 8.$$

<u>Доказательство.</u> I) Положим

$$\psi(\tau;F_6)=\vartheta(\tau;F_6)-\theta(\tau;F_6)-\vartheta_{01}(\tau;0,8)\,\vartheta_{80}(\tau;0,16)\,\vartheta_{81}(\tau;0,16).$$

Согласно лемме 7, функция $\psi^4(\tau;F_6)$ является целой модулярной формой размерности - 6 относительно подгруппы Γ_0 (128). Действительно, непосредственно видно, что условия (30) выполнены, ибо, в нашем случае $\Delta = 32$.

Если $\alpha\delta \equiv 1 \pmod{128}$, то $\alpha\delta \equiv 1 \pmod 8$, т.е. $\alpha \equiv \delta \equiv 1$ или 3 или 5 или $7 \pmod 8$.

В силу (9),

$$\vartheta_{8\alpha,0}(\tau; 0,16) = \vartheta_{\pm 8+8(\alpha\mp 1),0}(\tau; 0,16) = \vartheta_{80}(\tau; 0,16),$$

$$\vartheta_{8\alpha,1}(\tau; 0,16) = \vartheta_{\pm 8+8(\alpha\mp 1),0}(\tau; 0,16) = \vartheta_{81}(\tau; 4(\alpha\mp 1), 16) =$$

$$= \begin{cases} \vartheta_{81}(\tau; 0,16) & \text{при } \alpha \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ -\vartheta_{81}(\tau; 0,16) & \text{при } \alpha \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Далее

$$\prod_{k=1}^{3} \left(\frac{N_{ki}}{|\delta|}\right) = \left(\frac{4\cdot 8\cdot 8}{|\delta|}\right) = \begin{cases} \left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right) & \text{при } \delta \equiv \pm 1 \pmod 8, \\ -\left(\frac{\Delta}{|\delta|}\right) & \text{при } \delta \equiv \pm 3 \pmod 8. \end{cases}$$

Таким образом, выполняется и равенство (31).

Согласно лемме I, функция $\psi^4(\tau; F_6)$ будет тождественно равна нулю, если в ее разложении по степеням $Q = e^{2\pi i\tau}$ коэффициенты при Q^n равны для всех $n \leq 96$. Для этого достаточно показать, что в разложении $\psi(\tau; F_6)$ по степеням Q все коэффициенты при $Q^n (n \leq 24)$ равны нулю.

Положив в леммах 7 и I0 работы /5/: $a_0=1,\ b_0=3,\ \Delta=32$,

$$k=1,\ D=\frac{\Delta}{k}=32,\ \eta_0=0,\ \mu_0=0,\ a_1=96,\ a_2=3,\ a_3=1,\ \gamma=\gamma_1=5,\ \gamma_2=\gamma_3=0,$$

$$b_1=b_2=3,\ b_3=1,\ n=2^{\alpha}m,\ 32n=2^{\alpha+5}u=\tau^2\omega,\ u=s^2\varkappa,\ v=1,\ \text{т.е. } m=u, \qquad (4I)$$

получим, что

$$\rho(n;F_6)= \qquad (42)$$

$$=2^{\frac{\alpha+1}{2}+1}\frac{\varkappa^{1/2}}{\pi}\chi_2\,\mathcal{L}(1,-\omega)\sum_{d/s}d\prod_{p/d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

где

$\chi_2=1$ при $\alpha=0$;

$=0$ при $\alpha=1,3$ и при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3$, $u\equiv 7\pmod 8$;

$=3$ при $\alpha=2,4$;

$=3\cdot 2^{-\frac{\alpha}{2}+2}$ при $2/\alpha,\ \alpha>4$;

$=3\cdot 2^{-\frac{\alpha-1}{2}+1}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ m\equiv 1\pmod 4$;

$=2^{-\frac{\alpha-1}{2}+2}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ m\equiv 3\pmod 8$.

Согласно (4I)

I) при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u=s^2$ имеем: $\omega=\varkappa=1$;

2) при $2/\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 1\pmod 4$, но $u\neq s^2$, имеем:

$\omega=\varkappa\equiv u\equiv 1\pmod 4,\ \omega>1$;

3) при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 3\pmod 8$ имеем: $\omega=\varkappa\equiv u\equiv 3\pmod 4$;

4) при $2|\alpha,\ u=s^2$ имеем: $\omega=2x=2$;

5) при $2|\alpha,\ u\equiv 1 \pmod 4$, но $u\neq s^2$, имеем:

$\omega=2x\equiv 2u\equiv 2 \pmod 8$, $\omega>2$;

6) при $2|\alpha,\ u\equiv 3 \pmod 4$ имеем: $\omega=2x\equiv 2u\equiv 6 \pmod 8$;

7) при $\alpha=1,3$ и при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 7 \pmod 8$ имеем: $X_2=0$.

Приняв во внимание сказанное, из формулы (42), выражений для X_2, $Z(1,-\omega)$, Z_1, Z_4 и Z_{kq} (при $q=1$) после некоторых вычислений получим приведенные в формулировке теоремы формулы для $\rho(n;F_6)$. Вычислив по этим формулам значения $\rho(n;F_6)$ для всех $n\leq 24$, получим

$$\Theta(\tau;F_6)=1+Q+2Q^3+6Q^4+2Q^5+4Q^7+3Q^9+2Q^{11}+12Q^{12}+$$
$$+6Q^{13}+4Q^{15}+12Q^{16}+4Q^{17}+6Q^{19}+12Q^{20}+4Q^{21}+4Q^{23}+7Q^{25}+\cdots$$

Из (I) следует

$$\vartheta(\tau;F_6)=1+2Q+2Q^3+6Q^4+4Q^7+2Q^9+2Q^{11}+12Q^{12}+8Q^{13}+$$
$$+4Q^{15}+12Q^{16}+4Q^{17}+6Q^{19}+12Q^{20}+8Q^{21}+4Q^{23}+6Q^{25}+\cdots$$

Согласно (4), имеем

$$\vartheta_{01}(\tau;0,8)\,\vartheta_{80}(\tau;0,16)\,\vartheta_{81}(\tau;0,16)=$$
$$=\sum_{m_1,m_2,m_3=-\infty}^{+\infty}(-1)^{m_2+m_3}\,Q^{\frac{1}{2}(4m_1+1)^2+\frac{1}{2}(4m_2+1)^2+4m_3^2}=$$

$$= Q - 2Q^5 - Q^9 + 2Q^{13} + 4Q^{21} - Q^{25} + \cdots \qquad (43)$$

Из этих разложений следует, что все коэффициенты при $Q^n (n \le 24)$ в разложении функции $\psi(\tau; F_6)$ по степеням Q равны нулю. Итак, тождество (39) доказано.

2) Пусть $\nu(n)$ обозначает коэффициент при Q^n в разложении функции

$$\vartheta_{01}(\tau; 0,8)\,\vartheta_{80}(\tau; 0,16)\,\vartheta_{81}(\tau; 0,16)$$

по степеням Q.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях Q в обеих частях тождества (39) и принимая во внимание (I) и (22) из работы /5/ получим, что

$$r(n; F_6) = \rho(n; F_6) + \nu(n), \qquad (44)$$
$$r(n; \widetilde{F}_6) = \rho(n; F_6) - \nu(n)$$

(последнее равенство справедливо согласно хорошо известному результату Зигеля о числе представлений родом квадратичных форм, ибо формы F_6 и $\widetilde{F}_6$ принадлежат разным классам одного и того же двухклассного рода).

Согласно (43),

$$\nu(n) = \sum_{n = \frac{1}{2}(4m_1+1)^2 + \frac{1}{2}(4m_2+1)^2 + 4m_3^2} (-1)^{m_2+m_3} = \sum_{\substack{2n = x^2+y^2+8z^2 \\ x \equiv y \equiv 1 \pmod 4}} (-1)^{\frac{x-1}{2}+z} \quad \text{при} \quad n \equiv 1 \pmod 4$$

$$= 0 \qquad \text{при} \quad n \equiv 0, 2, 3 \pmod 4.$$

Из (44) получаем утверждаемое.

Следствие. Среди четных натуральных чисел, числа вида

$$4\eta+2,\ 16\eta+8,\ 4^{\nu}(64\eta+56),$$

и только они, непредставимы формами F_6 и $\widetilde{F}_6$.

Доказательство. Утверждаемое следует из (40) и последней строки значений $\rho(n;F_6)$, приведенных в формулировке теоремы 6.

Теорема 7. Имеет место тождество

$$\vartheta(\tau;F_7)=Q(\tau;F_7)+\vartheta_{21}(\tau;0,6)\,\vartheta_{41}(\tau;0,8)\,\vartheta_{80}(\tau;0,12).$$

2) Пусть $n=2^{\alpha}3^{\beta}u,\ (u,6)=1,\ u=s^2\varkappa$. Далее, пусть

$\varepsilon_1=1$ при $\alpha=0$, $\varepsilon_1=2$ при $\alpha=2$ и $\varepsilon_1=2^{\frac{\alpha}{2}}\cdot 5-6$ при $2|\alpha,\ \alpha>2$; $\varepsilon_2=1$ при $\alpha=0$, $\varepsilon_2=2$ при $\alpha=2$, $\varepsilon_2=5\cdot 2^{\frac{\alpha}{2}}$ при $2|\alpha,\alpha>2$, $u\equiv 1,3\pmod 8$ и $\varepsilon_2=5\cdot 2^{\frac{\alpha}{2}}-4$ при $2|\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 5,7\pmod 8$. Тогда

$$r(n;F_7)=\rho(n;F_7)+\sum_{\substack{12n=x^2+2y^2+3z^2\\ x\equiv 1\pmod 6,\ 2|y,\ z\equiv 1\pmod 4}}(-1)^{\frac{x-1}{6}+\frac{z-1}{4}} \qquad \text{при } 2\nmid n,$$

$$r(n;\widetilde{F}_7)=\rho(n;F_7)-\sum_{\substack{12n=x^2+2y^2+3z^2\\ x\equiv 1\pmod 6,\ 2|y,\ z\equiv 1\pmod 4}}(-1)^{\frac{x-1}{6}+\frac{z-1}{4}} \qquad \text{при } 2\nmid n,$$

$$r(n;F_7)=r(n;\widetilde{F}_7)=\rho(n;F_7) \qquad \text{при } 2|n,$$

где

$$
\begin{aligned}
\rho(n;F_7)&=\varepsilon_1\chi_1 && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u=s^2;\\
&=4\varepsilon_1\chi_{21} && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod{12}, \text{ но } u\neq s^2;\\
&=2\varepsilon_2\chi_{31} && \text{при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 7 \pmod{12};\\
&=4(2^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot 5-6)\chi_{51} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 5 \pmod{12};\\
&=4(2^{\frac{\alpha-1}{2}}\cdot 5-6)\chi_{61} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 11 \pmod{12};\\
&=2\varepsilon_1\chi_{23} && \text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4;\\
&=\varepsilon_2\chi_{33} && \text{при } 2|\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4;\\
&=2\cdot(5\cdot 2^{\frac{\alpha-1}{2}}-6)\chi_{53} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4;\\
&=2(5\cdot 2^{\frac{\alpha-1}{2}}-6)\chi_{63} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4;\\
&=0 && \text{при } \alpha=1, \text{ при } 2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 5 \pmod 6 \text{ и}\\
& && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>1,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 6.
\end{aligned}
$$

Следствие. Числа вида

$$4\eta+2,\ 4^{\lambda}9^{\mu}(18\eta+15) \text{ и } 4^{\lambda}9^{\mu}(12\eta+2)$$

непредставимы формами F_7 и $\widetilde{F}_7$.

Теорема 8. Имеет место тождество

$$\vartheta(\tau;F_8)=Q(\tau;F_8)+\vartheta_{01}(\tau;0,4)\vartheta_{80}(\tau;0,16)\vartheta_{81}(\tau;0,16).$$

2) Пусть $n=2^{\alpha}u$, $u=s^2$. Далее, пусть $\varepsilon=1$ при $\alpha=0,1,3$; $\varepsilon=2$ при $\alpha=2,4,5$ и $\varepsilon=6$ при $\alpha>5$. Тогда

$$r(n;F_8)=\rho(n;F_8)+\sum_{\substack{2n=x^2+y^2+4z^2\\ x\equiv y\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)}}(-1)^{\frac{y-1}{4}+z} \qquad \text{при } 2\nmid n,$$

$$r(n;\tilde F_8)=\rho(n;F_8)-\sum_{\substack{2n=x^2+y^2+4z^2\\ x\equiv y\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)}}(-1)^{\frac{y-1}{4}+z} \qquad \text{при } 2\nmid n,$$

$$r(n;F_8)=r(n;\tilde F_8)=\rho(n;F_8) \qquad \text{при } 2|n,$$

где

$\rho(n;F_8)=\varepsilon\mathcal{Z}_1$ при $2|\alpha$, $u=s^2$;

$=4\varepsilon\mathcal{Z}_{21}$ при $\alpha=0,2$, $u\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8)$, но $u\neq s^2$, и при $2|\alpha, \alpha>2, u\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, но $u\neq s^2$;

$=2\varepsilon\mathcal{Z}_{31}$ при $\alpha=0,2$, $u\equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8)$;

$=24\mathcal{Z}_{31}$ при $2|\alpha$, $\alpha>2$, $u\equiv 3 (\mathrm{mod}\, 8)$;

$=2\varepsilon\mathcal{Z}_4$ при $2\nmid\alpha$, $\alpha>2$, $u=s^2$;

$=4\varepsilon\mathcal{Z}_{51}$ при $\alpha=1$, $u\equiv 7 (\mathrm{mod}\, 8)$ и при $2\nmid\alpha$, $\alpha>1, u\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$, но $u\neq s^2$;

$=4\mathcal{Z}_{61}$ при $\alpha=1$, $u\equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$;

$=0$ при $\alpha=0,2$, $u\equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8)$, при $\alpha=1$, $u\equiv 1,3 (\mathrm{mod}\, 8)$, при $2|\alpha$, $u\equiv 7 (\mathrm{mod}\, 8)$.

Следствие. Числа вида

$$8\eta+5,\quad 32\eta+20,\quad 16\eta+2,\quad 16\eta+6 \quad \text{и} \quad 4^{\lambda}(8\eta+7)$$

непредставимы формами F_8 и $\tilde F_8$.

ТЕОРЕМА 9. I) Имеет место тождество

$$\vartheta(\tau;F_9)=Q(\tau;F_9)+\vartheta_{01}^2(\tau;0,16)\vartheta_{01}(\tau;0,32).$$

2) Пусть $n=2^{\alpha}u$, $u=s^2\varkappa$. Далее, пусть $\varepsilon=1$ при $\alpha=0,1$; $\varepsilon=2$ при $\alpha=2,3,5$; $\varepsilon=4$ при $\alpha=4$ и $\varepsilon=6$ при $\alpha>5$. Тогда

$$r(n;F_9)=\rho(n;F_9)+\sum_{\substack{2n=x^2+y^2+2z^2\\ x\equiv y\equiv 1 \pmod 4,\ z\equiv 0 \pmod 4}}(-1)^{\frac{x+y+z-2}{4}} \quad \text{при } n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$r(n;\tilde{F}_9)=\rho(n;F_9)-\sum_{\substack{2n=x^2+y^2+2z^2\\ x\equiv y\equiv 1 \pmod 4,\ z\equiv 0 \pmod 4}}(-1)^{\frac{x+y+z-2}{4}} \quad \text{при } n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$r(n;F_9)=r(n;\tilde{F}_9)=\rho(n;F_9) \quad \text{при } n\equiv 0,2,3 \pmod 4,$$

где

$$\begin{aligned}
\rho(n;F_9)&=\varepsilon\mathcal{Z}_1 && \text{при } 2/\alpha,\ u=s^2;\\
&=4\varepsilon\mathcal{Z}_{21} && \text{при } 2/\alpha,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ но } u\neq s^2;\\
&=8\mathcal{Z}_{31} && \text{при } 2/\alpha,\ \alpha>4,\ u\equiv 3 \pmod 8;\\
&=2\varepsilon\mathcal{Z}_4 && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u=s^2;\\
&=4\varepsilon\mathcal{Z}_{51} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 1 \pmod 4, \text{ но } u\neq s^2;\\
&=4\varepsilon\mathcal{Z}_{61} && \text{при } 2\nmid\alpha,\ u\equiv 3 \pmod 4;\\
&=0 && \text{при } \alpha=0,2,4,\ u\equiv 3 \pmod 4, \text{ при } \alpha=1,3,\ u\equiv 1 \pmod 4
\end{aligned}$$

$\rho(n;F_9)=0$ и при $2|\alpha,\ \alpha>4,\ u\equiv 7 \pmod 8$.

Следствие. Числа вида

$$4\eta+3,\ 16\eta+12,\ 64\eta+48,\ 8\eta+2,\ 32\eta+8 \text{ и } 4^{\nu}(128\eta+112)$$

непредставимы формами F_9 и $\tilde{F}_9$.

Теорема 10. 1) Имеет место тождество

$$\vartheta(\tau;F_{10})=Q(\tau;F_{10})+\vartheta_{80}(\tau;0,16)\vartheta_{81}(\tau;0,16)\vartheta_{01}(\tau;0,24).$$

2) Пусть $n=2^{\alpha}3^{\beta}u,\ (u,6)=1,\ u=s^2\varkappa$. Далее, пусть $\varepsilon=1$ при $\alpha=0,1$; $\varepsilon=2$ при $\alpha=2,3,4$; $\varepsilon=3$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3$ и $\varepsilon=6$ при $2|\alpha,\ \alpha>4$; $\delta=3^{\frac{\beta}{2}+1}-2$ при $2|\alpha$, $\delta=2(3^{\frac{\beta+1}{2}}-1)$ при $2\nmid\alpha,\ u\equiv\pm1 \pmod{12}$ и $\delta=3^{\frac{\beta+1}{2}}$ при $2\nmid\beta,\ u\equiv\pm5 \pmod{12}$. Тогда

$$r(n;F_{10})=\rho(n;F_{10})+\sum_{\substack{2n=x^2+y^2+24z^2\\ x\equiv y\equiv 1 \pmod 4}}(-1)^{\frac{x-1}{4}+z} \quad \text{при } n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$r(n;\tilde{F}_{10})=\rho(n;F_{10})-\sum_{\substack{2n=x^2+y^2+24z^2\\ x\equiv y\equiv 1 \pmod 4}}(-1)^{\frac{x-1}{4}+z} \quad \text{при } n\equiv 1 \pmod 4,$$

$$r(n;F_{10})=r(n;\tilde{F}_{10})=\rho(n;F_{10}) \quad \text{при } n\equiv 0,2,3 \pmod 4,$$

где

$\rho(n;F_{10}) = \varepsilon\delta Z_1$ при $2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u=s^2$;

$=4\varepsilon\delta Z_{21}$ при $2\nmid\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4$, но $u\neq s^2$;

$=4\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}} Z_{31}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 11 \pmod{24}$;

$=8(3^{\frac{\beta+1}{2}}-1)$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 19 \pmod{24}$;

$=\varepsilon\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}} Z_4$ при $2|\alpha,\ \alpha>2,\ 2\nmid\beta,\ u=s^2$;

$=2\varepsilon\cdot 3^{\frac{\beta+1}{2}} Z_{51}$ при $2|\alpha,\ \alpha>2,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod{12}$, но $u\neq s^2$;

$=4\varepsilon(3^{\frac{\beta+1}{2}}-1)Z_{51}$ при $2|\alpha,\ \alpha>2,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 5 \pmod{12}$;

$=2\varepsilon\delta Z_{61}$ при $2|\alpha,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4$;

$=2\varepsilon\delta Z_{23}$ при $2\nmid\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4$;

$=2(3^{\frac{\beta}{2}+1}-2)Z_{33}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 8$;

$=\varepsilon\delta Z_{53}$ при $2|\alpha,\ \alpha>2,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4$;

$=\varepsilon\delta Z_{63}$ при $2|\alpha,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4$;

$=0$ при $\alpha=0,2,\ 2|\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4$, при $\alpha=0,2,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4$, при $\alpha=1,3,\ 2|\beta,\ u\equiv 1 \pmod 4$, при $\alpha=1,3,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 3 \pmod 4$, при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 5 \pmod 8$ и при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ 2\nmid\beta,\ u\equiv 7,23 \pmod{24}$.

<u>Следствие.</u> Числа вида

$$9^{\mu}(4\eta+3),\ 9^{\mu}(16\eta+12),\ 9^{\mu}(8\eta+2),\ 9^{\mu}(32\eta+8)\ и\ 4^{\nu}9^{\nu}(64\eta+40)$$

непредставимы формами F_{10} и $\tilde{F}_{10}$.

Теорема II. I) Имеет место тождество

$$\vartheta(\tau;F_{11})=\Theta(\tau;F_{11})-\vartheta_{41}(\tau;0,12)\vartheta_{81}(\tau;0,16)\vartheta_{32,1}(\tau;0,96).$$

2) Пусть $n=2^{\alpha}u,\ u=s^2\varkappa$. Далее, пусть $\varepsilon=1$ при $\alpha=0,1$, $\varepsilon=2$ при $\alpha=2,3,4,5$, $\varepsilon=4$ при $\alpha>6$ и $\varepsilon=12$ при $\alpha=6$. Тогда

$$r(n;F_{11})=\rho(n;F_{11})-\sum_{\substack{6n=x^2+2y^2+3z^2\\ x\equiv1(\mathrm{mod}\,6),\ y\equiv2(\mathrm{mod}\,12),\ z\equiv1(\mathrm{mod}\,4)}}(-1)^{\frac{x-1}{6}+\frac{y-2}{12}+\frac{z-1}{4}} \quad \text{при } n\equiv2(\mathrm{mod}\,4),$$

$$r(n;\tilde{F}_{11})=\rho(n;F_{11})+\sum_{\substack{6n=x^2+2y^2+3z^2\\ x\equiv1(\mathrm{mod}\,6),\ y\equiv2(\mathrm{mod}\,12),\ z\equiv1(\mathrm{mod}\,4)}}(-1)^{\frac{x-1}{6}+\frac{y-2}{12}+\frac{z-1}{4}} \quad \text{при } n\equiv2(\mathrm{mod}\,4),$$

$$r(n;F_{11})=r(n;\tilde{F}_{11})=\rho(n;F_{11}) \quad \text{при } n=0,1,2,3(\mathrm{mod}\,4),$$

где

$$\rho(n;F_{11})=6\chi_1 \quad \text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>5,\ u=s^2;$$

$$=\varepsilon\chi_1 \quad \text{при } \alpha=1,3,5,\ u=s^2;$$

$$=4\varepsilon\chi_{21} \quad \text{при } \alpha=1,3,\ u\equiv1(\mathrm{mod}\,8),\ \text{но } u\neq s^2,\ \text{и}$$

$$\text{при } 2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv1(\mathrm{mod}\,4),\ \text{но } u\neq s^2;$$

$\rho(n;F_{11}) = 2\varepsilon\mathcal{Z}_{31}$ при $2\nmid\alpha$, $u\equiv 3 \pmod 8$;

$= \varepsilon\mathcal{Z}_{4}$ при $2|\alpha$, $\alpha>2$, $u=s^2$;

$= 2\varepsilon\mathcal{Z}_{51}$ при $\alpha=0,2$, $u\equiv 5 \pmod 8$ и при $2|\alpha$, $\alpha>2$, $u\equiv 1 \pmod 4$, но $u\neq s^2$;

$= 2\varepsilon\mathcal{Z}_{61}$ при $2|\alpha$, $\alpha>2$, $u\equiv 3 \pmod 4$;

$= 0$ при $\alpha=0,2$, $u\equiv 1,3 \pmod 8$, при $\alpha=1,3$, $u\equiv 5 \pmod 8$ и при $2\nmid\alpha$, $u\equiv 7 \pmod 8$.

<u>Следствие.</u> Числа вида

$8\eta+1, 8\eta+3, 32\eta+4, 32\eta+12, 16\eta+10, 64\eta+40$ и $4^{\lambda}(16\eta+14)$

непредставимы формами F_{11} и $\widetilde{F}_{11}$.

<u>Теорема 12.</u> 1) Имеет место тождество

$$\vartheta(\tau;F_{12}) = \theta(\tau;F_{12}) + \vartheta_{01}(\tau;0,32)\vartheta_{81}(\tau;0,24)\vartheta_{16,1}(\tau;0,48).$$

2) Пусть $n=2^{\alpha}u$, $u=s^2\varkappa$. Далее, пусть $\varepsilon=1$ при $\alpha=0,1$, $\varepsilon=2$ при $\alpha=2,3,4$, $\varepsilon=4$ при $2\nmid\alpha$, $\alpha>3$ и при $\alpha=6$, $\varepsilon=12$ при $2|\alpha$, $\alpha>6$. Тогда

$$r(n;F_{12}) = \rho(n;F_{12}) + \sum_{\substack{3n=x^2+2y^2+3z^2 \\ x\equiv y\equiv 1 \pmod 6,\ z\equiv 0 \pmod 4}} (-1)^{\frac{x-1}{6}+\frac{y-1}{6}+\frac{z}{4}} \quad \text{при } n\equiv 1 \pmod 8,$$

$$r(n;\tilde{F}_{12})=\rho(n;F_{12})-\sum_{\substack{3n=x^2+2y^2+3z^2\\ x\equiv y\equiv 1 \pmod 6,\ z\equiv 0 \pmod 4}}(-1)^{\frac{x-1}{6}+\frac{y-1}{6}+\frac{z}{4}}$$ при $n\equiv 1 \pmod 8$,

$$r(n;F_{12})=r(n;\tilde{F}_{12})=\rho(n;F_{12})$$ при $n\not\equiv 1 \pmod 8$,

где

$\rho(n;F_{12})=2\mathcal{L}_1$ при $\alpha=5,\ u=s^2$;

$=6\mathcal{L}_1$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>5,\ u=s^2$;

$=4\varepsilon\mathcal{L}_{21}$ при $\alpha=1,3,\ u\equiv 5 \pmod 8$;

$=8\mathcal{L}_{21}$ при $\alpha=5,\ u\equiv 1 \pmod 4$, но $u\neq s^2$;

$=24\mathcal{L}_{21}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>5$, но $u\neq s^2$;

$=2\varepsilon\mathcal{L}_{31}$ при $2\nmid\alpha,\ u\equiv 3 \pmod 8$;

$=\varepsilon\mathcal{L}_4$ при $2|\alpha,\ u=s^2$;

$=2\varepsilon\mathcal{L}_{51}$ при $\alpha=0,2,\ u\equiv\pm 1 \pmod 8$, но $u\neq s^2$, и при $2|\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 1 \pmod 4$, но $u\neq s^2$;

$=2\varepsilon\mathcal{L}_{61}$ при $2|\alpha,\ \alpha>2,\ u\equiv 3 \pmod 4$;

$=0$ при $\alpha=0,2,\ u\equiv\pm 3 \pmod 8$, при $\alpha=1,3,\ u\equiv 1 \pmod 8$ и при $2\nmid\alpha,\ u\equiv 7 \pmod 8$.

Следствие. Числа вида

$$8\eta+3,\ 8\eta+5,\ 32\eta+12,\ 32\eta+20,\ 16\eta+2,\ 64\eta+8 \text{ и } 4^{\lambda}(16\eta+14)$$

непредставимы формами F_{12} и $\widetilde{F}_{12}$.

Теорема 13. 1) Имеет место тождество

$$\vartheta(\tau;F_{13})=\theta(\tau;F_{13})+\vartheta_{41}(\tau;0,12)\vartheta_{81}(\tau;0,16)\vartheta_{81}(\tau;0,24).$$

2) Пусть $n=2^{\alpha}u,\ 2\nmid u,\ u=s^2$. Далее, пусть $\varepsilon=1$ при $\alpha=2$, $\varepsilon=6$ при $\alpha=4$ и $\varepsilon=3$ при $\alpha>4$.

Тогда

$$r(n;F_{13})=\rho(n;F_{13})+\sum_{\substack{6n=x^2+2y^2+3z^2\\ x\equiv y\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6),\ z\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)}}(-1)^{\frac{x+y+z+1}{2}} \quad \text{при } n\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4),$$

$$r(n;\widetilde{F}_{13})=\rho(n;F_{13})-\sum_{\substack{6n=x^2+2y^2+3z^2\\ x\equiv y\equiv 1 (\mathrm{mod}\, 6),\ z\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)}}(-1)^{\frac{x+y+z+1}{2}} \quad \text{при } n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, 4),$$

$$r(n;F_{13})=r(n;\widetilde{F}_{13})=\rho(n;F_{13}) \quad \text{при } n\equiv 0,2,3(\mathrm{mod}\, 4),$$

где

$\rho(n;F_{13})=2\varepsilon\mathcal{Z}_1$ при $2\mid\alpha,\ \alpha>0,\ u=s^2$ и при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u=s^2$;

$\rho(n;F_{13}) = 24\chi_{21}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 1 \pmod 4$, но $u\neq s^2$;

$= 8\chi_{31}$ при $2\nmid\alpha,\ \alpha>3,\ u\equiv 3 \pmod 8$;

$= \chi_4$ при $n=s^2$;

$= 4\epsilon\chi_{51}$ при $2|\alpha,\ \alpha>0,\ u\equiv 1 \pmod 4$, но $u\neq s^2$;

$= 2\chi_{51}$ при $n\equiv 1 \pmod 4$, но $n\neq s^2$;

$= 4\epsilon\chi_{61}$ при $2|\alpha,\ \alpha>0,\ u\equiv 3 \pmod 4$;

$= 0$ при $\alpha=1,3$, при $2\nmid\alpha,\alpha>3, u\equiv 7 \pmod 8$

и при $n\equiv 3 \pmod 4$.

<u>Следствие</u>. Числа вида

$$4\eta+2,\ 16\eta+8,\ 4^{\lambda}(64\eta+56) \text{ и } 4\eta+3$$

непредставимы формами F_{13} и $\tilde{F}_{13}$.

Поступила I0.УП.I979

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

I. Г.А.Ломадзе. Труды Тбилисского государственного университета, II7, I966, 7-43.

2. Г.А.Ломадзе. Acta Arithmetica, I9,I97I,267-305;387-407.

3. Г.А.Ломадзе. Acta Arithmetica, 34,1978,131-162.

4. Л.А.Сулаквелидзе. Труды Тбилисского университета, 185, 1977, 5-42.

5. Л.А.Сулаквелидзе, Труды Тбилисского университета,189,1977, 29-52.

6. H.Brandt-O.Intrau. Tabellen reduzierter, positiver ternärer quadratischer Formen. Berlin. 1958.

7. L.E. Dickson. Modern elementary theory of numbers. Chicago. 1939.

8. E.Hecke. Mathematische Werke. Göttingen. 1959, 789-918.

9. H.D.Kloosterman. Annals of Mathematics, 47, 1946, 317-375.

10. G.Lomadze. Acta Arithmetica, 6, 1961, 225-275.

11. C.L.Siegel. Annals of Mathematics, 36,1935, 527-606.

ლ.სულაქველიძე

რიცხვთა წარმოდგენის შესახებ დადებითი სამცვლადიანი კვადრატული ფორმებით, III

რეზიუმე

მიღებულია ფორმულები ნატურალურ რიცხვთა წარმოდგენათა რაოდენობისათვის დადებითად განსაზღვრული სამცვლადიანი კვადრატული ფორმებით როგორც ერთკლასიანი, ისე მრავალკლასიანი გვარებიდან.

L. Sulakvelidze

ON THE REPRESENTATIONS OF NUMBERS BY POSITIVE TERNARY QUADRATIC FORMS, III

Summary

Formulae are obtained for the number of representation of positive integers by some positive ternary quadratic forms which belong both to one and multi-class genera.

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета
თბილისის შრომის წითელი დროშის ორდენოსანი სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
214, 1980.

УДК 511.4

О ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМАХ ТИПА $(-4, q, 1)$

К.Ш.Шавгулидзе

В настоящей работе мы будем пользоваться терминологией и результатами Э.Гекке /I/. Эти результаты будут оформулированы в виде лемм.

М.Эйхлер (/2/, стр. 234-235) доказал, что все параболические формы типа $(-k, q, 1)$ (здесь и всюду в дальнейшем k - четное натуральное число, q - нечетное простое число) представимы в виде линейных комбинаций обобщенных кватернарных тэта-рядов. Известно (/I/, стр.899), что максимальное число линейно независимых параболических форм типа $(-4, q, 1)$ равно 3 при $q = 13$, равно 4 при $q = 19$ и равно 5 при $q = 23$. Методом работы /3/ мы находим эти I2 параболических форм в виде обобщенных кватернарных тэта-рядов и, таким образом, в явном виде строим базисы пространств параболических форм типа $(-4, q, 1)$ при $q = 13$, I9 и 23. Далее, показываем как при помощи построенных базисов можно получать формулы для числа представлений произвольных натуральных чисел квадратичными формами типа $(-4, q, 1)$ при $q = 13$, 19 и 23.

Следует отметить, что еще Л.Коган (/4/, стр.142-146) вывел формулы для числа представлений натуральных чисел несколькими квадратичными формами типа $(-4, 11, 1)$ в случае, когда $(n, 11) = 1$. Затем А.Сагинтаев /5/ вывел формулы для числа представлений натуральных чисел n несколькими квадратичными формами типа $(-4, 17, 1)$ также лишь когда $(n, 17) = 1$. Формулы для числа представлений произвольных натуральных чисел n квадратичными формами типа $(-4, q, 1)$ при $q = 5, 7, 11$ выведены Р.Гонгадзе /6/.

§ 1. Пусть

$$Q(x) = Q(x_1, x_2, \ldots, x_f) \sum_{1 \le r \le s \le f} b_{rs} x_r x_s$$

- положительная квадратичная форма от f (f - четное) переменных с целыми коэффициентами b_{rs}. Далее, пусть $\mathcal{D}$ - определитель квадратичной формы

$$2Q(x) = \sum_{r,s=1}^{f} a_{rs} x_r x_s \quad (a_{rr} = 2b_{rr};\ a_{rs} = a_{sr} = b_{rs},\ r < s);$$

A_{rs} - алгебраические дополнения элементов a_{rs} в $\mathcal{D}$, Δ - дискриминант квадратичной формы $Q(x)$, т.е. $\Delta = (-1)^{\frac{f}{2}} \mathcal{D}$; $\delta = \text{о.н.д.}\left(\frac{A_{rr}}{2}, A_{rs}\right) (r, s = 1, 2, \ldots, f)$; $N = \frac{\mathcal{D}}{\delta}$ - ступень квадратичной формы $Q(x)$; $\chi(d)$ - характер квадратичной формы $Q(x)$. Следуя Э.Гекке /1/ (стр.846), будем говорить, что $Q(x)$ является квадратичной формой типа $\left(-\frac{f}{2}, N, \chi(d)\right)$.

Если $\chi(d)\equiv 1$, то дискриминант формы $Q(x)$ будет полным квадратом /I/ (стр.874). Пусть, наконец, $\mathcal{P}_\nu(x) = \mathcal{P}_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_f)$ - шаровая функция ν -го порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

Лемма I (/I/, стр.846). При заданных f и N существует лишь конечное число дискриминантов квадратичных форм. Они являются делителями числа N^f.

Лемма 2 (/I/, стр.853). Среди f^2 однородных квадратичных полиномов от f переменных

$$\varphi_{rs} = x_r x_s - \frac{A_{rs}}{fD}\cdot 2Q(x) \quad (r, s = 1, 2, \ldots, f)$$

имеется точно $\frac{f(f+1)}{2}-1$ линейно независимых, образующих базис пространства шаровых функций второго порядка относительно квадратичной формы $Q(x)$.

Лемма 3 (/I/, стр.854). Пусть $Q(x)$ - квадратичная форма типа $(-\frac{f}{2}, N, \chi(d))$. Тогда обобщенный f-кратный тэта-ряд

$$\vartheta(\tau, \mathcal{P}_\nu(x), Q(x)) = \sum_{x\in Z^f} \mathcal{P}_\nu(x)\, z^{Q(x)} \qquad \text{(I)}$$

является параболической формой типа $(-(\frac{f}{2}+\nu), N, \chi(d))$.

Здесь и всюду в дальнейшем предполагаем, что $z = e^{2\pi i\tau}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$.

Ввиду того, что мы собираемся искать параболические формы типа (-4, q ,I) в виде обобщенных кватернарных тэта-рядов, то мы всюду будем брать

$$f = 4 \quad \text{и} \quad \nu = 2.$$

I.I. Переходим к нахождению параболических форм типа (-4,I3,I). Согласно лемме I, дискриминанты квадратичных форм типа (-2,I3,I) надо искать среди квадратных делителей числа I3 ^{4}. Но ни одной такой формы пока что не известно.

Однако нам удалось обнаружить, что форма

$$Q_1 = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_4 + \tag{2}$$
$$+ x_2x_3 + x_2x_4 + 2x_3x_4$$

является приведенной кватернарной квадратичной формой дискриминанта I3^2. Для этой формы имеем: $\Delta = D = 13^2$, $A_{11} = 104$,

$$A_{12} = -26,\ A_{13} = 13,\ A_{14} = A_{23} = A_{34} = -13,\ A_{22} = A_{33} = 52;$$

$$A_{24} = 0,\ A_{44} = 26, \quad \text{т.е. } \delta = 13,\ N = 13,\ \chi(d) = 1.$$

Следовательно, форма Q_1 является квадратичной формой типа (-2, I3,I). Согласно лемме 2,

$$\varphi_{11} = x_1^2 - \frac{4}{13}Q_1, \tag{3}$$

$$\varphi_{12} = x_1x_2 + \frac{1}{13}Q_1, \tag{4}$$

$$\varphi_{13} = x_1x_3 - \frac{1}{26}Q_1. \tag{5}$$

Уравнение

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + \tag{6}$$
$$+ 2x_3x_4 = n$$

имеет следующие решения:

1) при $n=1$

$$x_1=\pm 1,\ \ x_2=x_3=x_4=0,$$

т.е. всего 2 решения;

2) при $n=2$

$$x_1=x_3=x_4=0,\ \ x_2=\pm 1,$$

$$x_1=x_2=x_4=0,\ \ x_3=\pm 1,$$

$$x_1=\pm 1,\ \ x_2=\mp 1,\ \ x_3=x_4=0,$$

т.е. всего 6 решений;

3) при $n=3$

$$x_1=x_3=\pm 1,\ \ x_2=x_4=0,$$

$$x_1=\pm 1,\ \ x_2=x_4=0,\ \ x_3=\mp 1,$$

$$x_1=x_4=0,\ \ x_2=\pm 1,\ \ x_3=\mp 1,$$

$$x_1=x_3=\pm 1,\ \ x_2=\mp 1,\ \ x_4=0,$$

т.е. всего 8 решений.

Проделывая простые вычисления при помощи этих решений, согласно (I) и (3)-(5), получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1^2-\frac{4}{13}n\Big)z^n=\frac{18}{13}z-\frac{22}{13}z^2-\frac{18}{13}z^3+\dots,\quad (7)$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1x_2+\frac{1}{13}n\Big)z^n=\frac{2}{13}z-\frac{14}{13}z^2-\frac{2}{13}z^3+\dots,\quad (8)$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{13},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1x_3-\frac{1}{26}n\Big)z^n=-\frac{1}{13}z-\frac{6}{13}z^2+\frac{14}{13}z^3+\dots\quad (9)$$

(в этих суммах суммируется по всем решениям уравнения $Q_1=n$).

Согласно лемме 3, эти обобщенные кватернарные тэта-ряды являются параболическими формами типа (-4,I3,I). Так как определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{18}{13} & -\frac{22}{13} & -\frac{18}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{14}{13} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{6}{13} & \frac{14}{13} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то тэта-ряды (7)-(9) линейно независимы. Но выше было сказано, что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-4,I3,I) равно 3. Таким образом, доказана

Теорема I. Система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1^2-\frac{4}{13}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1x_2+\frac{1}{13}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{13},Q_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_1=n}x_1x_2+\frac{1}{26}n\Big)z^n$$

является базисом пространства параболических форм типа (-4, I3,I).

I.2. Теперь найдем параболические формы типа (-4,I9,I). Согласно лемме I, дискриминанты квадратичных форм типа (-2, I9,I) надо искать среди квадратных делителей числа $I9^4$. Хорошо известно, что форма $x_1^2+x_1x_2+5x_2^2$ является единственной положительной приведенной бинарной квадратичной формой дискриминанта -I9. Рассмотрим квадратичную форму

$$Q_2 = x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2^2 + x_3^2 + x_3x_4 + 5x_4^2. \qquad (10)$$

Для этой формы имеем: $\Delta = \mathcal{D} = 19^2$, $A_{11} = A_{33} = 190$, $A_{12} = A_{34} = -19$, $A_{22} = A_{44} = 38$, $A_{13} = A_{14} = A_{23} = A_{24} = 0$, т.е. $\delta = 19$, $N = 19$, $\chi(d) = 1$. Следовательно, форма Q_2 является квадратичной формой типа (-2,19,I). Согласно лемме 2,

$$\mathcal{Y}_{12} = x_1x_2 + \frac{1}{38}Q_2. \qquad (11)$$

Уравнение

$$x_1^2 + x_1x_2 + 5x_2^2 + x_3^2 + x_3x_4 + 5x_4^2 = n \qquad (12)$$

имеет следующие решения:

I. при $n = 1$

$$x_1 = \pm 1,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = \pm 1,$$

т.е. всего 4 решения;

2. при $n = 2$

$$x_1 = x_3 = \pm 1,\ x_2 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = \pm 1,\ x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = \mp 1,$$

т.е. всего 4 решения;

3. при $n = 3$ оно решений не имеет;

4. при $n = 4$

$$x_1 = \pm 2,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0,\ x_3 = \pm 2,$$

т.е. всего 4 решения.

Согласно (I) и (II), при помощи этих решений получаем разложение:

$$\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{Q_2=n} x_1 x_2 + \frac{1}{38} n \Big) z^n = \tag{13}$$

$$= \frac{2}{19} z + \frac{4}{19} z^2 + \frac{8}{19} z^4 + \dots$$

Согласно лемме 3, этот обобщенный кватернарный тэта-ряд является параболической формой типа (-4,19,1).

Нетрудно проверить, что обобщенные кватернарные тэта-ряды, соответствующие остальным 8 полиномам базиса пространства шаровых функций второго порядка относительно квадратичной формы Q_2, пропорциональны тэта-ряду (13). Но выше было оказано, что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-4,19,1) равно 4. Ввиду этого, недостающие обобщенные кватернарные тэта-ряды следует искать среди обобщенных кватернарных тэта-рядов, отвечающих какой-либо другой квадратичной форме типа (-2,19,1). Но в настоящее время ни одной такой квадратичной формы, кроме квадратичной формы Q_2, пока что не известно.

Однако мне удалось обнаружить, что форма

$$Q_3 = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_4^2 + x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_4 + 3x_3x_4 \tag{14}$$

является приведенной кватернарной квадратичной формой дискриминанта 19^2. Для этой формы имеем: $\Delta = \mathcal{D} = 19^2$, $A_{11} = 12 \cdot 19$,

$A_{12}=-3\cdot 19,\ A_{13}=A_{44}=2\cdot 19,\ A_{14}=A_{23}=0,\ A_{22}=6\cdot 19,$

$A_{24}=A_{34}=-19,\ A_{33}=4\cdot 19,$ т.е. $\delta=19,\ N=19,\ \chi(d)=1$

Следовательно, форма Q_3 является квадратичной формой типа $(-2,19,1)$. Согласно лемме 2,

$$\varphi_{11}=x_1^2-\frac{6}{19}Q_3, \tag{15}$$

$$\varphi_{12}=x_1x_2+\frac{3}{38}Q_3, \tag{16}$$

$$\varphi_{13}=x_1x_3-\frac{1}{19}Q_3. \tag{17}$$

Уравнение

$$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+6x_4^2+x_1x_2-x_1x_3+ \\ +2x_2x_4+3x_3x_4=n \tag{18}$$

имеет следующие решения:

I при $n=1$

$$x_1=\pm 1,\ \ x_2=x_3=x_4=0,$$

т.е. всего 2 решения;

2. при $n=2$

$$x_1=x_3=x_4=0,\ \ x_2=\pm 1,$$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=\mp 1,\ x_3=x_4=0,$$

т.е. всего 4 решения;

3. при $n=3$

$$x_1=x_2=x_4=0,\ \ x_3=\pm 1,$$

$$x_1=x_3=\pm 1,\ \ x_2=x_4=0,$$

т.е. всего 4 решения;

4. при $n=4$

$$x_1=\pm 2\,,\ x_2=x_3=x_4=0,$$

$$x_1=x_2=\pm 1,\ x_3=x_4=0,$$

$$x_1=\pm 2,\ x_2=\mp 1,\ x_3=x_4=0,$$

$$x_1=x_3=\pm 1,\ x_2=\mp 1,\ x_4=0,$$

т.е. всего 8 решений.

Согласно (I) и (I5)-(I7) при помощи этих решений получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1^2-\frac{6}{19}n\Big)z^n= \tag{I9}$$

$$=\frac{26}{19}z-\frac{10}{19}z^2-\frac{34}{19}z^3+\frac{188}{19}z^4+\cdots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1x_2+\frac{3}{38}n\Big)z^n= \tag{20}$$

$$=\frac{3}{19}z-\frac{26}{19}z^2+\frac{18}{19}z^3-\frac{28}{19}z^4+\cdots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{13},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1x_3-\frac{1}{19}n\Big)z^n= \tag{2I}$$

$$=-\frac{2}{19}z-\frac{8}{19}z^2+\frac{26}{19}z^3+\frac{6}{19}z^4+\cdots$$

Согласно лемме 3, эти обобщенные кватернарные тэта-ряды являются параболическими формами типа (-4,I9,I). Тэта-ряды (I3), (I9), (20) и (2I) линейно независимы, так как определитель 4-го порядка, элементами которого являются коэффициенты этих рядов, отличен от нуля. Выше уже было сказано, что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-4,I9,I) равно 4. Итак, доказана

Теорема 2. Система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_2=n}x_1x_2+\frac{1}{38}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1^2-\frac{6}{19}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1x_2+\frac{3}{38}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{13},Q_3)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_3=n}x_1x_3-\frac{1}{19}n\Big)z^n$$

является базисом пространства параболических форм типа (-4, I9,I).

I.3. Перейдем к нахождению параболических форм типа (-4, 23,I). Согласно лемме I, дискриминанты квадратичных форм типа (-2,23,I) надо искать среди квадратных делителей числа 23^4. Хорошо известно, что существуют три положительные приведенные бинарные квадратичные формы дискриминанта -23, из которых нам достаточно следующих двух:

$$2x_1^2+x_1x_2+3x_2^2 \quad \text{и} \quad x_1^2+x_1x_2+6x_2^2.$$

С помощью этих бинарных форм можно составить квадратичные формы:

$$Q_4=2x_1^2+x_1x_2+3x_2^2+2x_3^2+x_3x_4+3x_4^2, \tag{22}$$

$$Q_5=x_1^2+x_1x_2+6x_2^2+x_3^2+x_3x_4+6x_4^2, \tag{23}$$

$$Q_6=2x_1^2+x_1x_2+3x_2^2+x_3^2+x_3x_4+6x_4^2. \tag{24}$$

Форма Q_4 является квадратичной формой типа (-2,23,I), ибо для этой формы имеем: $\Delta=\mathcal{D}=23^2$, $A_{11}=A_{33}=6\cdot 23$, $A_{12}=A_{34}=-23$, $A_{22}=A_{44}=4\cdot 23$, $A_{13}=A_{14}=A_{23}=A_{24}=0$, т.е. $\delta=23$, $N=23$, $\chi(d)=1$.

Согласно лемме 2,

$$\varphi_{12} = x_1 x_2 + \frac{1}{46} Q_4, \tag{25}$$

$$\varphi_{22} = x_2^2 - \frac{2}{23} Q_4. \tag{26}$$

Уравнение

$$2x_1^2 + x_1 x_2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_3 x_4 + 3x_4^2 = n \tag{27}$$

имеет следующие решения:

I) при $n = \mathrm{I}$ оно решений не имеет;

2) при $n = 2$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

т.е. всего 4 решения;

3) при $n = 3$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = \pm 1,$$

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_2 = \pm 1,$$

т.е. всего 4 решения;

4) при $n = 4$

$$x_1 = \pm 1, \ x_2 = \mp 1, \ x_3 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = 0, \ x_3 = \pm 1, \ x_4 = \mp 1,$$

$$x_1 = x_3 = \pm 1, \ x_2 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = \pm 1, \ x_2 = x_4 = 0, \ x_3 = \mp 1,$$

т.е. всего 8 решений;

5) при $n = 5$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=x_3=0,\ x_4=\pm 1,$$
$$x_1=\pm 1,\ x_2=x_3=0,\ x_4=\mp 1,$$
$$x_1=x_4=0,\ x_2=x_3=\pm 1,$$
$$x_1=x_4=0,\ x_2=\pm 1,\ x_3=\mp 1,$$

т.е. всего 8 решений.

Согласно (I), (25) и (26), при помощи этих решений получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_4)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_4=n}x_1x_2+\frac{1}{46}n\Big)z^n= \tag{28}$$
$$=\frac{4}{23}z^2+\frac{6}{23}z^3-\frac{30}{23}z^4+\frac{20}{23}z^5+\cdots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_4)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_4=n}x_2^2-\frac{2}{23}n\Big)z^n= \tag{29}$$
$$=-\frac{16}{23}z^2+\frac{22}{23}z^3-\frac{18}{23}z^4+\frac{12}{23}z^5+\cdots,$$

Согласно лемме 3, эти обобщенные кватернарные тэта-ряды являются параболическими формами типа (-4,23,I). Однако легко можно проверить, что все обобщенные кватернарные тэта-ряды, соответствующие остальным 7 полиномам базиса пространства шаровых функций второго порядка относительно квадратичной формы Q_4, являются линейными комбинациями тэта-рядов (28) и (29).

Для формы Q_5 имеем: $\Delta=\mathcal{D}=23^2,\ A_{11}=A_{33}=12\cdot 23,$

$A_{12}=A_{34}=-23,\ A_{22}=A_{44}=2\cdot 23,\ A_{14}=A_{13}=A_{23}=A_{24}=0$, т.е. $\delta=23,\ N=23,$

$\chi(d)=1$. Следовательно, форма Q_5 является квадратичной формой типа (-2,23,I). Согласно лемме 2,

$$\varphi_{12} = x_1 x_2 + \frac{1}{46} Q_5 . \qquad (30)$$

Уравнение

$$x_1^2 + x_1 x_2 + 6x_2^2 + x_3^2 + x_3 x_4 + 6x_4^2 = n \qquad (31)$$

имеет следующие решения:

I. при $n=1$

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 1,$$

т.е. всего 4 решения;

2. при $n=2$

$$x_1 = x_3 = \pm 1, \quad x_2 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \mp 1,$$

т.е. всего 4 решения;

3. при $n=3$ оно решений не имеет;

4. при $n=4$

$$x_1 = \pm 2, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0,$$

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0, \quad x_3 = \pm 2,$$

т.е. всего 4 решения;

5. при $n=5$

$$x_1=\pm 2,\ x_2=x_4=0,\ x_3=\pm 1,$$

$$x_1=\pm 2,\ x_2=x_4=0,\ x_3=\mp 1,$$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=x_4=0,\ x_3=\pm 2,$$

$$x_1=\pm 1,\ x_2=x_4=0,\ x_3=\mp 2,$$

т.е. всего 8 решений.

В силу (I) и (30) получаем разложение:

$$\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_5)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_5=n} x_1x_2+\frac{1}{46}n\Big)z^n= \tag{32}$$

$$=\frac{2}{23}z+\frac{4}{23}z^2+\frac{8}{23}z^4+\frac{20}{23}z^5+\dots$$

Согласно лемме 3, этот обобщенный кватернарный тэта-ряд является параболической формой типа (-4,23,I).

Для формы Q_6 имеем: $\Delta=\mathcal{D}=23^2,\ A_{11}=6\cdot 23,\ A_{12}=A_{34}=-23,$

$A_{13}=A_{14}=A_{23}=A_{24}=0,\ A_{22}=4\cdot 23,\ A_{33}=12\cdot 23,\ A_{44}=2\cdot 23$, т.е. $\delta=23,\ N=23,\ \chi(d)=1.$

Таким образом, форма Q_6 является квадратичной формой типа (-2,23,I). Согласно лемме 2,

$$\varphi_{11}=x_1^2-\frac{3}{23}Q_6, \tag{33}$$

$$\varphi_{12}=x_1x_2+\frac{1}{46}Q_6. \tag{34}$$

Уравнение

$$2x_1^2+x_1x_2+3x_2^2+x_3^2+x_3x_4+6x_4^2=n \tag{35}$$

имеет следующие решения:

I. при n =I

$$x_1=x_2=x_4=0,\ x_3=\pm 1,$$

т.е. всего 2 решения;

2. при $n=2$

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=x_3=x_4=0,$$

т.е. всего 2 решения;

3. при $n=3$

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 1,$$

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=x_4=0,\quad x_3=\mp 1,$$

$$x_1=x_3=x_4=0,\quad x_2=\pm 1,$$

т.е. всего 6 решений;

4. при $n=4$

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=\mp 1,\quad x_3=x_4=0,$$

$$x_1=x_2=x_4=0,\quad x_3=\pm 2,$$

$$x_1=x_4=0,\quad x_2=x_3=\pm 1,$$

$$x_1=x_4=0,\quad x_2=\pm 1,\quad x_3=\mp 1,$$

т.е. всего 8 решений;

5. при $n=5$

$$x_1=x_3=\pm 1,\quad x_2=\mp 1,\quad x_4=0,$$

$$x_1=\pm 1,\quad x_2=x_3=\mp 1,\quad x_4=0,$$

т.е. всего 4 решения.

В силу (I), (33) и (34), получаем разложения:

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_6)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_6=n}x_1^2-\frac{3}{23}n\Big)z^n= \tag{36}$$

$$=-\frac{6}{23}z+\frac{34}{23}z^2+\frac{38}{23}z^3-\frac{50}{23}z^4+\frac{32}{23}z^5+\ldots,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_6)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{Q_6=n}x_1x_2+\frac{1}{46}n\Big)z^n= \tag{37}$$

$$=\frac{1}{23}z+\frac{2}{23}z^2+\frac{9}{23}z^3-\frac{30}{23}z^4-\frac{82}{23}z^5+\ldots\ .$$

Согласно лемме 3, эти обобщенные кватернарные тэта-ряды являются параболическими формами типа (-4,23,I). Тэта-ряды (28), (29), (32), (36) и (37) линейно независимы, так как определитель 5-го порядка, элементами которого являются коэффициенты этих рядов, отличен от нуля. Выше уже было сказано, что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-4,23,I) равно 5. Таким образом, доказана

Теорема 3. Система обобщенных кватернарных тэта-рядов

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12}Q_4)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{q_4=n}x_1x_2+\frac{1}{46}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{22},Q_4)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{q_4=n}x_2^2-\frac{2}{23}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_5)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{q_5=n}x_1x_2+\frac{1}{46}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{11}Q_6)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{q_6=n}x_1^2-\frac{3}{23}n\Big)z^n,$$

$$\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_6)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{q_6=n}x_1x_2+\frac{1}{46}n\Big)z^n$$

является базисом пространства параболических форм типа (-4, 23,I).

§ 2. Известно, что всякой положительной квадратичной форме F соответствует тэта-ряд

$$\vartheta(\tau,F)=1+\sum_{n=1}^{\infty}r(n,F)z^n, \tag{38}$$

где $r(n,F)$ обозначает число представлений натурального числа n формой F.

Далее, пусть q - нечетное простое число и F - положительная примитивная квадратичная форма типа $(-K\ ,\ q\ ,\ \mathrm{I})$,

$k>2$. Известно /I/ (стр.817,874,875), что дискриминант формы F

$$\Delta = q^{2l}, \quad 1 \le l \le k-1, \tag{39}$$

и что ей соответствует ряд Эйзенштейна

$$E(\tau, F) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha \sigma_{k-1}(n) z^{n} + \beta \sigma_{k-1}(n) z^{qn} \right),$$

где

$$\alpha = \frac{i^{k}}{\rho_k} \cdot \frac{q^{k-l} - i^{k}}{q^{k}-1}, \quad \beta = \frac{1}{\rho_k} \cdot \frac{q^{k} - i^{k} q^{k-l}}{q^{k}-1},$$

$$\rho_k = (-1)^{k/2} \frac{(k-1)!}{(2\pi)^k} \zeta(k), \quad \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}.$$

Из этих формул при $k=4$ следует:

$$\rho_4 = \frac{1}{240}, \quad \alpha = 240 \frac{q^{4-l}-1}{q^4-1}, \quad \beta = 240 \frac{q^{4-l}-q^4}{1-q^4},$$

$$E(\tau, F) = 1 + \frac{240}{q^4-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left((q^{4-l}-1) \sigma_3(n) z^n + (q^4 - q^{4-l}) \sigma_3(n) z^{qn} \right). \tag{40}$$

Лемма 4 (/I/, стр.874-875). Пусть $2|k$, $k>2$, q - нечетное простое, F - положительная примитивная квадратичная форма типа $(-k, q, 1)$. Тогда разность

$$\vartheta(\tau,F)-E(\tau,F)$$

будет параболической формой типа $(-\kappa\ ,\ q\ ,\ \mathrm{I})$.

Лемма 5 (/I/, стр.846). Если $Q_1(x)$ и $Q_2(y)$ имеют одну и ту же ступень N и характеры $\chi_1(d)$ и $\chi_2(d)$ соответственно, то форма $Q=Q_1(x)+Q_2(y)$ будет иметь ступень N и характер $\chi_1(d)\cdot\chi_2(d)$.

2.I. Выведем формулу для числа представлений натурального числа n квадратичной формой

$$F_1=Q_1(x_1,x_2,x_3,x_4)+Q_1(x_5,x_6,x_7,x_8), \tag{4I}$$

где форма Q_1 определена формулой (2). Согласно лемме 5, приняв во внимание (4I), (2) и (39), для F_1 получим: $\kappa=4$, $D=13^4$, $\Delta=13^4$, $\ell=2$, $N=q=13$, $\chi(d)=1$,

т.е. форма F_1 является квадратичной формой типа (-4,I3,I).

Теорема 4.

$$r(n,F_1)=\frac{24}{17}\sigma_3^*(n)+\frac{52}{17}\sum_{Q_1=n}\left(x_1^2-\frac{4}{13}n\right)-$$

$$-\frac{156}{17}\left(\sum_{Q_1=n}x_1x_2+\frac{n}{13}\right)+\frac{52}{17}\left(\sum_{Q_1=n}x_1x_3-\frac{1}{26}n\right),$$

где

$$\sigma_3^*(n)=\begin{cases}\sigma_3(n) & \text{при } 13\nmid n,\\ \sigma_3(n)+169\sigma_3\left(\frac{n}{13}\right) & \text{при } 13\mid n.\end{cases}$$

<u>Доказательство</u>. Согласно (38), принимая во внимание сказанное выше о числе решений уравнения (6), получаем, что

$$\vartheta(\tau, Q_1)=1+\sum_{n=1}^{\infty} r(n, Q_1)\; z^n=1+2z+6z^2+8z^3+\cdots$$

Таким образом, в силу (2) и (41), имеем:

$$\vartheta(\tau, F_1)=\vartheta^2(\tau, Q_1)=1+4z+16z^2+40z^3+\cdots \qquad (42)$$

Из (40) при $q = 13$ и $\ell = 2$ следует, что

$$E(\tau, F_1)=1+\frac{24}{17}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_3(n)z^n+169\sigma_3(n)z^{13n}\right)=$$

$$=1+\frac{24}{17}z+\frac{24\cdot 9}{17}z^2+\frac{24\cdot 28}{17}z^3+\cdots \qquad (43)$$

Согласно лемме 4, разность $\vartheta(\tau, F_1)-E(\tau, F_1)$ является параболической формой типа (-4,13,1). Следовательно, согласно теореме I, существуют такие числа c_1, c_2 и c_3, что

$$\vartheta(\tau, F_1)-E(\tau, F_1)=$$

$$=c_1\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_1)+c_2\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_1)+c_3\vartheta(\tau, \varphi_{13}, Q_1).$$

Приравнивая коэффициенты при z, z^2 и z^3 в обеих частях этого равенства и принимая во внимание разложения (42), (43), (7), (8) и (9), получаем, что

$$c_1=\frac{52}{17}, \quad c_2=-\frac{156}{17}, \quad c_3=\frac{52}{17}.$$

Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau,F_1)=E(\tau,F_1)+\frac{52}{17}\vartheta(\tau,\varphi_{11},Q_1)-$$
$$-\frac{156}{17}\vartheta(\tau,\varphi_{12},Q_1)+\frac{52}{17}\vartheta(\tau,\varphi_{13},Q_1).$$

Приравнивая коэффициенты при z^n в обеих частях этого тождества и принимая во внимание (38), (43), (7), (8) и (9) получаем утверждаемое.

2.2. Теперь найдем формулу для числа представлений натурального числа n квадратичной формой

$$F_2=Q_3(x_1,x_2,x_3,x_4)+Q_3(x_5,x_6,x_7,x_8),$$

где форма Q_3 определена формулой (14). Следовательно, согласно (39) и лемме 5, для F_2 получим: $\kappa=4$, $\mathcal{D}=19^4$,

$$\Delta=19^4,\quad \ell=2,\quad N=q=19,\quad \chi(d)=1,$$

т.е. F_2 является квадратичной формой типа (-4,19,1).

<u>Теорема 5</u>.

$$r(n,F_2)=\frac{120}{181}\sigma_3^*(n)+\frac{8303}{181}\sum_{Q_2=n}\left(x_1x_2+\frac{1}{38}n\right)-$$
$$-\frac{270}{181}\sum_{Q_3=n}\left(x_1^2-\frac{6}{19}n\right)+\frac{598}{181}\sum_{Q_3=n}\left(x_1x_2+\frac{3}{38}n\right)-$$
$$-\frac{48}{181}\sum_{Q_3=n}\left(x_1x_3-\frac{1}{19}n\right),$$

где

$$\sigma_3^*(n)=\begin{cases}\sigma_3(n) & \text{при } 19\nmid n,\\ \sigma_3(n)+361\sigma_3\left(\frac{n}{19}\right) & \text{при } 19\mid n.\end{cases}$$

<u>Доказательство.</u> Согласно (38), принимая во внимание ска-

занное выше о числе решений уравнения (18), получаем:

$$\vartheta(\tau, Q_3) = 1 + 2z + 4z^2 + 4z^3 + 8z^4 + \cdots$$

Таким образом, имеем:

$$\vartheta(\tau, F_2) = \vartheta^3(\tau, Q_3) = 1 + 4z + 12z^2 + 24z^3 + 48z^4 \cdots \quad (44)$$

Из (40) при $q=19$ и $\ell=2$ следует, что

$$E(\tau, F_2) = 1 + \frac{120}{181}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_3(n)z^n + 361\sigma_3(n)z^{19n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{120}{181}z + \frac{120\cdot 9}{181}z^2 + \frac{120\cdot 28}{181}z^3 + \frac{120\cdot 73}{181}z^4 + \cdots \quad (45)$$

Согласно лемме 4, разность $\vartheta(\tau, F_2) - E(\tau, F_2)$ является параболической формой типа (-4,19,1). Следовательно, согласно теореме 2, существуют такие числа c_1, c_2, c_3 и c_4, что

$$\vartheta(\tau, F_2) - E(\tau, F_2) = c_1\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_2) + c_2\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_3) +$$
$$+ c_3\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_3) + c_4\vartheta(\tau, \varphi_{13}, Q_3).$$

Приравнивая коэффициенты при z, z^2, z^3 и z^4 в обеих частях этого равенства и принимая во внимание разложения (44), (45), (13), (19), (20) и (21), получаем, что

$$c_1 = \frac{8303}{181}, \quad c_2 = -\frac{270}{181}, \quad c_3 = \frac{598}{181}, \quad c_4 = -\frac{48}{181}.$$

Таким образом, доказано тождество

$$\vartheta(\tau, F_2) = E(\tau, F_2) + \frac{8303}{181}\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_2) - \frac{270}{181}\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_3) +$$

$$+ \frac{598}{181}\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_3) - \frac{48}{181}\vartheta(\tau, \varphi_{13}, Q_3).$$

Отсюда, так же, как и в случае теоремы 4, следует утверждаемое.

2.3. Наконец, найдем формулу для числа представлений натурального числа n квадратичной формой

$$F_3 = Q_4(x_1, x_2, x_3, x_4) + Q_4(x_5, x_6, x_7, x_8),$$

где форма Q_4 определена формулой (22). Следовательно, согласно (39) и лемме 5, для F_3 получим: $k=4$, $D=23^4$, $\Delta=23^4$, $\ell=2$, $N=q=23$, $\chi(d)=1$, т.е. F_3 является квадратичной формой типа (-4,23,1).

<u>Теорема 6</u>.

$$r(n, F_3) = \frac{24}{53}\sigma_3^*(n) + \frac{100}{53}\sum_{Q_4=n}\left(x_1x_2 + \frac{1}{46}n\right) -$$

$$-\frac{320}{53}\sum_{Q_4=n}\left(x_2^2 - \frac{2}{23}n\right) - \frac{276}{53}\sum_{Q_5=n}\left(x_1x_2 + \frac{1}{46}n\right) +$$

$$+\frac{8}{53}\sum_{Q_6=n}\left(x_1^2 - \frac{3}{23}n\right) + \frac{48}{53}\sum_{Q_6=n}\left(x_1x_2 + \frac{1}{46}n\right),$$

где

$$\sigma_3^*(n) = \begin{cases} \sigma_3(n) & \text{при } 23 \nmid n, \\ \sigma_3(n) + 529\sigma_3\left(\frac{n}{23}\right) & \text{при } 23 \mid n. \end{cases}$$

Доказательство. Согласно (38), принимая во внимание сказанное выше о числе решений уравнения (27), получим, что

$$\vartheta(\tau, Q_4) = 1 + 4z^2 + 4z^3 + 8z^4 + 8z^5 + \dots$$

Таким образом, имеем:

$$\vartheta(\tau, F_3) = \vartheta^2(\tau, Q_4) = 1 + 8z^2 + 8z^3 + 32z^4 + 48z^5 + \dots$$

Из (40) при $q = 23$ и $\ell = 2$ следует, что

$$E(\tau, F_3) = 1 + \frac{24}{53}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sigma_3(n)z^n + 529\sigma_3(n)z^{23n}\right) =$$

$$= 1 + \frac{24}{53}z + \frac{24\cdot 9}{53}z^2 + \frac{24\cdot 28}{53}z^3 + \frac{24\cdot 73}{53}z^4 + \frac{24\cdot 126}{53}z^5 + \dots$$

Далее, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 5, согласно лемме 4 и теореме 3, получаем тождество:

$$\vartheta(\tau, F_3) = E(\tau, F_3) + \frac{100}{53}\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_4) - \frac{320}{53}\vartheta(\tau, \varphi_{22}, Q_4) - \frac{276}{53}\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_5) + \frac{8}{53}\vartheta(\tau, \varphi_{11}, Q_6) + \frac{48}{53}\vartheta(\tau, \varphi_{12}, Q_6).$$

Отсюда следует утверждаемое.

Поступила 5.VI.1979 Кафедра алгебры и геометрии

ЛИТЕРАТУРА

1. E.Hecke. Mathematische Werke, Gottingen, 1959.

2. M.Eichler. Acta Arithmetica, 4, N3, 1958, 217—239.

3. Г.А.Ломадзе. Труды Тбилисского математического института, 45, 1974, 146-161.

4. Л.А.Коган. О представлении целых чисел положительно определенными квадратичными формами, Ташкент, 1971.

5. А.Сагинтаев. Известия АН УзССР, 6, 1971, 31-33.

6. Р.Ш.Гонгадзе. Труды Тбилисского университета, 176, 1976, 15-27.

ქ.შავგულიძე

$(-4,q,1)$ ტიპის პარაბოლურ და კვადრატულ ფორმათა შესახებ

რეზიუმე

წინამდებარე ნაშრომში აგებულია $(-4,q,1)$ ტიპის პარაბოლურ ფორმათა სივრცეების ბაზისები განზოგადებული ოთხჯერადი თეტა-მწკრივების სახით, როცა $q=13, 19, 23$. შემდეგ ნაჩვენებია, თუ როგორ შეიძლება აგებული ბაზისების საშუალებით ფორმულების მიღება ნატურალური რიცხვის $(-4,q,1)$ ტიპის კვადრატული ფორმებით წარმოდგენათა რაოდენობისათვის. საილუსტრაციოდ გამოყვანილია სამი ასეთი ფორმულა.

K.Shavgulidze

ON CUSP AND QUADRATIC FORMS OF TYPE (-4, q, 1)

Summary

The bases of spaces of cusp forms of type (-4,q,1) in the form of generalized quaternary theta-series are constructed for q=13,19,23. Then it is shown how formulae can be obtained for the number of representations of positive integers by quadratic forms of type (-4,q,1) by means of the constructed bases. Three such formulae are derived by way of illustration.

В.Г.Челидзе

(1906-1978)

I5 июня 1978 года скончался доктор физико-математических наук, член-корреспондент АН ГССР, заслуженный деятель науки ГССР профессор Владимир Георгиевич Челидзе.

Кончина Владимира Георгиевича Челидзе - большая утрата для всей математической общественности Грузии и в первую очередь - для Тбилисского университета, с которым была связана вся сознательная жизнь ученого. Окончив его в 1929 г., В.И.Челидзе был оставлен ассистентом на кафедре математического анализа. Вскоре он был зачислен в аспирантуру института математики и механики при МГУ, где его руководителем был академик А.Н.Колмогоров. После окончания аспирантуры и успешной защиты кандидатской диссертации В.Г.Челидзе возвращается в Тбилиси и продолжает свою работу в университете. Глубокосодержательные, оригинальные лекции молодого ученого по теории функций заинтересовали многих его слушателей, в результате чего, параллельно с уже проводившимися исследованиями по прикладным вопросам математики началась интенсивная исследовательская работа по так называемой чистой математике. Это во многом предопределило развитие в Грузии математики как единой науки.

В 1947 году В.Г.Челидзе защитил докторскую диссертацию на тему: "Двойные интегралы Данжуа и двойные ряды". В этой работе дано оригинальное определение обобщенной абсолютно-непрерывной функции двух переменных и показано, что каждая функция этого класса почти всюду имеет аппроксимативную производную, которая в некотором смысле однозначно определяет саму функцию. Этот фундаментальный результат дает возможность построить дескриптивную теорию кратких интегралов Данжуа. В трудах В.Г.Челидзе теория двойных интегралов Данжуа приняла законченный вид.

С 1951 года В.Г.Челидзе - профессор, а с 1960 года - заведующий кафедрой теории функций и функционального анализа. В 1967 году его избирают членом-корреспондентом АН ГССР.

Параллельно с университетом В.Г.Челидзе в разное время работал в педагогических институтах республики, а также в Математическом институте им. А.М.Размадзе АН ГССР. Следует особо отметить его работу в Сухумском пединституте в тяжелые военные годы.

Велика заслуга В.Г.Челидзе в деле подготовки ученых кадров - трудно назвать вуз или научно-исследовательский институт республики, где бы не было его бывших учеников. Он - автор нескольких монографий и учебных пособий для вузов.

Не выпадала из поля зрения В.Г.Челидзе и средняя школа - он часто читал лекции для учителей математики, в течение многих лет возглавлял оргкомитет республиканских математических олимпиад.

Память о замечательном ученом и прекрасном педагоге Владимире Георгиевиче Челидзе навечно останется в сердцах его многочисленных коллег и воспитанников.

Н.Р.Тевзадзе
(I913-I979)

25 мая 1979 года скончался доцент кафедры теории функций и функционального анализа Тбилисского государственного университета Николай Ражденович Тевзадзе.

Н.Р.Тевзадзе родился в 1913 году в Тбилиси, в семье рабочего-революционера. Рано начав трудовую деятельность, он экстерно получил среднее образование.

В 1933 году Н.Р.Тевзадзе поступает на физико-математический факультет Тбилисского университета, который оканчивает с отличием и там же начинает работать в должности ассистента.

В 1933-1941 годах Н.Р.Тевзадзе по совместительству работает заместителем декана.

В 1941-1946 годах Н.Р.Тевзадзе - офицер Советской Армии, командир артиллерийского подразделения.

В сентябре 1946 года Н.Р.Тевзадзе возвращается в университет, где работает ассистентом, заместителем декана физико-математического факультета. В 1954 году он защищает кандидатскую диссертацию, а с 1955 года Р.Н.Тевзадзе - доцент кафедры математического анализа.

В 1962-1965 годах Н.Р.Тевзадзе - декан механико-математического факультета.

Н.Р.Тевзадзе - автор 20-ти научных исследований. Его работы посвящены актуальным вопросам современного функционального анализа, в частности сходимости двойных числовых рядов и суммируемости методом Лебега, вопросам среднего значения двойного интеграла, суммируемости методом (C, α) двойных тригонометрических лакунарных рядов, точек Лебега функции двух переменных, суммируемости двойных тригонометрических рядов Фурье методом Бернштейна-Рогозинского, вопросам о почти везде сходимости двойных тригонометрических рядов функции, интегрируемой с квадратом, и многим другим.

Вечная память о Н.Р. Тевзадзе - скромном, доброжелательном человеке, истином коммунисте навсегда останется в сердцах его учеников, друзей и коллег.

УДК 5I9.3

Л.Тонелли и его письмо о А.Размадзе. Т.А.Эбаноидзе.

Труды Тбилисского университета, Математика.Механика. Астрономия. 2I4, I980

Приведены некоторые сведения об итальянском математике Леонида Тонелли и его письме "Андрей Размадзе". Приведено само письмо, впервые публикуемое на русском языке.
Библ. 2 назв.

УДК 5I7.I.

Об одном учебнике А.М.Размадзе. А.Д.Бендукидзе, Т.А.Эбаноидзе. Труды Тбилисского университета. Математика.Механика. Астрономия. 2I4, I980

Дается краткий обзор одного малоизвестного учебника А.М. Размадзе "Введение в дифференциальное исчисление", изданного в I923 г. на русском языке. Выделены наиболее примечательные, о точки зрения авторов, обстоятельства в методическом отношении.

УДК 5I9.3

К терминологии в вариационном исчислении. Т.А.Эбаноидзе

Труды Тбилисского университета. Математика.Механика.Астрономия. 2I4, I980

Рассказывается о терминологическом новаторстве А.М.Размадзе в вариационном исчислении, оставшемся вне внимания авторов многих последующих трудов в этой области. Предлагаются два новых "вариационных" названия. Библ. 7 назв.

УДК 53.091

Развитие физики в Грузии и Андрей Михайлович Размадзе. А.Г.Чрелашвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 214, 1980

Рассмотрены заслуги известного грузинского математика А.М. Размадзе (1889-1929) в развитии физических наук в Грузии. Изысканы архивные материалы, найдены забытые публикации, собраны воспоминания и сведения, сообщенные участниками и современниками событий научной и общественной жизни. Показано, что А.М. Размадзе принадлежат значительные заслуги в пропаганде в Грузии новейших достижений физики, в ее преподавании и организации учебной и научной работы в этой области.

УДК 517.944

Об одном способе приближенного решения основной граничной задачи нелинейного дифференциального уравнения параболического типа. П.К.Зерагия. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 214, 1980

В работе рассматривается следующее нелинейное дифференциальное уравнение параболического типа

$$u_{xx} - u_{y} = f(x, y, u, u_x).$$

Методом линеаризации и последовательных приближений приводится приближенное решение основной граничной задачи со степенной быстротой сходимости процесса, которая, очевидно, является гораздо лучшей, чем быстрота по геометрической прогрессии, полученной одним лишь методом последовательных приближений. Библ. 2 назв.

УДК 511.3

О свойствах одной арифметической функции. Б.Г.Тасоев. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 214, 1980

Выводится формула одной арифметической функции из теории непрерывных дробей и на её основе изучаются некоторые её свойства. Библ. 4 назв.

УДК 519.21

О критериях согласия для проверки гипотезы относительного спектра линейного временного ряда. К.О.Джапаридзе, А.Г.Осидзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 214, 1980

Построены различные классы критериев согласия, определяемые критическими областями вида (3). Изучены асимптотические мощности этих критериев, которые в одном специальном случае некоторого класса альтернативных гипотез совпадают с известным χ - критерием. Библ. 3 назв.

УДК 519.21 + 518.88

О ядерности интегральных операторов. З.Г.Горгадзе, Т. Кюн, В.И.Тариеладзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 214, 1980

Пусть E - банахово пространство измеримых функций (банахово фундаментальное пространство), E' - двойственное пространство. В работе получены условия ядерности положительных симметричных интегральных операторов R : $E' \longrightarrow E$, найдена связь этого вопроса с геометрическими свойствами пространства E. Результаты работы обобщают известные ранее аналогичные утверждения для интегральных операторов с непрерывными ядрами в гильбертовом пространстве L_2 . Библ. 5 назв.

УДК 517.9

Об изопериметрическом свойстве сферы. А.И.Чахтаури. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика.Астрономия. 214, 1980

Дается доказательство изопериметрического свойства сферы новым способом. Этот способ применяется для решения и более сложных изопериметрических задач (чем изопериметрическая задача сферы). Библ. 2 назв.

УДК 517.9

О сетях R и R_o. З.А.Баркалая. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 214, 1980

Изучены сети R и R_o проективно-деформируемых поверхностей. Выведены дифференциальные уравнения этих сетей. Библ. 9 назв.

УДК 511.4

О представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами, Ш. Л.А.Сулаквелидзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 214, 1980

Выведены формулы для числа представлений натуральных чисел некоторыми положительными тернарными квадратичными формами, принадлежащими как одноклассным, так и многоклассным родам. С помощью этих формул установлены арифметические прогрессии, все числа которых непредставимы соответствующими квадратичными формами. Библ. 11 назв.

УДК 511.4

О параболических и квадратичных формах типа (-4, q , I) К.Ш.Шавгулидзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 214, 1980

Э.Гекке в своей известной монографии от 1940 г. показал, что максимальное число линейно независимых параболических форм типа (-4, q , I) равно 3 при q = 13, равно 4 при q = 19 и равно 5 при q = 23.

В работе эти 12 параболических форм найдены в виде обобщенных кватернарных тэта-рядов. Таким образом, в явном виде построены базисы пространств параболических форм типа (-4, q , I) при q = 13,19 и 23.

Далее, показано как можно при помощи построенных базисов получать формулы для числа представлений произвольных натуральных чисел любыми примитивными квадратичными формами типов (-4, 13,I), (-4, 19,I) и (-4,23,I). С целью иллюстрации выведены 3 такие формулы. Библ. 6 назв.

СОДЕРЖАНИЕ

შინაარსი

C O N T E N T S

Редактор издательства Л.И.Абуашвили

Подписано в печать 05.II.80. УЭ I4350

Бумага 60х84 Усл.печ.л.I5. Уч.-изд.л.8,9

Тираж 300 Заказ 3775 Цена 90 коп.

Издательство Тбилисского университета,

Тбилиси,380028,пр.И.Чавчавадзе,I4.

Типография АН ГССР,Тбилиси,380060,

Кутузова,I9.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა
TBILISI UNIVERSITY PRESS