



თბილისის უნივერსიტეტის შრომები

საქართველოს
ნაციონალური
ბიბლიოთეკა

ТРУДЫ ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY

ISSN 0376—3637

მათემატიკა • მექანიკა • ასტრონომია

МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА • АСТРОНОМИЯ

MATHEMATICS • MECHANICS • ASTRONOMY

11

თბილისი Тбилиси Tbilisi

1981

ეძღვნება აკად. ნ. მუსხელიშვილს
დაბადების 90-ე წლისთავზე

Посвящается акад. Н.И. Мусхелишвили
к 90-летию со дня рождения

To acad. N. Muskhelishvili's
90th birth anniversary


ИЗДАТЕЛЬСТВО ТБИЛИССКОГО УНИВЕРСИТЕТА

თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა

TBILISI UNIVERSITY PRESS



თბილისის უნივერსიტეტის ურობები
PROCEEDINGS OF TBILISI UNIVERSITY
ტ. 218 v.



04935940
004000333

**მათემატიკა • მექანიკა
ასტრონომია
MATHEMATICS • MECHANICS
ASTRONOMY**

თბილისი 1981 Tbilisi

**МАТЕМАТИКА • МЕХАНИКА
АСТРОНОМИЯ**

საჩუქრავთი პირები

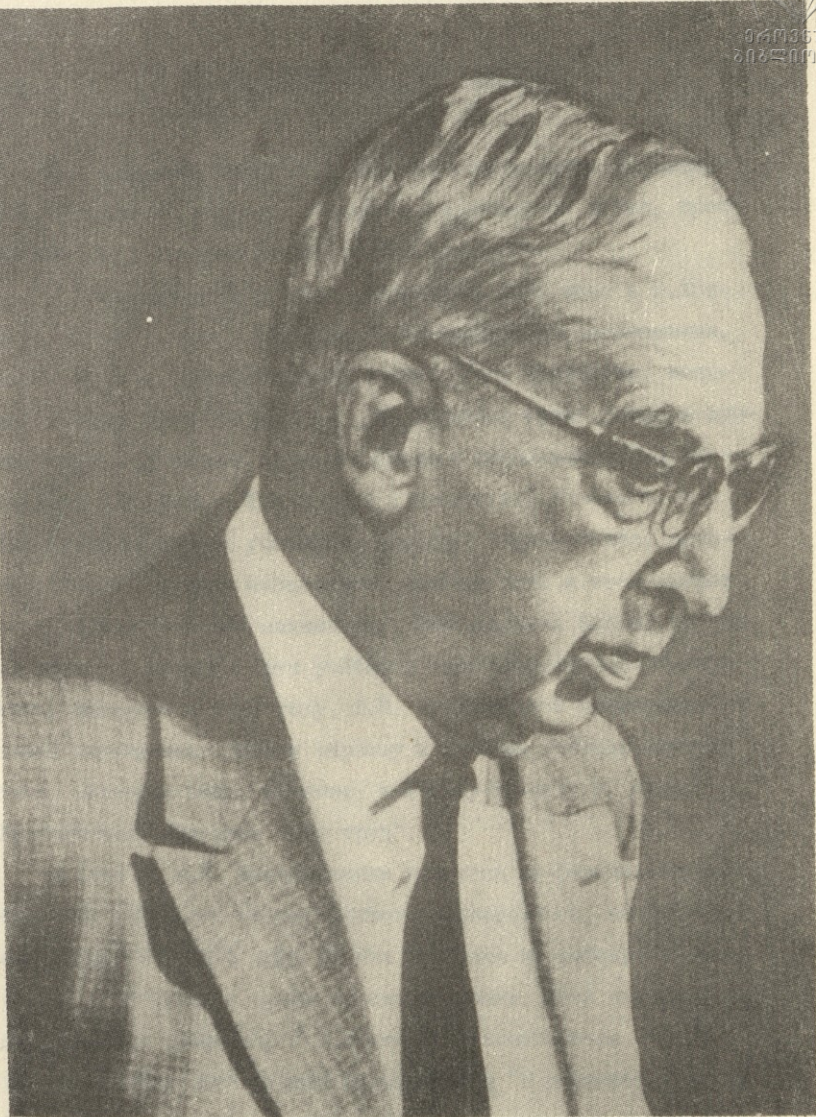
ბ.ვახანი, ბ.ლომაძე, ი.მაგნარაძე, ნ.მაგნარაძე, ი.ჭიჭინაძე-
ვილი, ხ.შარიაძე (რედაქტორი).

Редакционная коллегия

Н.Н.Вахания, Л.Л.Жижиашвили, Г.А.Ломадзе, Л.Г.Магнарадзе,
Н.Г.Магнарадзе, Д.В.Шарикадзе (редактор).

EDITORIAL BOARD

G.Lomadze, L.Magnaradze, N.Magnaradze, J.Sharikadze(editor), N.Va-
khania, L.Zhizhiastvili,



ნ. ი. მუსხელიშვილი
(1891-1976)

Имя академика Николая Ивановича Мухелишвили, выдающегося советского ученого, крупного организатора науки, прочно вписано в историю нашей науки и культуры.

Н.И.Мухелишвили родился 16 февраля 1891 года в г.Тбилиси. Его родители - мать, Дарья Александровна Сагинашвили, широко образованная женщина, и отец, Иван Леванович, военный инженер крупного ранга, - воспитывали своих детей в лучших традициях своего времени. Среднее образование Н.И.Мухелишвили получил в Тбилисской классической гимназии, где был одним из первых учеников, особенно отличавшимся, однако, способностями к математике. Немалую роль в этом сыграл отец, хорошо знавший математику. Впоследствии одному из своих трудов - первой части учебного курса теоретической механики, вышедшей в 1928 году, Н.И. Мухелишвили предпослал такое посвящение: "Моему первому и лучшему учителю математики, дорогому отцу, военному инженеру-технологу, Ивану Мухелишвили посвящаю этот труд".

В 1909 г. Н.И. Мухелишвили поступил на физико-математический факультет Петербургского университета, по окончании которого в 1914 году он был оставлен на кафедре механики для подготовки к профессорскому званию. Этой кафедрой тогда руководил профессор Г.В.Колосов, в соавторстве с которым он написал свой первый научный труд "О равновесии упругих круглых дисков". В этой работе было получено явное ре-

шение основных краевых задач плоской теории упругости для круговой области. В дальнейшем молодой ученый глубоко заинтересовался решениями краевых задач плоской теории упругости, которые требовали серьезной разработки новых методов исследования краевых задач для аналитических функций. В трудах выдающихся ученых Н.Е.Жуковского и С.А. Чаплыгина уже был дан пример использования теории аналитических функций в гидродинамике, но в теории упругости эти методы были новы. Со временем, благодаря основополагающим трудам Н.И. Мусхелишвили и его учеников, обосновывающим теоретическую и практическую эффективность этих методов, начались систематические исследования в этом направлении. Итогом этих исследований явилась серия работ, посвященных различным краевым задачам плоской теории упругости и другим проблемам математической физики. В 1919 г. в "Известиях Российской Академии Наук" был напечатан его труд, посвященный изучению свойств решений бигармонического уравнения.

Параллельно с научной Н.И.Мусхелишвили вел плодотворную преподавательскую деятельность в университете и некоторых других высших технических учебных заведениях Петрограда.

В 1920 г. Н.И.Мусхелишвили был приглашен на работу в Тбилисский университет, где он возглавил кафедру теоретической механики. Вместе с А.М.Размадзе, Г.Н.Николадзе, А.К.Харадзе ученый читает курс лекций по математике, готовит молодые научные кадры, работает над созданием грузинской математической терминологии, занимается интенсивной научной деятельностью.

Однако его научная и педагогическая деятельность не ограничивается рамками университета, он принимает активное участие в работе Грузинского политехнического института, где читает курсы теоретической механики и теории упругости.

В 1922 г. в издании Тбилисского университета отдельной книгой вышло в свет крупное исследование Н.И.Мухелишвили "Применения интеграла типа Коши в некоторых задачах математической физики". Используя свойства аналитических функций комплексной переменной, автор получил эффективные решения ряда краевых задач, которые ранее считались недоступными. Вскоре вышли в свет оригинальные учебники на грузинском и русском языках. Особенно широко известен его учебник аналитической геометрии, по которому и поныне читаются лекции во многих университетах мира.

Н.И.Мухелишвили обладал исключительными преподавательскими способностями. Его лекции отличались четкостью изложения мысли и доходчивостью.

В 1931 - 32 годах ученый был приглашен в Ленинград, где он прочел курс лекций по вопросам математической теории упругости. Лекции Н.И.Мухелишвили слушали аспиранты и научные сотрудники Ленинградского университета, Физико-математического и Сейсмологического институтов Академии наук СССР. Среди слушателей было немало аспирантов из Тбилиси, ставших впоследствии видными учеными (И.Н.Векуа, В.Д.Купрадзе, А.К.Рухадзе, Д.Е.Долидзе, А.К.Горгидзе и др.).

В 1933 г. Н.И.Мухелишвили был избран членом-корреспондентом, а в 1939 г. - действительным членом АН СССР.

Под непосредственным руководством ученого и под влиянием



научных идей, развиваемых в его работах, в Грузии выросла большая группа ученых, сложилась грузинская математическая школа. Проблематика этой школы, связанная главным образом с задачами математической теории упругости, впоследствии постепенно расширилась и охватила ряд новых направлений. Особо следует отметить работы по сингулярным интегральным уравнениям, по краевым задачам теории аналитических функций и дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Перу Н.И.Мухелишвили принадлежит свыше 80 научных работ. Его труды оказали огромное влияние на дальнейшее развитие теории упругости, дифференциальных уравнений и интегральных уравнений, математической физики. Фундаментальная монография "Некоторые основные задачи математической теории упругости" (1933) выдержала пять изданий и в 1941 году была удостоена Сталинской премии I-ой степени. Другая его монография - "Сингулярные интегральные уравнения" (1946) - выдержала три издания и в 1947 году также была удостоена Сталинской премии. Оба этих труда являются ценным вкладом в науку, в них с наибольшей полнотой освещены граничные задачи теории аналитических функций и вопросы теории сингулярных интегральных уравнений. Переведенные на многие иностранные языки, они получили исключительно высокую оценку мировой научной общественности, став настольными книгами для широкого круга специалистов во всем мире.

Помимо научной ценности, труды Н.И.Мухелишвили отличаются превосходным стилем изложения, присущим автору, бережным отношением к каждой детали, оригинальностью. В связи с этим можно привести слова академика А.Н.Крылова: "Даже при беглом

чтении книги Н.И.Мусхелишвили бросается в глаза оригинальность решений не только совершенно новых задач, им поставленных, но и задач, уже давно решенных другими авторами".

В течение длительного периода Н.И.Мусхелишвили занимал ряд руководящих должностей в высших учебных заведениях, был деканом физико-математического и политехнического факультетов Тбилисского университета, проректором Грузинского политехнического института по учебной части.

Большая заслуга принадлежит Н.И.Мусхелишвили в деле организации и развития Грузинской Академии наук, созданной в 1941 г. на базе Грузинского филиала Академии наук СССР. С момента основания он был бессменным Президентом Академии наук ГССР в течение тридцати лет, а с 1972 г. до конца жизни — почетным Президентом. Находясь на этом посту, ученый оказал большое влияние на развитие науки в Грузии. Еще в 1933 г. под его непосредственным руководством при Тбилисском университете был основан Институт математики, созданы Институт физики, Абастуманская астрофизическая обсерватория и ряд других научных учреждений, которые в дальнейшем перешли в систему АН ГССР. Институт математики им. А.Размадзе, возглавляемый им свыше 30 лет, стал одним из ведущих институтов АН ГССР. Н.И.Мусхелишвили всячески способствовал развитию в системе Академии наук ГССР многих новых важных направлений науки. Велика его роль в организации Вычислительного центра, институтов кибернетики и систем управления. Много усилий приложил он к тому, чтобы в Академии наук ГССР были представлены и успешно развивались все основные отрасли современной науки как естественного, так

и гуманитарного направления.

Активное участие принимал Н.И.Мусхелишвили в работе АН СССР и ряда всесоюзных организаций. Он являлся членом Президиума АН СССР, председателем национального комитета советских механиков, членом Комитета по присуждению Ленинских премий и Высшей аттестационной комиссии. Как представитель советской науки он принимал участие в работе многих международных форумов, являлся членом ряда международных научных объединений. Научная, педагогическая и общественная деятельность ученого были высоко оценены Партией и Правительством - он был одним из первых советских ученых, удостоенных высокого звания Героя Социалистического Труда (1945 г.). Н.И.Мусхелишвили был награжден также многими орденами и медалями Советского Союза, в том числе пятью орденами Ленина и орденом Октябрьской Революции, был удостоен Золотой медали имени М.В.Ломоносова (1972 г.), которая является высшей наградой АН СССР и присуждается ежегодно одному советскому и одному иностранному ученому.

Помимо этого ему были присуждены международная премия Италии "Модесто Панетти" - Золотая медаль /1969 г./, почетная награда Болгарской Народной Республики - орден Кирилла и Мефодия первой степени /1970 г./, высшая награда Академии наук Словакии - Золотая медаль /1970 г./.

Он был почетным членом Академий наук Армянской ССР и Азербайджанской ССР, членом ряда зарубежных Академий и научных обществ. В частности, он являлся иностранным членом Болгарской, Польской и Германской /ГДР/ Академий наук.

Н.И.Мусхелишвили неоднократно избирался депутатом Верховного Совета СССР и ГССР, был членом Центрального Комитета Грузии.

16 июля 1976 г. советская наука понесла тяжелую утрату. Грузинский народ, научная общественность нашей Родины проводили Николая Ивановича Мусхелишвили в последний путь - на гору Мтацминда, где покоятся замечательные сыны грузинского народа.

Ныне в Тбилисском математическом институте им.А.Размадзе открыта мемориальная комната, посвященная научной деятельности Н.И.Мусхелишвили. В книге впечатлений есть такая запись: "...Я учился у него, а вспоминая его слова и дела, продолжаю учиться отношению к науке, глубокому взгляду на жизнь и человеческие отношения". Слова эти принадлежат президенту АН Армянской ССР, другу ученого, академику В.А.Амбарцумяну.

В апреле 1981 г. грузинская общественность широко отметила 90-летие со дня рождения академика Н.И.Мусхелишвили. Этой дате и посвящается настоящий сборник.

Е.Оболашвили

Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

საბჭოთავო ორდენის წითელი შრომის ნიშნის მქონე ტბილის საბჭოთავო
საგანმანათლებლო უნივერსიტეტის ძეგლი
218, 1981

УДК 517.9

НЕКОТОРЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Е.И.Оболашвили

Краевая задача Римана-Гильберта (РГ) для одной аналитической функции комплексной переменной

$$\operatorname{Re} [\lambda(t)\varphi(t)] = f(t), \quad (1)$$

как известно /1/, в квадратурах решается для весьма частных видов односвязных областей, например, для круговой области и для областей, конформно отображающихся на круговую область, причем, если отображающая функция известна. Переход от односвязных к многосвязным областям вносит принципиальные трудности /3/ - почти нет ни одной многосвязной области, для которой решение задачи (1) представлялось бы в квадратурах. Например, в работе /3'/ для кругового кольца решение этой задачи представлено в виде интеграла, но его ядро является бесконечным рядом.

Пусть D - бесконечная плоскость, разрезанная вдоль конечного числа отрезков прямой или дуг окружности. В том случае, когда $\lambda(t) = 1$, т.е. для гармонической в D функции задача Дирихле впервые была решена в квадратурах



М.В.Келдышем и Л.И.Седовым /4/, а затем, в обобщенном смысле, в частности, в смысле разбиения множества решений на классы и установления необходимых и достаточных условий разрешимости - Н.И. Мухелишвили /1/. Для случая $\lambda(t) \neq 1$ задача (I) для области D исследована Г.П.Черепановым /5/.

В нашей работе указываются некоторые области и функции $\lambda(t)$, для которых решение задачи (I) представляется в квадратурах.

Пусть S - одна из следующих областей: 1) круговая область ($|z| < 1$, $z = x + iy$), разрезанная вдоль конечного числа отрезков диаметра $y = 0$; 2) полукруговая область ($|z| < 1$, $y > 0$), разрезанная вдоль конечного числа отрезков оси y ; 3) полуплоскость ($x > 0$), разрезанная вдоль конечного числа отрезков прямой $y = 0$ или вдоль дуг полуокружности ($|z| = 1$, $x > 0$). Границы этих областей, за исключением указанных отрезков и дуг, обозначим через Γ , а совокупность этих отрезков или дуг - через L .

Задача (ПГ). Определить голоморфную в S функцию $\Phi(z)$ (в случае бесконечной области - исчезающую на бесконечности) по граничным условиям:

$$\operatorname{Re} [\lambda(t)\Phi(t)] = f(t), \quad t \in \Gamma, \quad (2)$$

$$\operatorname{Re} [\lambda^\pm(t)\Phi^\pm(t)] = f^\pm(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где $\lambda(t) \neq 0$, $f(t)$ - заданные на Γ , $\lambda^\pm \neq 0$, f^\pm - заданные на L функции класса Гельдера. Под Φ^+ , Φ^- подразумеваются граничные значения, соответственно, слева и справа от L . Предполагается, что $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на $\Gamma + L$ всюду, кроме, быть может, концов C_κ линии L , вблизи

которых

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{Const}}{|z - c_k|^\alpha}, \quad \alpha < 1.$$

В первую очередь отметим, что с помощью известных для круговой области или для полуплоскости решений задачи (РГ), условие (2) всегда можно привести к однородному виду, т.е. без ограничения общности можно принимать $f(t) \equiv 0$.

Пусть индекс функции $\lambda(t)$ на Γ равняется нулю. Тогда, используя обобщенный принцип симметрии Римана-Шварца /6/, условие (2) можно привести к виду:

$$\text{Re} [\Phi(t)] = 0, \quad t \in \Gamma. \quad (4)$$

Из этого условия следует, что функция

$$F(z) = \begin{cases} \Phi(z), & z \in S \\ -\Phi(z_1), & z \in S^* \end{cases} \quad (5)$$

голоморфна в области $S + S^* + \Gamma \equiv D$, где S^* и z_1 - зеркальные отражения области S и точки z относительно кривой Γ , соответственно.

С учетом (3), (5) рассматриваемая задача (РГ) для области S приводится к задаче определения голоморфной в D функции $F(z)$ по граничным условиям:

$$\text{Re} [\mu^\pm(t) F^\pm(t)] = g^\pm(t), \quad t \in L + L^* \equiv \ell, \quad (6)$$

где

$$\mu^\pm(t), g^\pm(t) = \begin{cases} \lambda^\pm(t), f^\pm(t), & t \in L, \\ \lambda^\pm(t_1), -f^\pm(t_1), & t \in L^*, \end{cases}$$

L^* и t_1 - зеркальные отражения линии L и точки t относительно Γ , соответственно. Таким образом, наша исходная

задача для области S приведена к задаче (ПГ) для бесконечной плоскости, разрезанной вдоль конечного числа отрезков прямой или дуг окружности.

Пусть D - бесконечная плоскость, разрезанная вдоль конечного числа отрезков действительной оси. Совершенно аналогично решается задача, когда имеем разрезы вдоль дуг окружности.

Решение задачи (6) будет представлено в квадратурах в следующих двух случаях:

I. Пусть $\mu^+(t) = \overline{\mu^-(t)} \equiv \mu(t)$. Вводим следующие голоморфные в D функции

$$2\Phi_1(z) = F(z) + \overline{F(\bar{z})}, \quad (7)$$

$$2\Phi_2(z) = F(z) - \overline{F(\bar{z})}$$

С помощью условий (6) и (7) легко получим:

$$\Phi_1^+(t) = -\frac{\overline{\mu(t)}}{\mu(t)} \Phi_1^-(t) + \frac{g^+ + g^-}{\mu(t)}, \quad (8)$$

$$\Phi_2^+(t) = \frac{\overline{\mu(t)}}{\mu(t)} \Phi_2^-(t) + \frac{g^+ - g^-}{\mu(t)}, \quad t \in \ell,$$

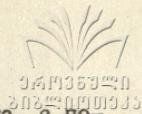
Φ_1 , Φ_2 , как решения задачи Гильберта, представляются в квадратурах /1/. Тогда искомая функция $F(z)$ определяется равенством:

$$F(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z), \quad (9)$$

причем Φ_1 , Φ_2 - такие решения задачи (8), которые удовлетворяют условию

$$\overline{\Phi_1(\bar{z})} + \overline{\Phi_2(\bar{z})} = \Phi_1(z) - \Phi_2(z). \quad (10)$$

Последнее условие всегда можно удовлетворить соответ-



ствующим выбором решений задачи (8). Действительно, с помощью произвольных решений ϕ_1, ϕ_2 строятся другие решения в виде:

$$\begin{aligned}\psi_1(z) &= \frac{1}{2} [\phi_1(z) + \overline{\phi_1(\bar{z})}], \\ \psi_2(z) &= \frac{1}{2} [\phi_2(z) - \overline{\phi_2(\bar{z})}],\end{aligned}$$

которые уже будут удовлетворять условию (10).

2. Пусть μ^+, μ^- - произвольные комплексные постоянные.

Рассмотрим голоморфную в D функцию

$$\psi(z) = \overline{F(\bar{z})}. \quad (II)$$

Тогда граничные условия (6) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}F^+(t) &= \alpha \psi^-(t) + 2g^+/\mu^+, \\ \psi^+(t) &= \beta F^-(t) + 2g^-/\bar{\mu}^-, \quad t \in l,\end{aligned} \quad (I2)$$

где $\alpha = -\frac{\mu^+}{\mu^-}$, $\beta = -\frac{\mu^-}{\bar{\mu}^-}$ - заданные комплексные постоянные.

Легко показать, что если (F, ψ) - решения задачи (I2), то $(\overline{\psi(\bar{z})}, \overline{F(\bar{z})})$ также будут ее решением. Поэтому с их помощью всегда можно построить такие решения системы (I2), которые будут удовлетворять условию (II).

Умножая первое равенство (I2) на $\sqrt{\beta/\alpha}$ и складывая и вычитая со вторым, соответственно получим:

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta/\alpha} F^+ + \psi^+ &= \sqrt{\alpha\beta} (\sqrt{\beta/\alpha} F^- + \psi^-) + f_1(t), \\ \sqrt{\beta/\alpha} F^+ - \psi^+ &= -\sqrt{\alpha\beta} (\sqrt{\beta/\alpha} F^- - \psi^-) + f_2(t), \\ & t \in l,\end{aligned} \quad (I3)$$

где f_1, f_2 - заданные функции. Таким образом, для каждой голоморфной в D функции

$$F_1(z) = \sqrt{\beta/\alpha} F(z) + \psi(z), \quad F_2(z) = \sqrt{\beta/\alpha} F(z) - \psi(z), \quad (I4)$$

имеем задачу Гильберта, т.е. F_1, F_2 представляются в квадратурах /I/. С помощью равенств (I4) определяется искомая функция $F(z)$. Рассмотрим частный случай, $\mu^+ = 1, \mu^- = i$, т.е. когда на одной стороне разреза отрезков ℓ задана действительная часть искомой голоморфной в D функции, на другой стороне - ее мнимая часть. В этом случае граничные условия (I3) в силу (I4) получают вид:

$$\begin{aligned} F_1^+ &= i F_1^- + f_1(t), \\ F_2^+ &= -i F_2^- + f_2(t), \quad t \in \ell. \end{aligned} \quad (I5)$$

Можно показать, что каноническими решениями соответствующих однородных задач будут:

$$\chi_1(z) = \sqrt[4]{\prod_{k=1}^n \frac{z - a_k}{z - b_k}}, \quad \chi_2(z) = \sqrt[4]{\prod_{k=1}^n \frac{z - b_k}{z - a_k}}, \quad (I6)$$

где a_k - левые концы, b_k - правые концы отрезков ℓ , n - число отрезков. Канонические решения определенного класса /I/ получаются умножением равенств (I6) на $(z - a_k)^p (z - b_k)^q$, где p и q равны 1, -1 или 0.

Искомая функция $F(z)$ таким путем вполне определяется. Следует отметить, что к рассматриваемому частному случаю приводится задача определения гармонической в S функции, когда на одной стороне разреза L задано ее граничное значение.



ние, на другой стороне - граничное значение ее нормальной производной, а на Γ - ее граничные значения.

Интересно отметить, что с помощью решения задачи (I5) легко строится эффективное решение следующего сингулярного интегрального уравнения вида

$$\alpha \varphi(t_0) + \frac{b}{\pi i} \int \frac{\varphi(t) dt}{t - t_0} + \frac{c \chi^+(t_0)}{\pi i} \int \frac{\varphi(t) dt}{\chi^+(t)(t - t_0)} = f(t_0),$$

где $\chi(x)$ - каноническое решение задачи Гильберта $\chi^+ = \lambda \chi^-$ на L ; a, b, c, λ - комплексные постоянные.

Рассмотрим граничную задачу плоской теории упругости, решение которой строится с помощью предыдущих результатов.

Пусть S - однородная, изотропная упругая полуплоскость $x > 0$, разрезанная вдоль конечного числа отрезков L прямой $y = 0$.

Требуется определить равновесие S по граничным условиям:

$$u = 0, \quad \chi_{12} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad |y| < \infty, \quad (I7)$$

$$u^+ = f(x), \quad v^+ = f^+(x), \quad \chi_{12}^- = f_1(x), \quad x \in L, \quad (I8)$$

где u, v - компоненты смещения, $\chi_{\alpha\beta}$ - компоненты тензора напряжений; f, f^+, f_1 - заданные на L функции.

На основании принципа симметрии в теории упругости [7], в силу условий (I7), наша задача приводится к задаче определения деформированного и напряженного состояния бесконечной упругой плоскости D , которая разрезана вдоль отрезков $\ell = L + L^*$ прямой $y = 0$ по граничным условиям:

$$u^+ = f_*(x), \quad v^\pm = f_*^\pm(x), \quad \chi_{12}^- = f_1^*(x), \quad x \in \ell, \quad (19)$$

где L^* - зеркальное отражение отрезков L относительно оси y ; f_* , f_*^\pm , f_1^* определяются с помощью заданных функций:

$$f_*, f_*^\pm, f_1^* = \begin{cases} f(x), f^\pm(x), f_1(x), & x \in L, \\ f(-x), -f^\pm(-x), f_1(-x), & x \in L^*. \end{cases}$$

С помощью комплексных представлений Колосова-Мусхелишвили /2/ для компонентов тензора напряжений и вектора смещения, граничная задача (19) приводится к задаче определения аналитических в D функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ по граничным условиям:

$$2\mu \operatorname{Im} [x \varphi(x) + x \varphi'(x) + \psi(x)]^\pm = f_*^\pm(x), \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} 2\mu \operatorname{Re} [x \varphi(x) - x \varphi'(x) - \psi(x)]^+ &= f_*(x), \\ \operatorname{Im} [x \varphi''(x) + \psi'(x)]^- &= f_1^*(x), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$x \in \ell$

где μ , α - упругие постоянные.

Условиями (20) эффективно определяется аналитическая в D функция /1/

$$\phi(z) = \alpha \varphi(z) + z \varphi'(z) + \psi(z) \quad (22)$$

Используя (22), граничные условия (21) приведем к граничным условиям вида:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} [\varphi(x)]^+ &= p(x), \\ \operatorname{Im} [\varphi'(x)]^- &= q(x), \quad x \in \ell. \end{aligned} \quad (23)$$

Решение этой задачи легко строится с помощью решений задач (15). Зная $\varphi(x)$, $\psi(x)$ можно определить равенством (22). После этого определение компонентов смещения и тензора напряжений не представляет трудности.

Следующие граничные задачи, на наш взгляд, не лишены как теоретического, так и практического интереса (их решения пока неизвестны):

1. В бесконечной плоскости S , разрезанной вдоль положительной оси ℓ ($x > 0, y = 0$), определить решение уравнения

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad (24)$$

по граничным условиям:

$$u^+(x, 0) = f(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}^- = \varphi(x), \quad x \in \ell. \quad (25)$$

Если эта задача будет решена, то тем самым в S будет найдена обобщенная аналитическая функция w (когда B - постоянная)

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + B \bar{w} = 0$$

по условиям

$$\operatorname{Re}[w^+] = f_1, \quad \operatorname{Im}[w^-] = f_2(x), \quad x \in \ell.$$

2. Определить гармоническую в бесконечном пространстве с круговым разрезом S ($x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0$) функцию u по граничным условиям:

$$u^+(x_1, x_2, 0) = f_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}^- = f_2 \quad \text{на } S. \quad (26)$$

Следует отметить, что в случае, когда вместо условий



(25) и (26) с обеих сторон разреза заданы либо граничные значения u , либо граничные значения ее нормальной производной, решения указанных задач известны /8/, /9/ и строятся в квадратурах.

Поступила 5.XП.1980

Тбилисский математический
институт им. А. М. Размадзе
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.И.Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1962.
2. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
3. И.Н.Векуа. Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
- 3¹. Р.Д.Банцури. Сообщ. АН ГССР, 80, № 3, 1975.
4. М.В.Келдыш, Л.И.Седов. ДАН СССР, т.ХУІ, № 1, 1937.
5. Г.П.Черепанов. ДАН СССР, т.156, № 2, 1964.
6. Е.И.Оболашвили. ДАН СССР, т.15, № 5, 1964.
7. Е.И.Оболашвили. *Revue Roumaine de Mathematiques pures et appliquées*, 11, 8, 1966.
8. Б.Нобл. Метод Винера-Хопфа, М., 1962.
9. Н.Е.Кочин. ПММ, т.ІV, в.І, 1940.

ე.ობოლაშვილი

ანალიტიკური ფუნქციების საზღვრის მნიშვნელობის
 საზღვარის მნიშვნელობის მნიშვნელობის მნიშვნელობის
 მნიშვნელობის მნიშვნელობის მნიშვნელობის

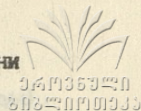
გთხოვთ კვლევა სახის ანტიპრობლემის, რეკონსტრუქციის
 სწორი ხაზის მიმდებარეობის ან ნივთიერების რეკონსტრუქციის
 ფორმის, მიცემულია რიგის-პრობლემის ამოცანის ამოხსნა
 კვლევა-ფორმის. შედეგად ამოხსნილია რეკონსტრუქციის
 პრობლემის ამოცანის ამოცანის ამოცანის ამოცანის

E. Obolashvili

SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ANALYTIC
 FUNCTIONS AND THEIR APPLICATIONS

Summary

Effective solutions of the Riemann-Hilbert problem are given for some domains with cuts along the segments of a straight line or along circular arcs. Then, some mixed problems of plane elasticity are solved for an elastic half-plane cut along the finite number of segments of a straight or along a circular arc.



თბილისის შრომის ნიშნული ერთეობის ორდენის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები

УДК 517.54

218,1981

თავისუფალი წარმოშობის მათემატიკის
კვლევის ინსტიტუტი
თბილისი

ვთქვათ, \mathcal{M}^+ მარტივად დაშვებული არეა, რომელიც შედისაბოლოებულია
ლიპსვიციის ტიპის მარტივი მუდმივი Γ კონტურით, \mathcal{M}^- იყოს უსა-
სრულო არე, რომელიც \mathcal{M}^+ არეს ავსებებს მთელი სიბრტყეში. ვივარაუდო-
ბით, რომ კონტურის სათავე მოთავსებულია \mathcal{M}^+ არეში.

$\alpha_i(t)$ -ები ($i=1, 2, \dots, n$) აღვნიშნოთ Γ კონტურის წერტილთა H
კლასის ფუნქციები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

1) ფუნქციები $\alpha_i(t)$ ფუნქციის გააჩნია ნულისაგან განსხვავებულ
მნიშვნელობას ადრეობის უწყვეტი წარმოებულად;

2) $\alpha_i(t)$ ფუნქცია Γ კონტურს გადასახავს თავის თავში
მიმართულად შენარჩუნებით.

$\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$ ფუნქციათა შემრუნიებული ფუნქციები აღვნი-
შნოთ შესაბამისად $\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t)$ -ები.

განვიხილოთ ამოცანა: ვიპოვოთ \mathcal{M}^+ არეში ანალიტიკური

$\{\varphi_i(z), \psi_i(z)\}$ ($i=1, 2, \dots, n$) ფუნქციები, რომლებიც უწყვეტად გატე-
რილია არეში Γ -ზე და აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\varphi_i^+[\alpha_i(t_0)] = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t_0) \overline{\psi_k^+(t_0)} \quad (1)$$

$$(i=1, 2, \dots, n),$$

ըստ (2) - ս ժամանակահատվածի սկզբում

$$K_{\nu_i}' \equiv \sum_{\kappa=1}^n \{ [\overline{\alpha_{\kappa i}(t_0)} + \delta_{\kappa i}] \nu_{\kappa}(t_0) - \quad (2')$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_r \left[\frac{\overline{\alpha_{\kappa i}(t_0)} \alpha'_{\kappa}(t_0)}{\alpha_{\kappa}(t) - \alpha_{\kappa}(t_0)} - \frac{\delta_{\kappa i}}{t - t_0} \right] \nu_{\kappa}(t) dt = 0,$$

ևս

$$\delta_{i\kappa} = \begin{cases} 1, & \text{ոչ } i \neq \kappa, \\ 0, & \text{ոչ } i = \kappa \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Յուրաքանչյուր, $\nu(t) = [\nu_1(t), \dots, \nu_n(t)]$ ճանապարհընթաց (2') սկզբում
հանդիսանում է, մասին շարժվող հաստի միջնամասը, որի

$$\xi_i(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\nu_i(t)}{t-z} dt, \quad (z \in \mathcal{D}^+),$$

$$\eta_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\overline{\nu_i[\rho_i(t)]}}{\alpha_i[\rho_i(t)]' (t-z)} dt, \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Պայմանները (1) սահմանափակում են սկզբնական
սահմանափակում, որի ճանապարհընթաց (2') սկզբում
(1') - ս սկզբնականները ճանապարհընթաց (3) ճանապարհընթացում,

մասնավորապես, $\xi_i(z)$ և $\eta_i(z)$ ($i=1, 2, \dots, n$) հանդիսանում
են սահմանափակում, ընդհանուրապես սահմանափակում

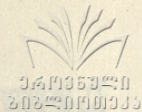
$$\xi_i^+(t_0) - \overline{\alpha_i'(t_0)} \eta_i^+[\alpha_i(t_0)] = g_i(t_0), \quad (4)$$

$$(i=1, 2, \dots, n),$$

ևս, որտեղ $g_i(t_0)$ ընդհանուրապես

$$\int_r g_i(t) dt = 0 \quad (5)$$

$$(i=1, 2, \dots, n).$$



մշտոր՝ մեծությամբ, յս կանխորոշումը մտնում է $[F_i(x), \varphi_i(x)]$ զանգված-
 ստա ռիմարտ, սմանսան ընթանումը i -ստաշոն ուրըյն $x_i = -z$,
 $(i=1, 2, \dots, n)$, որն ժամոց (ոն, Ն/)(4)-ս ժյեսաման յրտճյա-
 րտյան սոնցրման մեղոր ըշտոյան մոնանսնո յընթա, երտո սրայրտ-
 ճյարտյան (4) սոնցրման, (5) ճրտոմաթա ժալոտ, յընթա յրտո
 մոնանսնո, յըժյոտ (4)-ս յս մոնանսնո (3) կսնո. մամոն (4)-ս
 ժալոտ, $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ զանցնոստա ռիմարտ ճըյընթա

$$\mathcal{N}_{\varphi_i} \equiv -\varphi_i(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\bar{\alpha}_i'(t_0)}{\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0)} - \frac{1}{t - t_0} \right] \varphi_i(t) dt = g_i(t) \quad (6)$$

ճրայթորման ուրըյրտյար ժանցորմաթա սոնցրմա. սմ սոնցրման ու-
 յըժյոնըժըլ յրտճյարտյան

$$\mathcal{N}'_{\rho_i} \equiv -\rho_i(t_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left[\frac{\bar{\alpha}_i'(t)}{\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0)} - \frac{1}{t - t_0} \right] \rho_i(t) dt = 0 \quad (7)$$

ժանցորմաթա սոնցրման մոնանսնո մեղոր մշոմոյո ժյոժըթա ոյոս,
 որն ժամոց (5) ճրտոմաթա ժալոտ (6) սոնցրման յընթա մոնանսնո,
 որմոն կսմշալըմոթաց սոցթա (3) զանցնոյոն.

(2) ըս (2') սոնցրմաթա ճրայթոյար ըամոշոյթըլ մոնանսնոս
 կարթընթա սըլնոմոնոտ m ըս m' -տ, ճըյընթա

$$m - m' = \text{ind det } \| a_{ik} \|. \quad (8)$$

ℓ ըս ℓ' -տ սըլնոմոնոտ (1) ըս (1') մոնցանթա ճրայթոյար ըամո-
 շոյթըլ մոնանսնոս կարթընթա,

ճըյոնթա, որոմ

$$\ell = m. \quad (9)$$

ըս յամցոյոտ, որոմ

$$\ell' = m' - 1. \quad (10)$$



մարտկոց, յոթյառ, թանցի $\check{v}^j(t) = [\check{v}_1^j(t), \dots, \check{v}_n^j(t)]$ ($j = 1, 2, \dots, m$)
 քայքայող (2') սինգլյուլյար ընդհանուր լարման լարման համակարգում,
 յոթյառ սերիալ, թուր, թուրմուր $\check{v}^k(t) = [\check{v}_1^k(t), \dots, \check{v}_n^k(t)]$, $1 \leq k \leq m'$,
 սինգլյուլյար

$$\xi_i^k(z) \equiv 0 \text{ և } \eta_i^k(z) \equiv 0, \quad z \in \mathcal{D}^+$$

մասին (3) թուրմուրման ընդհանուր լարման

$$\frac{\overline{\check{v}_i^k[\rho_i(t)]}}{\alpha_i[\rho_i(t)]_{\rho_i}} = M_i^k(t) \tag{11}$$

և

$$\check{v}_i^k(t) = \check{v}_i^k(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{12}$$

թուրմուրման, սարգ $M_i^k(t)$ և $\check{v}_i^k(t)$ յսանդուրման թուրմուր, \mathcal{D}^-
 սերիա սինգլյուլյար ընդհանուր սինգլյուլյար մինիմալ լարման Γ -
 (11) և (12) թուրմուրման յո սերիալ լարման, թուր

$$M_i^k[\alpha_i(t)] = \frac{1}{\alpha_i'(t)} \overline{\check{v}_i^k(t)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{13}$$

յս յսանդուրման թուրմուրման սինգլյուլյար մինիմալ,
 թուրման ընդհանուր, թուրմուր սինգլյուլյար i թուրման (-2)-
 մասին: (Ու. Ն. /), սերիա յսանդուրման թուրմուր յո սինգլյուլյար-
 թուր, սինգլյուլյար, $\check{v}_1(t), \check{v}_2(t), \dots, \check{v}_n(t)$ քայքայողման մինիմալ յո սինգլյուլյար-
 թուր մինիմալ (3) թուրմուրման ընդհանուր լարման, մինիմալ, (13)
 սինգլյուլյար յսանդուրման թուրմուր մինիմալ ընդհանուր լարման

$$v_i(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\check{v}_i^k(t)}{t-z} dt, \quad (z \in \mathcal{D}^-) \tag{14}$$

$$M_i(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\overline{\check{v}_i^k[\rho_i(t)]}}{\alpha_i[\rho_i(t)]_{\rho_i} (t-z)} dt$$



სახით, საიდანაც გვექვება

$$v_i(z) = M_i(z) = 0 \quad (z \in \mathcal{D}^+, i=1, 2, \dots, n).$$

ამ ფორმულათა ძალით აპვიღაპ მივიღებთ, რამ

$$v_i^-(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{v_i(t)}{t-t_0} dt = 0, \\ \frac{v_k^-(t_0)}{\alpha'_k(t_0)} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{v_k(t) dt}{\alpha_k(t) - \alpha_k(t_0)} = 0 \quad (i, k=1, 2, \dots, n)$$

ამ იგივეობათა გათვალისწინებით ან გვექვება

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha_{ki}(t_0) \alpha'_k(t_0)} \left[\frac{v_k^-(t_0)}{\alpha'_k(t_0)} - \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{v_k(t) dt}{\alpha_k(t) - \alpha_k(t_0)} \right] + \\ + v_i^-(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{v_i(t) dt}{t-t_0} = 0.$$

ამრიგად, $v_1^-(t), \dots, v_n^-(t)$ ფუნქციებში აღმოჩნდა მიკავშირებული (2') სისჭრების ამონახსნი, რადგან $v_1(t), \dots, v_n(t)$ ფუნქციებში-სათვის შეგვიძლია (3) ფუნქციები ნულის ფორმა, აპვიღაპ ვრწმუნებოთ (10) ფორმის სამარტლიანობაში.

(8), (9) და (10) ფორმების შევარტებით გვექვება

$$l-l' = \text{ind}_r \det \| a_{ik}(t) \| + 1. \tag{15}$$

ამრიგად, რამდენავე ბუჯა

მ ვ თ რ ვ ი ა: $l-l' = \text{ind}_r \det \| a_{ik}(t) \| + 1$, სადაც l და l' -თ ატნიშნულია (1) და (1') მიკავშირებული ამოცანების წრფივად რამდენავე ბუჯა ამონახსნების რაოდენობა.

ანალიტიკური ფორმის სამარტლიანობა უფრო ბოტაპი მიკავშირებული

$$y_i^+[\alpha_i(t)] = \sum_{k=1}^n [a_{ik}(t) \overline{\psi_k^-(t)} + b_{ik}(t) \psi_k^+(t)] \tag{11}$$

$$\xi_i^+(t) = \sum_{k=1}^n \left\{ a_{ki}(t) \overline{\alpha'_k(t)} \overline{\eta_k^+[\alpha_k(t)]} + b_{ki}(t) \alpha'_k(t) \eta_k^+[\alpha_k(t)] \right\}, \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{11'}$$

ამოცანებისათვისაც, რამდენავე ანალიტიკური ასევე განმარტებული



აზერბაიჯანის მეცნიერებათა აკადემია

ფიზიკის მეცნიერებათა აკადემია

თბილისი
8/XII-1980 წ.

რეზიუმე

1. Н.П.Векуа. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа, М., 1972.
2. Г.А.Капанадзе. Сообщения АН ГССР, 79, № 2, 1975.
3. Г.Н.Александрия. Сообщения АН ГССР, т.ХІІ, № 10, 1961.
4. Г.С.Литвинчук. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., 1977.
5. Д.А.Квеселавა. Труды Тбилисского Математического института, т.ХУІІІ, 1978.

Г. Н. Александрия

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ТИПА НЕТЕРА ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Резюме

В настоящей заметке предлагается простой способ доказательства теоремы типа Нетера об индексах внутренних граничных задач

$$\varphi_i^+[\alpha_i(t)] = \sum_{\kappa=1}^n \alpha_{i\kappa}(t) \overline{\psi_{\kappa}^+(t)},$$

(i=1, 2, ..., n)

$$\varphi_i[\alpha_i(t)] = \sum_{\kappa=1}^n \{ \alpha_{i\kappa}(t) \overline{\psi_{\kappa}^+(t)} + \delta_{i\kappa}(t) \psi_{\kappa}^+(t) \},$$

как для аналитических, так и для обобщенных аналитических функций.

G. Aleksandria

ON A NOETHER-TYPE THEOREM FOR SEVERAL
UNKNOWN FUNCTIONS

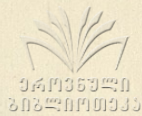
Summary

In this note a simple method is proposed for the proof of a Noether-type theorem on indices of internal boundary value problems

$$y_i^+ [\alpha_i(t)] = \sum_{\kappa=1}^n a_{i\kappa}(t) \overline{\psi_{\kappa}^+(t)}, \quad (i=1,2,\dots,n)$$

$$y_i [\alpha_i(t)] = \sum_{\kappa=1}^n \{a_{i\kappa}(t) \overline{\psi_{\kappa}^+(t)} + b_{i\kappa}(t) \psi^+(t)\},$$

both for analytic and generalized analytic functions,



Труды Тбилисского ордена Трудового Красного Знамени
государственного университета

თბილისის შრომის ნიშნით რჩებიან მხრებთანაბრ სახელმწიფო
უნივერსიტეტის შრომები
218, 1981

УДК 539. 03

ДЕФОРМАЦИЯ ПЛАСТИНЫ С НЕСИММЕТРИЧНЫМ КРИВОЛИНЕЙНЫМ
РЕБРОМ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

И. А. Зоненашвили

Методом конформного отображения в сочетании с методом коллокации решена задача о деформации произвольно нагруженной изотропной пластинки, криволинейный край общего вида которой подкреплён тонким эксцентричным ребром переменного сечения.

1. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины h , срединная плоскость которой занимает внутренность или внешность простого замкнутого контура L плоскости $\bar{z} = x + iy$. Вдоль L пластинка подкреплена тонким упругим кольцом переменной жесткости, плоская ось которого параллельно смещена относительно срединной поверхности пластинки на величину $\Delta = const$. Ребро обладает жесткостью на растяжение $G_1(s)$, кручение $C(s)$, изгиб вокруг нормали $A(s)$ и бинормали $G_2(s)$. Контур L отождествляется с осью кольца, вдоль которой приложены заданные произвольные внешние усилия.

3. Труды, т. 218

Обозначим через $z = \omega(\xi)$ функцию, осуществляющую конформное отображение внутренности или внешности единичной окружности γ плоскости $\xi = \kappa e^{i\theta}$ на внутренность или внешность контура L . Тогда граничные условия спая пластинки с кольцом на L могут быть сведены к следующим условиям на γ /1/ :

$$\delta_1(s) \left[U_1(s) - \frac{\Delta}{R} U_2(s) \right] + F_1'(s) + \frac{1}{\rho(s)} \int_0^s F_1'(s) ds = \phi_1'(s) + \frac{Rc_1}{\rho(s)}, \quad (1)$$

$$\left[\delta_1(s) + \frac{\delta_2(s) R^2}{\rho(s)} \right] \left[U_1(s) - \frac{\Delta}{R} U_2(s) \right] - \quad (2)$$

$$\delta_2(s) \frac{R^2}{\rho(s)} \left[\dot{V}_1(s) + \frac{\Delta}{R} \dot{V}_2(s) \right] + F_2'(s) = \phi_2'(s),$$

$$\delta_3(s) U_2(s) - F_3'(s) + \frac{12(1-\nu)R\Delta}{R^2} F_2'(s) = \phi_3'(s), \quad (3)$$

$$\delta_4(s) V_2(s) + F_4'(s) + \frac{12(1-\nu)R\Delta}{R^2} F_1'(s) = \phi_4'(s). \quad (4)$$

В случае симметричного подкрепления ($\Delta=0$) условия (1) - (4) разделяются на отдельные, не связанные друг с другом граничные условия плоской теории упругости (1), (2) и теории изгиба пластин (3), (4).

Определенные на γ основные искомые функции градиентов перемещений $U_j(\theta)$, $V_j(\theta)$, функции приращений главных компонентов кривизны и кручения ребра $U_2(\theta)$, $V_2(\theta)$ и вспомогательные функции $F_j'(\theta)$ ($j=1,2,3,4$) связаны с компонентами (по осям ox и oy) вектора перемещения $g_1 = U_1 + iV_1$ и вектора $g_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} \right)$ формулами

$$U_1 + iV_1 = g_1'(\xi) / \omega'(\xi), \quad (5)$$

$$u_2 - iV_2 = -2R g_2'(\epsilon) / \omega'(\epsilon), \quad (6)$$

$$\pm \frac{i\epsilon\omega'(\epsilon)}{|\omega'(\epsilon)|} (F_1 + iF_2) = \frac{1+z}{2\kappa R} \varphi_1(\epsilon) - \frac{g_1(\epsilon)}{R} - c_2, \quad (7)$$

$$\pm \frac{i\epsilon\omega'(\epsilon)}{|\omega'(\epsilon)|} (F_3 + iF_4) = \quad (8)$$

$$= 8\varphi_2(\epsilon) - 2(1-\nu)g_2(\epsilon) - 2i(1-\nu)\omega(\epsilon)c_3,$$

где $c_2 = c_2' + ic_2''$ — комплексная, а c_3 — вещественная постоянные, z — постоянная Мусхелишвили, $\varphi_i(\epsilon)$ ($i=1,2$) — граничные значения комплексных потенциалов $\varphi_i(z)$ ($i=1,2$), которые известным образом выражаются через функции $g_i(\epsilon)$, а именно: из решения второй основной задачи при $i=1$, или из решения первой основной задачи для той же области при $i=2$, когда на L заданы соответственно $g_i(\epsilon)$ ($i=1,2$):

$$z \varphi_1(\epsilon) - \frac{\omega(\epsilon)}{\omega'(\epsilon)} \overline{\varphi_1'(\epsilon)} - \overline{\psi_1(\epsilon)} = 2\kappa g_1(\epsilon), \quad (9)$$

$$\varphi_2(\epsilon) + \frac{\omega(\epsilon)}{\omega'(\epsilon)} \overline{\varphi_2'(\epsilon)} + \overline{\psi_2(\epsilon)} = g_2(\epsilon). \quad (10)$$

Из встречающихся в формулах двойных знаков верхний (нижний) берется, когда пластинка занимает внутренность (внешность) контура L .

Функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ содержат, вообще говоря, некоторое число констант $K_\nu = K_\nu' + iK_\nu''$ и $N_\nu = N_\nu' + iN_\nu''$ ($\nu = 1, 2, \dots, m$) соответственно, определяемых через $g_i(\epsilon)$ при решении основных граничных задач (9), (10) /2/.

Представим искомые функции в виде:

$$U_1 + iV_1 = R \sum_{\kappa=0}^N [(a_{\kappa} + i b_{\kappa}) \epsilon^{\kappa} + (\bar{a}_{\kappa} + i \bar{b}_{\kappa}) \epsilon^{-\kappa}], \quad (II)$$

$$U_2 - iV_2 = R \sum_{\kappa=0}^N [(a'_{\kappa} - i b'_{\kappa}) \epsilon^{\kappa} + (\bar{a}'_{\kappa} - i \bar{b}'_{\kappa}) \epsilon^{-\kappa}], \quad (I2)$$

где $\alpha_{\kappa} = \alpha'_{\kappa} + i\alpha''_{\kappa}$, $\beta_{\kappa} = \beta'_{\kappa} + i\beta''_{\kappa}$, $a'_{\kappa} = \gamma'_{\kappa} + i\gamma''_{\kappa}$, $b'_{\kappa} = \delta'_{\kappa} + i\delta''_{\kappa}$

- комплексные коэффициенты, подлежащие определению.

Решение задачи существенно упрощается путем применения метода коллокации, позволяющего эффективно использовать ЭВМ при произвольных жесткостях ребра.

Подстановка рядов (II), (I2) в соотношениях (5), (6) позволяет вычислить $g_i(\epsilon)$, а затем и $\varphi_i(\epsilon)$ ($i=1,2$). Далее, по формулам (7), (8) определяются функции $f_i(\theta)$ ($i=1,2,3,4$).

После подстановки всех найденных выражений в условия (I) - (4), потребуем их удовлетворения в конечном числе точек коллокации $\theta = \theta_j$ ($j=0,1,2,\dots,2N+1$) на γ . Кроме того, необходимо удовлетворять условиям однозначности функций $g_1(\epsilon)$ и $g_2(\epsilon)$. В итоге получается система линейных алгебраических уравнений для искомым величин $\alpha'_{\kappa}, \alpha''_{\kappa}, \beta'_{\kappa}, \beta''_{\kappa}, \gamma'_{\kappa}, \gamma''_{\kappa}, \delta'_{\kappa}, \delta''_{\kappa}$. Для дополнительных неизвестных $K_j = K'_j + iK''_j$, $N_j = N'_j + iN''_j$ имеем добавочную систему линейных уравнений (см. /2/, § 84). В конечном итоге через функции U_i, V_i выражаются напряжения в пластинке.

2. Изложенный выше алгоритм решения задачи рассмотрим более подробно для случая, когда конечная односвязная область, занимаемая срединной поверхностью пластинки, конформно отображается на единичный круг при помощи функции

$$\omega(\xi) = R \sum_{j=1}^m c_j \xi^j (c_j \neq 0, c_m \neq 0, c_j = c'_j + i c''_j). \quad (13)$$

Из соотношений (5) и (6) легко вычисляются функции

$$g_1(\sigma) = \sum_{k=0}^N \left\{ [(\alpha'_k - \beta''_k) + i(\alpha''_k + \beta'_k)] \Phi_{k,1}(\sigma) + [(\alpha'_k + \beta''_k) - i(\alpha''_k - \beta'_k)] \Phi_{k,2}(\sigma) \right\}, \quad (14)$$

$$g_2(\sigma) = \sum_{k=0}^N \left\{ [(\gamma'_k + \delta''_k) + i(\gamma''_k - \delta'_k)] \Phi_{k,1}(\sigma) + [(\gamma'_k - \delta''_k) - i(\gamma''_k + \delta'_k)] \Phi_{k,2}(\sigma) \right\}, \quad (15)$$

где

$$\Phi_{k,1}(\sigma) = 0, \quad \Phi_{k,1}(\sigma) = R \sum_{j=1}^m \frac{j c_j}{k+j} \sigma^{k+j}, \quad k \neq l, \quad (16)$$

$$\Phi_{k,2}(\sigma) = R \sum_{j=1}^m \frac{j c_j}{j-k} \sigma^{j-k}, \quad j \neq k. \quad (17)$$

Условия однозначности функций $g_i(\sigma)$ ($i=1,2$) имеют вид:

$$\sum_{k=1}^m K [(\alpha'_k + \beta''_k) c'_k + (\alpha''_k - \beta'_k) c''_k] = 0, \quad (18)$$

$$\sum_{k=1}^m K [(\alpha'_k + \beta''_k) c''_k - (\alpha''_k - \beta'_k) c'_k] = 0,$$

$$\sum_{k=1}^m K [(\gamma'_k - \delta''_k) c'_k + (\gamma''_k + \delta'_k) c''_k] = 0, \quad (19)$$

$$\sum_{k=1}^m K [(\gamma'_k - \delta''_k) c''_k - (\gamma''_k + \delta'_k) c'_k] = 0.$$

Из решения основных граничных задач (9), (10) (/2/ ,

§ 84) определяем:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\sigma) = & \frac{2R}{\alpha} \sum_{k=0}^N \left\{ [(\alpha'_k - \beta''_k) + i(\alpha''_k + \beta'_k)] \Phi_{k,1}(\sigma) + \right. \\ & \left. + [(\alpha'_k + \beta''_k) - i(\alpha''_k - \beta'_k)] \Phi_{k,2}(\sigma) \right\} + \frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^m K_j \sigma^j, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(\theta) = & \sum_{\kappa=0}^N \left\{ [(\gamma'_\kappa + \delta''_\kappa) + i(\gamma''_\kappa - \delta'_\kappa)] \varphi_{\kappa,1}(\theta) + \right. \\ & \left. + [(\gamma'_\kappa - \delta''_\kappa) - i(\gamma''_\kappa + \delta'_\kappa)] \varphi_{\kappa,2}(\theta) \right\} - \sum_{\nu=1}^m N_\nu \theta^\nu. \end{aligned} \quad (21)$$

Подставляя значения $\varphi_i(\theta)$ и $g_i(\theta)$ ($i=1,2$) в соотношения (7), (8) и отделяя действительные и мнимые части, находим

$$\begin{aligned} F_i(\theta) = & \frac{(-1)^{i+1}}{2\mu R|\omega'(\theta)|} \sum_{\kappa=0}^N \left[\Omega_{\kappa,i,1}(\theta) \alpha'_\kappa + \Omega_{\kappa,i,2}(\theta) \alpha''_\kappa + \right. \\ & \left. + \Omega_{\kappa,i,3}(\theta) \beta'_\kappa + \Omega_{\kappa,i,4}(\theta) \beta''_\kappa \right] + \sum_{\nu=1}^m \left[\Omega_{\nu,i,5}(\theta) K'_\nu + \right. \\ & \left. + \Omega_{\nu,i,6}(\theta) K''_\nu \right] + \Omega_{i,\gamma}(\theta) c'_2 + \Omega_{i,\delta}(\theta) c''_2 + \Omega_{i,9}(\theta), \\ & (i=1,2); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} F_i(\theta) = & \frac{(-1)^{i+1}}{2\mu R|\omega'(\theta)|} \sum_{\kappa=0}^N \left[\Omega_{\kappa,i,1}(\theta) \gamma'_\kappa + \Omega_{\kappa,i,2}(\theta) \gamma''_\kappa + \right. \\ & \left. + \Omega_{\kappa,i,3}(\theta) \delta'_\kappa + \Omega_{\kappa,i,4}(\theta) \delta''_\kappa \right] + \sum_{\nu=1}^m \left[\Omega_{\nu,i,5}(\theta) N'_\nu + \right. \\ & \left. + \Omega_{\nu,i,6}(\theta) N''_\nu \right] + \Omega_{i,\gamma}(\theta) c'_2 + \Omega_{i,\delta}(\theta) c''_2 + \Omega_{i,9}(\theta), \\ & (i=3,4), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\Omega_{\kappa,i,\gamma}(\theta)$ и $\Omega_{i,\gamma}(\theta)$ - известные функции.

Подставим, наконец, выражения $U_j(\theta)$, $V_j(\theta)$, $F_i(\theta)$ ($j=1,2$; $i=1,\dots,4$) в граничные условия (1) - (4) и потребуем их удовлетворения в конечном числе точек коллокации $\theta = \theta_j$ ($j=0,1,2,\dots,2N+1$) на γ . В итоге получаем систему линей-



ных алгебраических уравнений для искомым величин $\alpha'_k, \alpha''_k,$

$\beta'_k, \beta''_k, \gamma'_k, \gamma''_k, \delta'_k, \delta''_k$ ($k=0, 1, \dots, N$):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^N (A_{k,i,j}^{(1)} \alpha'_k + A_{k,i,j}^{(2)} \alpha''_k + A_{k,i,j}^{(3)} \beta'_k + A_{k,i,j}^{(4)} \beta''_k + \\ & + A_{k,i,j}^{(5)} \gamma'_k + A_{k,i,j}^{(6)} \gamma''_k + A_{k,i,j}^{(7)} \delta'_k + A_{k,i,j}^{(8)} \delta''_k) + \\ & + \sum_{\nu=1}^m (B_{\nu,i,j}^{(1)} K'_\nu + B_{\nu,i,j}^{(2)} K''_\nu + B_{\nu,i,j}^{(3)} N'_\nu + B_{\nu,i,j}^{(4)} N''_\nu) + \\ & + B_{i,j}^{(5)} c_1 + B_{i,j}^{(6)} c_3 + B_{i,j}^{(7)} c'_2 + B_{i,j}^{(8)} c''_2 = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь $f_{i,j} = f_i(\theta_j)$ - известные функции, зависящие от заданных нагрузок, $A_{k,i,j}^{(n)}, B_{\nu,i,j}^{(n)}, V_{i,j}^{(n)}$ - известные величины.

Кроме того имеем еще четыре уравнения (18), (19) - выражающие однозначность функций $g_1(\zeta)$ и $g_2(\zeta)$.

При решении основных граничных задач (9), (10) для дополнительных неизвестных $K_\nu = K'_\nu + iK''_\nu, N_\nu = N'_\nu + iN''_\nu$ известным образом (см. /2/ §84) получается добавочная система линейных алгебраических уравнений.

Все сказанное с очевидными незначительными изменениями приложимо к случаю бесконечной области S , отображаемой на внешность круга $|\zeta| > 1$ функцией вида

$$\omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\zeta^j}. \quad (25)$$

При этом следует сначала представить функции $\varphi_i(\zeta)$, $\psi_i(\zeta)$ в виде (см. /2/, §78) $\varphi_i(\zeta) = \Gamma_i' \zeta + \varphi_i^0(\zeta)$, $\psi_i(\zeta) = \Gamma_i' \zeta + \psi_i^0(\zeta)$ ($i=1,2$), где $\varphi_i^0(\zeta)$, $\psi_i^0(\zeta)$ - голоморфные функции в области $|\zeta| > 1$, Γ_i' , Γ_i'' определяются напряженным состоянием на бесконечности, и затем поступить, как указано выше.

Компоненты напряжений и моментов в пластинке на L выражаются формулами / 4 / :

$$\hat{\rho}\hat{\rho} = (1+\nu) \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} - 2\mu U_1,$$

$$\hat{\theta}\hat{\theta} = (3-\nu) \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} + 2\mu U_1,$$

$$\hat{\rho}\hat{\theta} = (1+\nu) \operatorname{Im} \left\{ \frac{\varphi_1'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} - 2\mu V_1,$$

$$M_x = -8\mathcal{D} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_2'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} - \frac{\mathcal{D}(1-\nu)}{R} U_2 - 2\mathcal{D} \left[(1+\nu) \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \bar{x}} + (1-\nu) \operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial \bar{x}^2} \right\} \right],$$

$$M_\theta = -8\nu \mathcal{D} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\varphi_2'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} + \frac{\mathcal{D}(1-\nu)}{R} U_2 - 2\mathcal{D} \left[(1+\nu) \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial \bar{x}} - (1-\nu) \operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial \bar{x}^2} \right\} \right],$$

$$M_{x\theta} = \frac{8(1-\nu)}{R} V_2 + 2\mathcal{D}(1-\nu) \operatorname{Im} \left\{ \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\partial^2 w^0}{\partial \bar{x}^2} \right\}.$$

В случае подкрепления пластины симметричным ребром линейная алгебраическая система уравнений (24) разделяется на две независимые системы уравнений, характеризующие соответственно плоскую задачу и задачу изгиба / 6 /.

На основе построенного здесь решения прямой задачи можно осуществить оптимальное подкрепление края пластинки ребром переменной жесткости с помощью методов математического программирования / 1 /.

3. В качестве примеров рассмотрены случаи, когда срединная плоскость пластинки, подкрепленной ребром переменной жесткости, занимает

1. Бесконечную плоскость с круговым отверстием / 3 /

$$(\omega(\xi) = \frac{R}{\xi}),$$

2. Круг / 5 / $(\omega(\xi) = R\xi),$

3. Бесконечную плоскость с эллиптическим отверстием / 4 / $(\omega(\xi) = R(\frac{1}{\xi} + m\xi)),$

4. Бесконечную плоскость с квадратным отверстием / 4 / $(\omega(\xi) = R(\frac{1}{\xi} + m\xi^2)).$

Изучен также вопрос влияния эксцентриситета ребра жесткости на деформацию круглой пластинки / 7 /.

В этих задачах, в зависимости от нагрузок и геометрических параметров формы пластины установлено, что подкрепляющее ребро переменной жесткости позволяет существенно снизить максимальные расчетные напряжения в пластинке по сравнению с равнообъемным ребром постоянного сечения.

Так, например, при одноосном растяжении неограниченной пластинки с круговым отверстием напряжениями $P = const$ на бесконечности концентрация напряжений в пластинке практи-

чески устраняется, когда жесткости подкрепляющего ребра изменяются по закону.

$$\delta_1(\theta) = 0,39 \left[1 + 3 \left(\frac{2\theta}{\pi} \right)^3 \right], \quad \delta_2(\theta) = 0,004 \delta_1(\theta) \quad |3|.$$

В симметрично нагруженном круглом диске, подкрепленном ребром переменной жесткости ($\delta_1(\theta) = \frac{0,1406}{(2+\beta)^3} (1 + \beta \cos^2 \theta)^3$,

$\delta_2(\theta) = 0,004 \delta_1(\theta)$, 151), напряжение в пластинке уменьшается приблизительно на 36% по сравнению с равнообъемным ребром постоянной жесткости.

Аналогично, подкрепление края эллиптического отверстия неограниченной пластинки ребром переменной жесткости ($\delta_1(\theta) = a \sin^2 \theta$, $\delta_2(\theta) = 0,004 \delta_1(\theta)$, 141) приводит по сравнению с равнообъемным ребром постоянной жесткости к уменьшению напряжений σ_{max} в пластинке на 21%.

Исследование влияния эксцентриситета ребра жесткости на деформацию гибкой пластинки показывает, что для одного и того же ребра жесткости максимальный прогиб в круглой пластинке можно уменьшить приблизительно на 25% соответствующим подбором эксцентриситета / 7 /.

Поступила 10.XII.1980

Кафедра теоретической
механики

ЛИТЕРАТУРА

1. И.А. Зоненашвили. М.Л.Кац. Расчет и оптимизация пластин, подкрепленных тонким ребром жесткости. Труды XII конфе-

L.Zonenashvili

DEFORMATION OF PLATES WITH ASYMMETRIC CURVED
LINEAR RIBS OF VARIABLE RIGIDITY

Summary

A solution of the plane value problem of the theory of elasticity has been obtained by the method of collocation for a single-linked plate of arbitrary shape the end of which is strengthened with a rib of variable rigidity. The influence of the rib on the concentration of stresses in the plate with a circular hole subjected to stretching has been investigated.

УДК 539.3.01

ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ

Л.Г.Доборджинидзе

I. Пусть в круговое отверстие, сделанное в бесконечной упругой среде, вложена упругая круговая шайба того же радиуса, что и отверстие.

На шайбу действует система усилий, главный вектор которых обозначим через (X, Y) . Под действием этих сил осуществляется контакт рассматриваемых упругих тел вдоль некоторой части их границ, не задаваемой заранее. Предполагается, что на участке соприкосновения имеют место силы трения. Напряжение и вращение на бесконечности будем считать равными нулю.

За физическую область пластинки примем плоскость переменной $\zeta = \xi + i\eta$ с круговым отверстием радиуса I . Обозначим контур отверстия через γ , контактную линию - через γ_1 ; γ_2 - остальная часть полной окружности γ ($\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$).

Все характеристики, относящиеся к упругой шайбе, обозначим индексом $\langle\langle 0 \rangle\rangle$. Тогда граничные условия задачи запишутся так:

$$v_x^{(0)} = v_x, \quad T(\sigma) = K(\sigma)N(\sigma) \quad \text{на } \gamma_1$$

$$T(\sigma) = 0, \quad N(\sigma) = 0 \quad \text{на } \gamma_2 \quad (I.1)$$

$$N_0(\sigma) = N(\sigma), \quad T_0(\sigma) = T(\sigma) \quad \text{на } \gamma$$

где $v_x^{(0)}$, v_x - нормальные упругие смещения, $N(\sigma)$ и $T(\sigma)$ - нормальное и касательное напряжения на γ , а $K(\sigma)$ - известная действительная функция от точки $\sigma = e^{i\theta}$.

Требуется определить участок контакта γ_1 и неизвестное нормальное давление $N(\sigma)$ на этом участке.

Комплексные потенциалы, соответствующие бесконечной пластинке и шайбе, обозначим через $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ соответственно. Как известно (предполагается, что сила (X, Y) приложена в центре шайбы)

$$\varphi_0(z) = \alpha_0 \ln z + \varphi_0^*(z), \quad \psi_0(z) = \beta_0 \ln z + \psi_0^*(z), \quad (I.2)$$

где

$$\alpha_0 = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \alpha_0)}, \quad \beta_0 = \frac{X - iY}{2\pi(1 + \alpha_0)}, \quad (I.3)$$

а функции $\varphi_0^*(z)$ и $\psi_0^*(z)$ - голоморфны в единичном круге.

Исходя из соответствующих соотношений (I.1), введенные потенциалы можно представить в виде

$$\varphi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (1 + iK(\sigma)) N(\sigma) \ln\left(1 - \frac{z}{\sigma}\right) d\sigma + \quad (I.4)$$

$$\alpha_0 \ln z - \bar{\alpha}_0 z^2 - \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{N(\sigma) d\sigma}{\sigma} + const,$$

$$\begin{aligned} \psi_0(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{(1+i\kappa(\sigma))N(\sigma)d\sigma}{\sigma-z} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \bar{\sigma}^2 (1-i\kappa(\sigma))N(\sigma) \ln\left(1-\frac{z}{\sigma}\right) d\sigma + \\ & + \frac{1}{2\pi i z} \int_{\gamma_1} \frac{N(\sigma)d\sigma}{\sigma} - \alpha_0 \bar{\alpha}_0 \ln z + \text{const} \end{aligned} \quad (I.5)$$

при $|z| < 1$.

При выводе этих соотношений учтено, что

$$\Im \varphi_0^{*1}(0) = 0. \quad (I.6.)$$

Далее, при достаточно больших $|z|$ имеем

$$\varphi(z) = \alpha_1 \ln z + \varphi^*(z), \quad \psi(z) = \beta_1 \ln z + \psi^*(z), \quad (I.7)$$

где $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$ - функции, голоморфные при $z = \infty$, а постоянные α_1 и β_1 определяются так:

$$\alpha_1 = -\frac{\chi + i\gamma}{2\pi(1+\chi)}, \quad \beta_1 = -\chi \bar{\alpha}_1. \quad (I.8)$$

Легко убедиться также в справедливости следующих представлений:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (1+i\kappa(\sigma))N(\sigma) \ln\left(1-\frac{z}{\sigma}\right) d\sigma + \alpha_1 \ln z + \text{const}, \quad (I.9)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i \zeta} \int_{\gamma_1} \frac{(1+i\kappa(\sigma))\mathcal{N}(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta} - \quad (I.10)$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \bar{\sigma}^2 (1-i\kappa(\sigma)) \ln\left(1-\frac{\sigma}{\zeta}\right) d\sigma + \frac{a_1 \zeta}{\zeta^2} + b_1 \ln \zeta + const \text{ при } |\zeta| > 1.$$

Найдем теперь предельные значения этих функций на γ_1 и полученные выражения подставим в формулу

$$\mathcal{M} \operatorname{Re} \left\{ \bar{\sigma}_0 \left[x_0 \varphi_0(\sigma_0) - \sigma_0 \overline{\varphi_0'(\sigma_0)} - \overline{\psi(\sigma_0)} \right] \right\} = \quad (I.11)$$

$$\mathcal{M}_0 \operatorname{Re} \left\{ \bar{\sigma}_0 \left[x \varphi(\sigma_0) - \sigma_0 \overline{\varphi'(\sigma_0)} - \overline{\psi(\sigma_0)} \right] \right\},$$

выражающую первое соотношение условия (I.1) в комплексной форме. Найденное таким образом соотношение продифференцируем по ϑ_0 ($\sigma_0 = e^{i\vartheta_0}$) и полученное равенство сложим с прежним. Тогда, после известных рассуждений, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{M}_0(x-1) + \mathcal{M}(x_0-1)}{\mathcal{M}_0(x+1) + \mathcal{M}(x_0+1)} \kappa(\sigma_0) \mathcal{N}(\sigma_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} \frac{\mathcal{N}(\sigma) d\sigma}{\sigma - \sigma_0} + \quad (I.12) \\ & + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_1} H(\sigma_0, \sigma) \mathcal{N}(\sigma) d\sigma = F(\sigma_0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H(\sigma_0, \sigma) = & \frac{1}{2[\mathcal{M}_0(x+1) + \mathcal{M}(x_0+1)]} \left\{ (1+i)(1+i\kappa(\sigma)) \bar{\sigma}_0 \left[\mathcal{M}_0 x \ln\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{M}_0 \overline{\ln\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)} + \mathcal{M} x_0 \ln\left(1-\frac{\sigma_0}{\sigma}\right) + \mathcal{M} \overline{\ln\left(1-\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)} \right] - \right. \\ & \left. - (1-i) \bar{\sigma}_0^2 (1-i\kappa(\sigma)) \left[\mathcal{M}_0 x \overline{\ln\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)} + \mathcal{M}_0 \ln\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right) + \mathcal{M} x_0 \overline{\ln\left(1-\frac{\sigma_0}{\sigma}\right)} \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{M} \ln\left(1-\frac{\sigma_0}{\sigma}\right) \right] + \frac{2}{i\sigma} \right\} - \frac{1-i\kappa(\sigma)}{2\sigma}, \end{aligned} \quad (I.13)$$

$$F(\sigma_0) = \frac{Y}{2\pi [\mu_0(x+1) + \mu(x_0+1)]} \left\{ [2\mu - \mu_0 x + \mu \kappa(\sigma_0)] (\sigma_0 + \bar{\sigma}_0) + \right. \\ \left. + i [\mu + (2\mu - \mu_0 x) \kappa(\sigma_0)] (\sigma_0 - \bar{\sigma}_0) + \frac{\mu(x_0-1) \kappa(\sigma_0)}{x+1} \right\}. \quad (I.14)$$

(I.12) представляет собой сингулярное интегральное уравнение нормального типа, служащее совместно с условием

$$\int_{\gamma_1} N(\sigma) d\sigma = Y = -N_0 \quad (I.15)$$

для определения искомого нормального давления $N(\sigma)$ под шайбой, на контактной линии.

2. В качестве примера рассмотрим случай, когда круглая упругая шайба прижимается к отверстию в жесткой пластинке. Соответствующее этому случаю уравнение получим из (I.12) предельным переходом при $\mu \rightarrow \infty$.

Для решения полученного сингулярного интегрального уравнения удобно перейти к плоскости переменной $z = x + iy$ соотношением /2/

$$\zeta = i \frac{z - i\beta}{z + i\beta} \quad \left(\beta = \frac{\cos \varphi_n}{1 + \sin \varphi_n} \right), \quad (2.1)$$

где φ_n - полярный угол правого конца дуги γ_1 .

Обозначим теперь функции $N(\sigma)$, $\kappa(\sigma)$ через $N_1(\sigma)$, $\kappa_1(\sigma)$ соответственно и введем новые обозначения

$$N(x) = N_1(\sigma) = N_1 \left(i \frac{x - i\beta}{x + i\beta} \right), \quad \kappa(x) = \kappa_1(\sigma) = \kappa_1 \left(i \frac{x - i\beta}{x + i\beta} \right).$$

Тогда из (I.12), (I.15) и (I.16) после некоторых вычислений найдем

$$\frac{(x-1)K(x_0)}{x+1} \cdot N(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{N(x) dx}{x-x_0} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \Gamma(x_0, x) N(x) dx = G(x_0), \quad (2.2)$$

$$\frac{2\beta}{N_0} \int_{-1}^1 \frac{(x^2-\beta^2)N(x) dx}{(x^2+\beta^2)^2} = 1, \quad (2.3)$$

где

$$\Gamma(x_0, x) = \frac{\beta}{(x+1)(x^2+\beta^2)(x_0^2+\beta^2)} \left\{ \left[2\beta(1-\kappa)x_0 + \right. \right.$$

$$\left. + (1+\kappa)(x_0^2-\beta^2) \right] \left[2\beta(x-1)x \left(\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_0 x + \beta^2}{\beta(x_0-x)} + \delta \right) - \right.$$

$$\left. - (x+1)(x^2-\beta^2) \ln \frac{2\beta|x-x_0|}{\sqrt{(x^2+\beta^2)(x_0^2+\beta^2)}} \right] - \left[(\kappa-1)(x_0^2-\beta^2) + \right.$$

$$\left. + 2\beta(1+\kappa)x_0 \right] \left[(x-1)(x^2-\beta^2) \left(\alpha \operatorname{arctg} \frac{x_0 x + \beta^2}{\beta(x_0-x)} + \delta \right) + \right.$$

$$\left. + 2\beta(x+1)x \ln \frac{2\beta|x-x_0|}{\sqrt{(x^2+\beta^2)(x_0^2+\beta^2)}} \right] - \frac{\beta(\kappa+1)+x}{x^2+\beta^2}, \quad (2.4)$$

$$G(x_0) = \frac{\gamma}{\pi(1-x)} \cdot \frac{\kappa(\beta^2 - x_0^2) + 2\beta(\kappa-2)x_0 - (\kappa+1)(x_0^2 + \beta^2)}{x_0^2 + \beta^2}, \quad (2.5)$$

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta(x_0 - x) > 0, \\ \pi & \text{при } \beta(x_0 - x) < 0, x_0 x + \beta^2 \geq 0, \\ -\pi & \text{при } \beta(x_0 - x) < 0, x_0 x + \beta^2 < 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Согласно общей теории сингулярных интегральных уравнений решение уравнения (1.12), ограниченное на обоих концах отрезка $\setminus -1; 1/$, имеет вид

$$\mathcal{N}(x) = (1-x)^{1/2+\alpha} (1+x)^{1/2-\alpha} \mathcal{N}_0(x), \quad (2.7)$$

где $\mathcal{N}_0(x)$ — ограниченная функция на $\setminus -1; 1/$, а постоянная α определяется формулой

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\kappa(x-1)}{x+1}. \quad (2.8)$$

Подставим (2.7) в (2.2), (2.3) и полученные соотношения заменим следующей системой алгебраических уравнений относительно дискретных значений функции $\bar{\mathcal{N}}(x) = \frac{\mathcal{N}_0(x)}{\mathcal{N}_0}$ на $\setminus -1; 1/$ и относительно параметра β , характеризующего размеры заранее неизвестного участка контакта:

$$\begin{aligned} & \frac{(x-1)\kappa(x_i)}{x+1} \bar{\mathcal{N}}(x_i) + \\ & + \frac{2}{n\pi} \sum_{j=1}^n \frac{[(1-x_j)^{1/2+\alpha} (1+x_j)^{1/2-\alpha} \bar{\mathcal{N}}(x_j) - (1-x_i)^{1/2+\alpha} (1+x_i)^{1/2-\alpha} \bar{\mathcal{N}}(x_i)]}{x_j - x_i} + \\ & + \frac{2}{n\pi} \sum_{j=1}^n \Gamma(x_i, x_j) \bar{\mathcal{N}}(x_j) = \frac{G(x_i)}{\mathcal{N}_0}, \end{aligned}$$

$$\frac{4\beta}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(x_j^2 - \beta^2)(1-x_j)^{1/2+\alpha} (1+x_j)^{1/2-\alpha} \bar{N}(x_j)}{(x_j^2 + \beta^2)^2} = 1, \quad (2.9)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

Система (2.9) (при $K(x) = K = \text{const}$, $\nu = 1/3$, $n = 10$) решалась на ЭВМ, при различных значениях коэффициента трения K . Результаты вычислений сведены в таблице:

K	0	0,1	0,3	0,5	0,8
ϑ_*	6°20'	7°10'	9°20'	11°40'	15°30'
N_{\max}	-0,6019 N_0	-0,6287 N_0	-0,6591 N_0	-0,6783 N_0	-0,7216 N_0

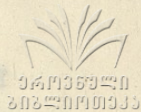
Эти значения при $K = 0$ мало отличаются от соответствующих значений, полученных А.И.Каландия, решившим эту задачу при отсутствии сил трения иным путем / 2 /.

Поступила 15.XI.1980

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.И.Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. А.И.Каландия. Математические методы двумерной упругости. М., 1973.



3. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения.
М., 1968.

ღ.დობორჯინიძე

ბრწყველი საკონტაქტო პირობაში ბაზუნის ძალიანი მათემატიკური-
წიგნი

რეზიუმე

განხილულია ელასტიკური კონტაქტის ტიპის ბრწყველი საკონ-
ტაქტო ამოცანა, როცა უსასრულო ელასტიკური სხეულის წრფივი ზედაპირის
ხვრელი ჩადებულია იმავე რადიუსის ელასტიკურ გარსში.

გარსის ქვეშე, საკონტაქტო ზედაპირზე საბრწყველი ნორმალური წნე-
ვის ფუნქციის მიმართ, მიღებულია ნორმალური ზედაპირის სინგულარული
ინტეგრალური განტოლება. ამ განტოლებების ამოხსენების გამოყენე-
ბულია მინიმუმის პრინციპის ალგორითმი. გამოტვირთვების შედეგები
წარმოდგენილია რიცხვითი ფორმით.

АННОТЦ

L. Doborjginidze

PLANE CONTACT PROBLEM IN THE PRESENCE OF
FRICTIONAL FORCES

Summary

A contact problem is considered when an elastic circular plate
of the same radius is imbedded into a circular hole made in an infi-
nite elastic body.

УДК 517.958

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО
ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ВЕКТОРА

Л.А. Гоголаури

Для системы дифференциальных уравнений с частными про-
изводными /5/

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u + (H \cdot u) &= 0, \\ \operatorname{rot} u + [u \cdot H] &= 0, \end{aligned} \quad (I)$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ - искомый вектор, $u_k = u_k(x)$; $x = (x_1, x_2, x_3)$ - точка трехмерного евклидова пространства, $H(a, b, c)$ - заданный постоянный вектор, эффективно решаются две граничные задачи.

Эта система, с одной стороны, является обобщением потенциальной системы / I /, а, с другой, представляет собой трехмерный аналог обобщенной системы Коши-Римана / 2 /. Система (I) находит применение, например, в гидродинамике. В частности, к ней сводится система основных уравнений стационарного безвихревого движения жидкости.

Задача I. Определить в полупространстве $x_3 > 0$ регулярное решение системы (I) по смешанным граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u_3 \Big|_{x_3=0} &= f(x_1, x_2), \quad x_1 > 0 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad x_1 < 0 \end{aligned} \right\} -\infty < x_2 < \infty, \quad (2)$$

где $f(x_1, x_2)$ - заданная функция, удовлетворяющая условию $|f_1(x_1, \eta)| < c_1(\eta) \exp(\tau_1 x_1)$ при $x_1 \rightarrow \infty$, $-\sqrt{H^2 + \eta^2} \leq \tau_1, \tau_2 \leq \sqrt{H^2 + \eta^2}$; здесь $f_1(x_1, \eta)$ - обратное преобразование Фурье функции $f(x_1, x_2)$ по переменной x_2 ; τ_1 и τ_2 - некоторые действительные числа, $c_1(\eta) \in L$.

Задача 2. В области D (бесконечном пространстве, разрезанном вдоль полуплоскости $x_3 = 0, x_1 > 0$) определить исчезающее на бесконечности решение системы (I) по граничным условиям

$$u_3 \Big|_{x_3=0}^{\pm} = f^{\pm}(x_1, x_2), \quad x_1 > 0, \quad -\infty < x_2 < \infty, \quad (3)$$

где $u_3 \Big|_{x_3=0}^{\pm}$ означают предельные значения u_3 при стремлении $0 < x_3 \rightarrow 0$ и $0 \leftarrow x_3 < 0$ соответственно; f^{\pm} - заданные абсолютно интегрируемые функции.

В двумерном случае решения некоторых граничных задач для функции, аналитической в бесконечной плоскости, разрезанной вдоль конечного числа отрезков прямой, построены в квадратурах в работе / 3 /.

Решение задачи I. Применяя к системе (I) преобразование Фурье по переменным x_1 и x_2 , находим

$$u_j(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\xi, \eta) g_j e^{-\lambda x_3} e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta, \quad (4)$$

$j = 1, 2, 3,$



где $C(\xi, \eta)$ - произвольная функция, $g_1 = a - i\xi/c + \lambda$, $g_2 = b - i\eta/c + \lambda$, $g_3 = 1$; $\tau_1 < \kappa < \tau_2$; $\lambda = \sqrt{A^2 + \xi^2 + \eta^2}$, причем выбираем ту ветвь корня, для которой $|\lambda| \rightarrow R$ при $R \rightarrow +\infty$, где $R^2 = \xi^2 + \eta^2$.

Из (4) следует:

$$\frac{\partial U_3}{\partial x_3} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{i\kappa-\infty}^{i\kappa+\infty} \lambda C(\xi, \eta) e^{-\lambda x_3} e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta.$$

Функция $C(\xi, \eta)$ в силу условий (2) будет удовлетворять системе парных интегральных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{i\kappa-\infty}^{i\kappa+\infty} C(\xi, \eta) e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta &= f(x_1, x_2), \quad x_1 > 0 \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{i\kappa-\infty}^{i\kappa+\infty} \lambda C(\xi, \eta) e^{i(x_1 \xi + x_2 \eta)} d\xi d\eta &= 0, \quad x_1 < 0 \end{aligned} \right\} -\infty < x_2 < \infty, \quad (5)$$

после обращения которой относительно x_2 получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\kappa-\infty}^{i\kappa+\infty} C(\xi, \eta) e^{ix_1 \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2) e^{-ix_2 \eta} dx_2 \equiv f_1(x_1, \eta), \quad x_1 > 0, \quad (6)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{i\kappa-\infty}^{i\kappa+\infty} \lambda C(\xi, \eta) e^{ix_1 \xi} d\xi = 0, \quad x_1 < 0.$$

Решение последней системы строится методом Винера - Хопфа / 4 /.

Рассмотрим функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_1(t) e^{it\xi} dt = \mathcal{N}_+(\xi),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_2(t) e^{-it\xi} dt = \mathcal{N}_-(\xi),$$

(7)

где \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 удовлетворяют условиям $|\mathcal{N}_1(t)| < M e^{\tau_1 t}$,
 $|\mathcal{N}_2(t)| < N e^{-\tau_2 t}$ при $t \rightarrow \infty$, M и N - постоянные.
 Тогда $\mathcal{N}_+(\xi)$ будет аналитической функцией в полуплоскости $\text{Im } \xi = \tau > \tau_1$,
 а $\mathcal{N}_-(\xi)$ - в полуплоскости $\text{Im } \xi = \tau < \tau_2$.
 Используя указанные функции \mathcal{N}_+ , \mathcal{N}_- , \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 ,
 приводим систему (6) к виду

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ik-\infty}^{ik+\infty} \mathcal{N}_+(\xi) c(\xi, \eta) e^{ix_1 \xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_1(t) f_1(x_1+t, \eta) dt, \quad x_1 > 0, \quad (8a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ik-\infty}^{ik+\infty} \mathcal{N}_-(\xi) c(\xi, \eta) e^{ix_1 \xi} d\xi = 0, \quad x_1 < 0. \quad (8b)$$

Умножая уравнение (8a) на $\exp(-\sqrt{H^2 + \eta^2} x_1)$ и дифференцируя по x_1 (предполагая, что это возможно), получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ik-\infty}^{ik+\infty} (-\sqrt{H^2 + \eta^2} + i\xi) c(\xi, \eta) \mathcal{N}_+(\xi) e^{ix_1 \xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\sqrt{H^2 + \eta^2} x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} e^{-\sqrt{H^2 + \eta^2} x_1} \int_0^{\infty} \mathcal{N}_1(t) f_1(x_1+t, \eta) dt \equiv \psi_1(x_1, \eta),$$

$x_1 > 0.$

Определим функции \mathcal{N}_+ и \mathcal{N}_- по граничному условию в полосе $\tau_1 < \text{Im } \xi < \tau_2$

$$(-\sqrt{H^2 + \eta^2} + i\xi) \mathcal{N}_+(\xi) = \sqrt{H^2 + \eta^2} + \xi^2 \mathcal{N}_-(\xi). \quad (10)$$

Отсюда легко получить

$$\mathcal{N}_+(z) = \frac{1}{\sqrt{z+i\sqrt{H^2+z^2}}} ; \quad \mathcal{N}_-(z) = \frac{i}{\sqrt{z-i\sqrt{H^2+z^2}}} .$$

В силу (10), из (8б) и (9) следует

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ik-\infty}^{ik+\infty} \mathcal{N}_-(z) C(z, \eta) e^{iz, \xi} dz \equiv \psi(x, \eta) = \begin{cases} 0, & x_1 < 0, \\ \psi_1(x, \eta), & x_1 > 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$C(z, \eta) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi} \sqrt{z+i\sqrt{H^2+z^2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \eta) e^{-iz, \xi} dx ,$$

Подставляя $C(z, \eta)$ в формулы (4), получим решение поставленной граничной задачи. Для функций \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 , обращающая уравнения (7), будем иметь выражения

$$\mathcal{N}_1(t) = \sqrt{\frac{2}{t}} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-\sqrt{H^2+z^2}t} , \quad \mathcal{N}_2(t) = \sqrt{\frac{2}{t}} e^{-\sqrt{H^2+z^2}t} i \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} ,$$

$t > 0.$

Решение задачи 2. Эту задачу удастся решить при условии, когда в системе (I) $C = 0$. В этом случае решение поставленной задачи сводится к решению задачи I. Действительно, если $u = [u_1(x), u_2(x), u_3(x)]$ - решение системы (I) в области D , то легко показать, что решением этой же системы будет и вектор $u^* = [u_1(x^*), u_2(x^*), -u_3(x^*)]$, где $x^* = (x_1, x_2, -x_3)$. Тогда каждый из следующих векторов $u' = (u'_1, u'_2, u'_3) = \frac{1}{2} [u(x) + u^*(x^*)]$



и $u'' = (u_1'', u_2'', u_3'') = \frac{1}{2} [u(x) - u^*(x^*)]$ также удовлетворит системе (I) в области D при $c=0$. Отсюда, в силу (3),

имеем

$$u_3' \Big|_{x_3=0}^+ = -u_3' \Big|_{x_3=0}^- = \frac{f^+ - f^-}{2} \equiv f_1(x_1, x_2), \quad (II)$$

$$x_1 > 0$$

$$u_3'' \Big|_{x_3=0}^+ = u_3'' \Big|_{x_3=0}^- = \frac{f^+ + f^-}{2} \equiv f_2(x_1, x_2). \quad (I2)$$

Вектор u' нетрудно определить в пространстве D по условию (II) с помощью потенциала двойного слоя, учитывая также, что $\Delta u_3' - |H|^2 u_3' = 0$. Для определения же u'' приходим к задаче I, т.к. в этом случае u_3'' - четная относительно x_3 функция, удовлетворяющая условиям

$$\left. \begin{aligned} u_3'' \Big|_{x_3=0} &= f_2(x_1, x_2), \quad x_1 > 0, \\ \frac{\partial u_3''}{\partial x_3} \Big|_{x_3=0} &= 0, \quad x_1 < 0, \end{aligned} \right\} -\infty < x_2 < \infty.$$

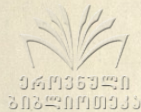
Вектор $u'' = (u_1'', u_2'', u_3'')$ определится таким образом в полупространстве $x_3 > 0$. Продолжая затем компоненты

u_1'' , u_2'' для $x_3 < 0$ нечетно, а u_3'' - четно, получим вектор, который снова обозначим через u'' .

Окончательно для решения поставленной задачи 2 будем иметь $u = u' + u''$.

Поступила 15.XI.1981

Математический институт
им. А.М.Размадзе АН ГССР



ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Бицадзе. Изв. АН СССР, сер.матем., 17, 1953, 525-538.
2. И.Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. М., 1959.
3. Н.И. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
4. Б.Нобл. Метод Винера-Хопфа. М., 1962.
5. Е.И. Оболашвили. Сообщения АН ГССР, 73, № I, 1974.

ღ.გოგოლაური

განზიარებული სასაბჭოთაო აკადემიის აკადემიის მანგოლიაში
 ანალიტიკური ვექტორული
 რეზიუმე

კონტინუუმის განზიარებული სისტემის სივრცითი ანალიტიკური ვექტორული ანალიტიკური ანალიტიკური (დირიხლეტი და მიქსტიპის) ვექტორული ანალიტიკური ნახევარსივრცისა და ნახევარსივრცის განზიარებული ვექტორული სისტემის.

L. Gogolauri

SOLUTION OF SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR
 THE GENERALIZED POTENTIAL VECTOR

Summary

For the spatial analogue of the Cauchy-Riemann generalized system the effective solutions of some boundary value problems (the Dirichlet and mixed types) are given for the half - and infinite spaces cut along a half-plane.



УДК 539. 3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С УПРУГИМ КРЕПЛЕНИЕМ

Г.Т.Жоржолиани

Рассматривается бесконечная анизотропная пластинка, отнесенная к плоскости переменной $z = x + iy$. Пластинка имеет эллиптическое отверстие с полуосями a и b ($a < b$), с центром в начале координат, и сплошной стрингер длины l , прикрепленный к пластинке вдоль отрезка $[a, a+l]$ вещественной оси. Будем считать, что к границе отверстия и к стрингеру внешние силы не приложены, а пластинка растягивается на бесконечности усилиями P , параллельными оси стрингера. Ставится задача об определении степени влияния стрингера на распределения напряжений в пластинке около эллиптического отверстия. Граничные условия выражают отсутствие внешних усилий вдоль обвода отверстия и совместное деформирование пластинки и стрингера.

Пусть $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v$ - элементы плоских упругих полей, N - усилия в стрингере, S_0, b_0, h_0 - поперечное сечение, ширина и толщина стрингера, $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{66}, k$ - упругие постоянные



и толщина пластинки. Обозначая далее обвод эллиптического отверстия и ось стрингера, соответственно, через Γ и L , будем иметь граничную задачу / 1,2/:

$$\sigma_n = \tau_n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (1)$$

$$u^+ + iv^+ = u^- + iv^- \quad \text{на } L, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^- = \varepsilon(x) = \varepsilon^0 \quad \text{на } L, \quad (3)$$

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- \quad \text{на } L. \quad (4)$$

Здесь $\varepsilon(x)$ - деформация удлинения в пластинке относительно оси x , $\varepsilon^0(x)$ - относительное удлинение оси стрингера. Условие равновесия любого элементарного куска стрингера, сцепленного с пластинкой, с учетом отсутствия у него жесткости на изгиб, выражается формулой

$$\hbar [\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-] + \frac{d}{dx} \mathcal{N}(x) = 0 \quad \text{на } L, \quad (5)$$

которая может быть записана в виде /3/

$$\hbar \int_0^x (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) dx + \mathcal{N}(x) = 0 \quad \text{на } L. \quad (6)$$

На основании (3), если еще воспользоваться формулой

$$\mathcal{N}(x) = E_0 S_0 \varepsilon^0(x), \quad (7)$$

хорошо известной из теории малых деформаций криволинейных стержней, условие равновесия (6) может быть представлено следующим образом:

$$\hbar \int_0^x (\tau_{xy}^+ - \tau_{xy}^-) dx + E_0 S_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^+ = 0 \quad \text{на } L. \quad (8)$$

Введем комплексные потенциалы $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ /1/ и напомним хорошо известные формулы для первых производ-



ных функций напряжения $U(x, y)$ и для составляющих напряжений и перемещений при отсутствии объемных сил:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= 2 \operatorname{Re} [\varphi(z_1) + \psi(z_2)], \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1 \varphi(z_1) + \mu_2 \psi(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \varphi'(z_1) + \mu_2^2 \psi'(z_2)], \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)], \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \varphi'(z_1) + \mu_2 \psi'(z_2)], \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 2 \operatorname{Re} [p_1 \varphi(z_1) + p_2 \psi(z_2)], \\ v &= 2 \operatorname{Re} [q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $\varphi(z_1)$, $\psi(z_2)$ - произвольные аналитические функции обобщенных комплексных переменных $I, 2/$

$$z_1 = x_1 + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y, \quad (12)$$

$\mu_1 = \alpha_1 + i\beta$, $\mu_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ - комплексные параметры - корни характеристического уравнения

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0, \quad (13)$$

причем, можно считать, что $\beta_1 > \beta_2$,

$$p_1 = a_{11} \mu_1^2 + a_{12} - a_{16} \mu_1, \quad p_2 = a_{11} \mu_2^2 + a_{12} - a_{16} \mu_2, \quad (14)$$

$$q_1 = \frac{1}{\mu_1} [a_{12} \mu_1^2 + a_{22} - a_{26} \mu_1], \quad q_2 = \frac{1}{\mu_2} [a_{12} \mu_2^2 + a_{22} - a_{26} \mu_2].$$

Обозначим через S , $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$ соответственно области на плоскостях z , z_1 , z_2 и отображим эти области конформно на внешность единичного круга γ . Как известно [2, 4], функции, конформно отображающие эти области, даются формулами

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a-b}{2} \zeta + \frac{a+b}{2} \frac{1}{\zeta},$$

$$z_1 = \omega_1(\zeta) = \frac{a-i\mu_1 b}{2} \zeta + \frac{a+i\mu_1 b}{2} \frac{1}{\zeta}, \quad (15)$$

$$z_2 = \omega_2(\zeta) = \frac{a-i\mu_2 b}{2} \zeta + \frac{a+i\mu_2 b}{2} \frac{1}{\zeta}.$$

Как легко видеть с помощью функций $\omega(\zeta)$, $\omega_1(\zeta)$, $\omega_2(\zeta)$, точкам A , $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ контуров областей S , $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, находящимся в аффинном соответствии, соответствует одна точка на контуре единичного круга.

Обозначим

$$\Phi(\zeta) = \varphi[\omega_1(\zeta)], \quad \Psi(\zeta) = \psi[\omega_2(\zeta)] \quad (16)$$

Тогда граничные условия (1), (2) запишутся в виде

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\Phi(\zeta) + \Psi(\zeta)] &= 0 \\ 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi(\zeta) + \mu_2 \Psi(\zeta)] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } \gamma, \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re}[p_1\phi(t)+p_2\psi(t)]^+ &= \operatorname{Re}[p_1\phi(t)+p_2\psi(t)]^- \\ \operatorname{Re}[q_1\phi(t)+q_2\psi(t)]^+ &= \operatorname{Re}[q_1\phi(t)+q_2\psi(t)]^- \end{aligned} \right\} \text{ на } \mathcal{L}, \quad (18)$$

$$\int_0^t (\tau_{\xi\eta}^+ - \tau_{\xi\eta}^-) dt + 2K \operatorname{Re}[p_1\phi'(t)+p_2\psi'(t)] = 0 \quad \text{на } \mathcal{L}, \quad (19)$$

где $K = \frac{E_0 S_0}{R}$ — постоянная величина.

В любой точке t на отрезке $(1, 1+l')$, где стрингер сопряжен с пластинкой, возникает усилие $q(t)$, направленное по оси стрингера и равное

$$q(t) = -\tau_{\xi\eta}^+(t, 0) + \tau_{\xi\eta}^-(t, 0). \quad (20)$$

Потенциалы ϕ и ψ , соответствующие сосредоточенной в точке t силе $(q, 0)$ и растягивающему на бесконечности усилию интенсивности P , будем искать в виде /3/

$$\phi(\xi, t) = Aq(t) \ln(\xi-t) + \frac{P}{4}\xi + \phi_0(\xi, t), \quad (21)$$

$$\psi(\xi, t) = Bq(t) \ln(\xi-t) + \frac{P}{2}\xi + \psi_0(\xi, t),$$

где $q(t)$ — пока произвольная вещественная функция от t , определенная на \mathcal{L} ; A и B — постоянные величины, удовлетворяющие уравнениям /1, 2/

$$A - \bar{A} + B - \bar{B} = 0$$

$$\mu_1 A - \bar{\mu}_1 \bar{A} + \mu_2 B - \bar{\mu}_2 \bar{B} = -\frac{1}{2\pi i},$$

(22)

$$\mu_1^2 A - \bar{\mu}_1^2 \bar{A} + \mu_2^2 B - \bar{\mu}_2^2 \bar{B} = \frac{\alpha_{16}}{2\pi i \alpha_{11}},$$

$$\frac{1}{\mu_1} A - \frac{1}{\bar{\mu}_1} \bar{A} + \frac{1}{\mu_2} B - \frac{1}{\bar{\mu}_2} \bar{B} = \frac{\alpha_{12}}{2\pi i \alpha_{22}}.$$

Функции $\Phi_0(z, t)$, $\Psi_0(z, t)$ должны быть регулярны всюду при $|z| > 1$, включая бесконечно удаленную точку, для любого t из \mathcal{L} . Для их определения, согласно (17), имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\Phi_0(\sigma, t) + \Psi_0(\sigma, t)] &= f_1(\sigma, t) \\ 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \Phi_0(\sigma, t) + \mu_2 \Psi_0(\sigma, t)] &= f_2(\sigma, t) \end{aligned} \right\} \text{ на } \gamma, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\sigma, t) &= -2 \operatorname{Re}[(A+B)q(t)\ln(\sigma-t) + \frac{3P}{4}\sigma], \\ f_2(\sigma, t) &= -2 \operatorname{Re}[(\mu_1 A + \mu_2 B)q(t)\ln(\sigma-t) + \frac{P}{4}(\mu_1 + 2\mu_2)\sigma]. \end{aligned} \quad (24)$$

Для определения функций $\Phi_0(z, t)$, $\Psi_0(z, t)$, голоморфных вне единичного круга γ и удовлетворяющих на его контуре условию (23), применим формулу Шварца, согласно

которой получим:

$$\Phi_0(z, t) + \Psi_0(z, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} f_1(\zeta, t) \frac{\zeta + z}{\zeta - \bar{z}} \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad (25)$$

$$\int_1 \Phi_0(z, t) + \int_2 \Psi_0(z, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} f_2(\zeta, t) \frac{\zeta + z}{\zeta - \bar{z}} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Предыдущие интегралы легко вычислить на основании интегральной формулы Коши и обобщенной теоремы о вычетах.

Будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \ln(\zeta - t) \frac{\zeta + z}{\zeta - \bar{z}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln(-t),$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\ln(\zeta - t)} \frac{\zeta + z}{\zeta - \bar{z}} \frac{d\zeta}{\zeta} = \\ = -25 \ln\left(1 - \frac{1}{5\bar{t}}\right) + \ln(-\bar{t}) + \frac{2}{\bar{t}}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \zeta \frac{\zeta + z}{\zeta - \bar{z}} \frac{d\zeta}{\zeta} = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \bar{\zeta} \frac{\zeta + z}{\zeta - \bar{z}} \frac{d\zeta}{\zeta} = -\frac{2}{5}. \quad (26)$$

Подставив найденные значения в правые части формул (25) и проделав необходимые вычисления, на основании формул (21) для функции $\Phi(z, t)$ и $\Psi(z, t)$ найдем:

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, t) = & q(t) \left\{ A \ln(\xi - t) - \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \left[(\mu_2 - \mu_1) A \ln(-t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left((\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1) \bar{A} + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \bar{B} \right) \left(\ln(-\bar{t}) - 2\delta \ln\left(1 - \frac{1}{\xi \bar{t}}\right) + \frac{2}{\bar{t}} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{P}{4} \xi - \frac{P}{2\delta} (3\mu_2 - \bar{\mu}_1 - 2\bar{\mu}_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, t) = & q(t) \left\{ B \ln(\xi - t) - \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \left[(\mu_2 - \mu_1) B \ln(-t) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left((\mu_1 - \bar{\mu}_1) \bar{A} + (\bar{\mu}_2 - \mu_1) \bar{B} \right) \left(\ln(-\bar{t}) - 2\delta \ln\left(1 - \frac{1}{\xi \bar{t}}\right) + \frac{2}{\bar{t}} \right) \right] \right\} + \\ & + \frac{P}{2} \xi - \frac{P}{2\delta} (\bar{\mu}_1 + 2\bar{\mu}_2 - 3\mu_1). \end{aligned} \quad (27)$$

На основании (27) иско́мые потенциалы задачи представим теперь в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\xi) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \Omega_1(\xi, t) \rho(t) dt + q_1(t), \\ \Psi(\xi) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \Omega_2(\xi, t) \rho(t) dt + q_2(t), \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_1(\zeta, t) &= A \ln(\zeta - t) - \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \left\{ (\mu_2 - \mu_1) A \ln(-t) + \right. \\ &+ \left. [(\mu_2 - \bar{\mu}_1) \bar{A} + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \bar{B}] \left[\ln(-\bar{t}) - 2\delta \ln\left(1 - \frac{1}{\delta \bar{t}}\right) + \frac{2}{\bar{t}} \right] \right\}, \\ \Omega_2(\zeta, t) &= B \ln(\zeta - t) - \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \left\{ (\mu_2 - \mu_1) B \ln(-t) + \right. \\ &+ \left. [(\bar{\mu}_1 - \mu_1) \bar{A} + (\bar{\mu}_2 - \mu_1) \bar{B}] \left[\ln(-\bar{t}) - 2\delta \ln\left(1 - \frac{1}{\delta \bar{t}}\right) + \frac{2}{\bar{t}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\rho(t) = 2\pi q(t), \quad (30)$$

$$q_1(\zeta) = \frac{P}{4\delta} (\zeta^2 - 6\mu_2 - 2\bar{\mu}_1 - 4\bar{\mu}_2),$$

$$q_2(\zeta) = \frac{P}{2\delta} (\zeta^2 - \bar{\mu}_1 + 2\bar{\mu}_2 + 3\mu_1). \quad (31)$$

Из самого построения функций $\phi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ следует, что они удовлетворяют граничному условию (I) при любом вещественном $\rho(t)$. Можно также убедиться, что условия (I8) удовлетворяются в точности. Остается удовлетворить

единственному условию, задаваемому равенством (19). С

этой целью выразим на основании (28), (29) комбинацию

$\rho_1 \phi(\xi) + \rho_2 \psi(\xi)$ в интегральной форме и вычислим ядро интегрального выражения при $\xi = \xi$. После элементарного вычисления для ядра $\Omega(\xi, t)$ находим

$$\begin{aligned} \Omega(\xi, t) = & (\rho_1 A + \rho_2 B) \ln(\xi - t) - \\ & - \frac{1}{2(\mu_2 - \mu_1)} \left\{ (\mu_2 - \mu_1) (\rho_1 A + \rho_2 B) \ln(-t) + \right. \\ & + [(\mu_2 - \bar{\mu}_1) \bar{A} \rho_1 + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \bar{B} \rho_2 + (\bar{\mu}_1 - \mu_1) \bar{A} \rho_1 + (\bar{\mu}_2 - \mu_1) \bar{B} \rho_2] \times \\ & \left. \times \left[\ln(-\bar{t}) - 2\xi \ln\left(1 - \frac{1}{\xi \bar{t}}\right) + \frac{2}{\bar{t}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

Правая часть предыдущего равенства, без первого ее слагаемого, представляет собой регулярную функцию от переменных ξ и t . Поэтому при составлении производной можем дифференцировать под знаком интеграла. При вычислении же производной от первого слагаемого следует воспользоваться формулой

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha} \ln(\xi - t) \rho(t) dt = \\ = -\rho(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\alpha} \frac{\rho(t) dt}{\xi - t}. \end{aligned}$$

Проделав все необходимые вычисления и заменив еще под интегралом в (19) разность $\tau^+_{\xi} - \tau^-_{\xi}$ ее значением

$$\tau_{\xi}^{+} - \tau_{\xi}^{-} = -2\pi\rho(t) \quad \text{на } \alpha,$$

приходим к сингулярному интегральному уравнению относительно $\rho(t)$.

$$\rho(\xi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} \frac{\rho(t) dt}{t - \xi} + \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} K_0(\xi, t) \rho(t) dt = f(\xi). \quad (33)$$

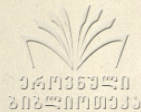
Здесь

$$K_0(\xi, t) = \operatorname{Re} \frac{1}{P_1 A + P_2 B} \left\{ \left[(\mu_2 - \bar{\mu}_1) \bar{A} P_1 + (\mu_2 - \bar{\mu}_2) \bar{B} P_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (\bar{\mu}_1 - \mu_1) \bar{A} P_1 + (\bar{\mu}_2 - \mu_2) \bar{B} P_2 \right] \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{\xi t} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\xi t - 1} \right] + H(\xi - t) \right\},$$

$$H(\xi - t) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \geq t, \\ 0 & \text{при } \xi < t, \end{cases} \quad (34)$$

$$f(\xi) = \operatorname{Re} \frac{P}{2(P_1 A + P_2 B)} \left[-\frac{\mu_1(3\mu_2 - \bar{\mu}_1 - 2\mu_2) + \mu_2(\bar{\mu}_1 + 2\bar{\mu}_2 - 3\mu_1)}{\xi^2} \right] \quad (35)$$

Сингулярное уравнение (33) относительно неизвестных контактных напряжений под стрингером есть основное соотношение нашей задачи. Численное решение этого уравнения, осуществляемого известным способом, даст возможность оценить влияние стрингера на распределение напряжений около отвер-



სტია.

Поступила 15.XI.1980

Тбилисский математический институт им. А.М. Размадзе АН ГССР

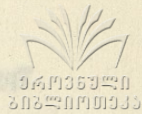
ЛИТЕРАТУРА

1. С.Г. Лехницкий. Теория упругости анизотропного тела, М., 1977.
2. Г.Н. Савин. Распределение напряжений около отверстия. Киев, 1968.
3. А.И. Каландия. Математические методы двумерной упругости. М., 1973.
- Н.М. Мухелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.

შეჯამებები

ანტიპრობლემატიკური მონიტორინგის მეთოდური მუშაობის
 ერთი ასპექტის შესახებ
 რეზიუმე

ანტიპრობლემატიკური მონიტორინგის ამოცანისათვის უცნობური ხერხითა და სწორბაძვლიანი სიხისთვის წიბოთი ავტობურია პირველი გვარის სინ-ტეზური ინტეგრალური განტოლება უცნობი დაბრუნის მიმართ სტრინ-ტეზის განტოლებით განტოლების რიცხვითი ამოხსნა ცნობილი მუ-შეობის, სამუალებას იძუება განისაზღვროს სტრინტეზის გავლენა დაბრუნის განაწილებაზე ხერხის მახლობლად.



G.Zhorzholiani

ON ONE PROBLEM OF ANISOTROPIC PLATE WITH ELASTIC STRENGTHENING

Summary

In the problem on an anisotropic plate with an elastic hole and linear stiffener the first kind singular integral equation is constructed with respect to unknown tangential stresses under the stringer. The numerical solution of that equation makes it possible to define the influence of the stringer on the stress distribution near the hole,

УДК 53

О СОВМЕСТНОМ ОБТЕКАНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И КРУГОВОГО
ЦИЛИНДРОВ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Н. Н. Патарая

§ I. В качестве применения обобщенного вариационного метода к решению граничных задач классической гидродинамики рассмотрим задачу о совместном обтекании эллиптического и кругового цилиндров безграничным по всем направлениям плоским потоком несжимаемой идеальной жидкости, покоящейся в бесконечности. Поместив начало прямоугольной Декартовой системы координат в центре симметрии Эллипса и направив оси ox и oy по его главным диаметрам, будем иметь:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где a и b - длина полуосей эллипса. Для определенности примем $a > b$.

Положим, что центр обтекаемого круга расположен в точке $O_1(x_0, y_0)$, а радиус круга равен r . Будем иметь $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Величины x_0 , y_0 и r должны удовлетворить на сегменте

$-a \leq x \leq a$ - неравенству

$$\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - r > \sqrt{b^2 + x^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}, \quad (*)$$

которое является условием нахождения круга вне эллипса (в действительности условием нахождения кругового цилиндра вне эллиптического). Легко усмотреть, что двумерная область (D) , расположенная вне указанного эллипса и круга (эта область является трехсвязной), содержащая бесконечно удаленную точку, с помощью преобразования

$$\xi = \frac{b^2 x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{b^2 y}{x^2 + y^2} \quad (I)$$

взаимно однозначно отобразится на конечную область, расположенную между кривыми (c_2) и (c_1) , где (c_2) и (c_1) - кривые, в которые отобразятся эллипс и круг соответственно.

В дальнейшем изложении конечную область плоскости xoy , расположенную вне (c_1) и внутри (c_2) , обозначим через (G) . Разыщем уравнения кривых (c_1) и (c_2) .

Из (I) будем иметь:

$$x = \frac{b^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{b^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2} \quad (2)$$

Подставив x и y из (2) в уравнение Эллипса, будем иметь

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{b^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left(\frac{b^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2} \right)^2 = 1,$$

что равносильно уравнению

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = b^2 (k^2 \xi^2 + \eta^2), \quad (3)$$

где положено

$$k = \frac{b}{a} < 1.$$

Кривая (3) представляет собой алгебраическую кривую четвертого порядка. Уравнение кривой (3) можно записать с помощью параметра t в виде

$$\xi = \frac{ab^2 \cos t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t},$$

$$\eta = \frac{b^3 \sin t}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}, \quad (3^I)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Данная кривая будет внешней границей области (G) (кривая (C_2)).

Определим уравнение кривой (C_1) , которая соответствует отображению окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

расположенной на плоскости xOy . Будем иметь:

$$\left(\frac{b^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2} - x_0 \right)^2 + \left(\frac{b^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2} - y_0 \right)^2 = r^2.$$

Полученное уравнение можно представить в виде

$$(r^2 - x_0^2 - y_0^2)(\xi^2 + \eta^2) + 2b^2 x_0 \xi + 2b^2 y_0 \eta - b^4 = 0. \quad (4)$$

Данному уравнению в переменных ξ и η соответствует алгебраическая кривая второго порядка, которая, как показывает исследование, является окружностью.

Действительно, вычислив координаты центра данной кривой, получим:

$$\xi_c = \frac{b^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2 - r^2},$$

$$\eta_c = \frac{b^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2 - r^2}.$$

Совершим параллельное перенесение координатных осей $O\xi$ и $O\eta$, поместив новое начало в точке с координатами ξ_c и η_c , т.е. положив

$$\xi = \xi' + \xi_c, \quad \eta = \eta' + \eta_c,$$

получим:

$$-(x_0^2 + y_0^2 - r^2)(\xi'^2 + \eta'^2) + \frac{b^4 x_0^2}{x_0^2 + y_0^2 - r^2} + \frac{b^4 y_0^2}{x_0^2 + y_0^2 - r^2} - b^4 = 0.$$

После несложных упрощений полученное уравнение приведет к виду:

$$(\xi - \xi_c)^2 + (\eta - \eta_c)^2 = \left(\frac{b^2 r}{x_0^2 + y_0^2 - r^2} \right)^2. \quad (5)$$

Уравнение (5) показывает, что кривая (C_1) является окружностью круга, центр которого расположен в точке с координатами

$$\xi_c = \frac{b^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2 - r^2}, \quad \eta_c = \frac{b^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2 - r^2}.$$

Радиус окружности (5) равен $\frac{b^2 r}{x_0^2 + y_0^2 - r^2}$,

где r - радиус окружности поперечного сечения обтекаемого кругового цилиндра.

Параметрическое уравнение данной окружности в переменных ξ, η запишется в виде:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{b^2 x_0}{x_0^2 + y_0^2 - r^2} + \frac{b^2 r}{x_0^2 + y_0^2 - r^2} \cos t, \\ \eta &= \frac{b^2 y_0}{x_0^2 + y_0^2 - r^2} + \frac{b^2 r}{x_0^2 + y_0^2 - r^2} \sin t, \end{aligned} \quad (6)$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

Легко доказать, что преобразованная область (G) , соответствующая области течения (D) на плоскости xoy , которая представляет собой внешность эллипса и круга, будет расположена вне круга (C_1) и внутри контура (C_2) .

Действительно, максимум расстояния от начала координат до точек указанного круга (C_1) будет равен

$$\rho = \sqrt{\xi_c^2 + \eta_c^2} + \frac{b^2 r}{x_0^2 + y_0^2 - r^2}.$$



Подставив в это выражение значения ξ_c и η_c , получим:

$$\rho = \frac{b^2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2} - r},$$

из которого, в силу неравенства (*), вытекает неравенство

$$\rho < \frac{b^2}{a} < b,$$

которое показывает, что ρ меньше, чем минимальное расстояние $\frac{b^2}{a}$ от начала координат до точек кривой (C_2).

Сформулируем математическую задачу о совместном обтекании эллиптического и кругового цилиндров несжимаемой жидкостью для преобразованной области (G) / I и 2/.

Представляя потенциал скорости в виде

$$\varphi(x, y) = U_{\infty x} x + U_{\infty y} y + \varphi'(x, y),$$

где $U_{\infty x}$, $U_{\infty y}$ - составляющие скорости жидкости в бесконечности по координатным осям ox и oy для потенциала возмущения $\bar{\varphi}'(\xi, \eta)$ будем иметь в (G) уравнение

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}'}{\partial \eta^2} = 0 \quad (7)$$

и граничные условия

$$\left(\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial n} \right)_{(c_1)} = \frac{b^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left\{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] \cos n \hat{\xi} + \right. \\ \left. + [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] \cos n \hat{\eta} \right\}, \quad (7^1)$$

$$\left(\frac{\partial \bar{\Psi}'}{\partial n}\right)_{(c_2)} = \frac{b^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left\{ [u_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2u_{\infty y} \xi \eta] \cos n \hat{\xi} + \right. \\ \left. + [2u_{\infty x} \xi \eta - u_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] \cos n \hat{\eta} \right\},$$

где положено

$$\bar{\Psi}'(\xi, \eta) = \left\{ \Psi'(x, y) \right\}_{\begin{aligned} x &= \frac{b^2 \xi}{\xi^2 + \eta^2} \\ y &= \frac{b^2 \eta}{\xi^2 + \eta^2} \end{aligned}}$$

Решив сформулированную для области (G) задачу, путем перехода от переменных ξ, η к переменным x, y получим решение поставленной гидродинамической задачи совместного отбегания эллиптического и кругового цилиндров.

§ 2. Рассмотрим применение вариационных методов к решению задачи, поставленной в § I. Как известно, решение задачи определения гармонической функции, нормальная к контуру области производная которой равняется заданной функции точек контура (задача Неймана), сводится к задаче нахождения функции $\bar{\Psi}'(\xi, \eta)$, которая интегралу

$$J = \iint (G) \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta - \sum_{\kappa=1}^n \oint 2\bar{\varphi}'(\sigma) \frac{\partial \bar{\varphi}'(\sigma)}{\partial n} d\sigma \quad (8)$$

дает минимальное значение.

В (8) n равно числу ограничивающих область (G) контуров.

В нашей задаче область (G) на плоскости $\xi O\eta$ ограничена двумя контурами (C_1) и (C_2). Контур (C_2) является внешней границей области (G).

Подставляя в (8) $\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial n}(\sigma)$ и учитывая $\cos \hat{n} \xi d\sigma = d\eta$, $\cos \hat{n} \eta d\sigma = -d\xi$, получим:

$$J = \iint (G) \left[\left(\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial \eta} \right)^2 \right] d\xi d\eta - 2\beta^2 \oint_{(C_1)} \frac{\bar{\varphi}'(\sigma)}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left\{ [u_{\infty x}(\xi^2 - \eta^2) + 2u_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2u_{\infty x} \xi \eta - u_{\infty y}(\xi^2 - \eta^2)] d\xi \right\} -$$

$$- 2\beta^2 \oint_{(C_2)} \frac{\bar{\varphi}'(\sigma)}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left\{ [u_{\infty x}(\xi^2 - \eta^2) + 2u_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2u_{\infty x} \xi \eta - u_{\infty y}(\xi^2 - \eta^2)] d\xi \right\}. \quad (9)$$



Приближенное решение поставленной задачи будем искать по методу Рунца, положив

$$\bar{\varphi}'(\xi, \eta) = A\xi + B\eta + C\xi^2 + D\xi\eta + E\eta^2 \quad (10)$$

Для определения искомых коэффициентов получим следующую систему уравнений

$$\iint_{(G)} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial \eta} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta - \quad (11)$$

$$- \oint_{(c_1)} \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial n}(\epsilon) \Phi_s d\epsilon - \oint_{(c_2)} \frac{\partial \bar{\varphi}'}{\partial n}(\epsilon) \Phi_s d\epsilon = 0,$$

$$s = \overline{1, 5}$$

где $\Phi_1 = \xi$, $\Phi_2 = \eta$, $\Phi_3 = \xi^2$, $\Phi_4 = \xi\eta$, $\Phi_5 = \eta^2$ являются так называемыми координатными функциями.

Подстановка в (11) $\bar{\varphi}'$ и Φ_s ($s = \overline{1, 5}$) приведет к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\iint (A + 2C\xi + D\eta) d\xi d\eta - \quad (6)$$

$$- B^2 \oint_{(c_1)} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \{ [u_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2u_{\infty y} \xi\eta] d\eta - \quad (c_1)$$

$$- [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi - b^2 \oint_{(C_2)} \frac{\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} = 0.$$

$$\iint (B + 2E\eta + 2D\xi) d\xi d\eta - b^2 \oint_{(C_1)} \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} = 0.$$

$$- [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi - b^2 \oint_{(C_2)} \frac{\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} = 0.$$

$$\iint (2A\xi + 4C\xi^2 + 2D\xi\eta) d\xi d\eta - b^2 \oint_{(C_1)} \frac{\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} = 0.$$

$$+ 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi - b^2 \oint_{(C_2)} \frac{\xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} = 0.$$

$$\{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} = 0.$$

$$\iint \{ A\eta + 2C\xi\eta + D(\xi^2 + \eta^2) + B\xi + 2E\xi\eta \} d\xi d\eta - b^2 \oint_{(C_1)} \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} +$$

$$- b^2 \oint_{(C_2)} \frac{\xi\eta}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \{ [U_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2U_{\infty y} \xi \eta] d\eta - [2U_{\infty x} \xi \eta - U_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} = 0.$$

$$- [2u_{\infty x} \xi \eta - u_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi = 0,$$

$$\iint \{2B\eta + 2D\xi\eta + 4E\eta^2\} d\xi d\eta -$$

(6)

$$- b^2 \oint \frac{\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left\{ [u_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2u_{\infty y} \xi \eta] d\eta -$$

(c₁)

(II^I)

$$- [2u_{\infty x} \xi \eta - u_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} -$$

$$- b^2 \oint \frac{\eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2} \left\{ [u_{\infty x} (\xi^2 - \eta^2) + 2u_{\infty y} \xi \eta] d\eta -$$

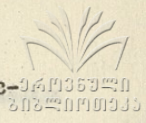
(c₂)

$$- [2u_{\infty x} \xi \eta - u_{\infty y} (\xi^2 - \eta^2)] d\xi \} = 0.$$

Для того чтобы придать окончательный вид линейным алгебраическим уравнениям относительно неизвестных A, B, C, D, E , достаточно вычислить двойные и криволинейные интегралы, стоящие в левой части (II^I).

Для потенциала скорости жидкости при совместном обтекании эллиптического и кругового цилиндров будем иметь:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & u_{\infty x} x + u_{\infty y} y + A \frac{b^2 x}{x^2 + y^2} + B \frac{b^2 y}{x^2 + y^2} + \\ & + C \frac{b^4 x^2}{(x^2 + y^2)^2} + D \frac{b^4 xy}{(x^2 + y^2)^2} + E \frac{b^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$



где A, B, C, D, E – постоянные, полученные при решении системы алгебраических уравнений (II).

Поступила 10.XI.1980

Кафедра механики сплошных сред

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Патарая. Обобщения вариационных методов для бесконечных областей и их применения к задачам совместного движения тел в жидкости. Труды Тбилисского университета, 166, 1976.
2. Н.Н. Патарая. Применение вариационного метода к одной плоской задаче обтекания цилиндрического тела идеальной несжимаемой жидкостью. Труды Тбилисского университета, 204, 1978.
3. Л.В. Канторович и В.Н. Крылов. Приближенные методы высшего анализа, М., 1962.

ბ.პატარაია

იქვეყნებთ უკვე სიტყვით აღწერილი და ნაწილი
გეომეტრიის ერთგვარი გამოყენების შესახებ

რეზიუმე

სტატიაში გამოყენებულია განმარტებული ვარიაციული მეთო-
დი უკვე აღწერილი და ნაწილი გეომეტრიის ერთგვარი გამოყენების
შესახებ ამოცანის ამოხსნისთვის.

N.Patarala

ON THE JOINT FLOW-AROUND OF ELLIPTICAL AND CIRCULAR
CYLINDERS BY AN IDEAL INCOMPRESSIBLE LIQUID

Summary

A generalized variation method is used in the paper in solving a problem of the flow-around of elliptic and circular cylinders by an ideal incompressible liquid.

УДК 532

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ
ЖИДКОСТИ ВЕЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ

Дж. В. Шарикадзе

Существует несколько задач, для которых можно получить точное решение нелинейных уравнений Навье-Стокса. К таким задачам относится и задача течения вязкой жидкости вблизи критической точки. Соответствующие уравнения этой задачи были численно проинтегрированы К.Хименцем, а затем, более точно, Л.Хоуартом /1/. Им было установлено, что при плоском течении вязкой несжимаемой жидкости в окрестности критической точки толщина слоя, на который распространяется влияние трения, при малой вязкости мала и пропорциональна квадратному корню из кинематической вязкости. Эта толщина дается формулой

$$\delta = 2,4 \sqrt{\frac{\nu}{a}} \quad (1)$$

Здесь мы дадим простое решение этой задачи применением метода функций Грина и введением конечной толщины слоя сначала для стационарной задачи, а затем для нестационарной.

I. Плоская стационарная задача.

Пусть жидкость, идущая из бесконечности, натекает на поставленную поперек течения стенку и далее течет вдоль нее в противоположные от критической точки стороны. Совместим ось x со стенкой, ось y направим перпендикулярно к стенке, а начало координат расположим в критической точке ($x=0, y=0$). В окрестности критической точки составляющие скорости потенциального течения равны

$$U_0 = ax, \quad V_0 = -ay, \quad (2)$$

где a - постоянная величина. Давление в потенциальном потоке определяется из уравнения Бернулли и равно

$$\rho_0 - \rho = \frac{\rho}{2} (U_0^2 + V_0^2) = \frac{\rho a^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (3)$$

где ρ_0 - давление в критической точке, а ρ - давление в произвольной точке течения. Так как в вязком течении жидкость прилипает к стенке, будем искать распределение скоростей и давлений в виде

$$U = x f'(y), \quad V = -f(y), \quad (4)$$

$$\rho_0 - \rho = \frac{\rho}{2} a^2 [x^2 + F(y)]. \quad (5)$$

Распределение скоростей (4) тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

а для определения функций $f(y)$ и $F(y)$ из уравнения Навье-Стокса получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\nu f''' = f'^2 - ff'' - a^2 \quad (6)$$

$$F' = \frac{2}{a^2} (\nu f'' + ff'). \quad (7)$$

На стенке $y=0$, из-за прилипания жидкости, должны иметь место следующие граничные условия

$$u=0, \quad V=0 \quad \text{при } y=0 \quad (8)$$

На конечном расстоянии от стенки δ (пока неизвестная функция, значение которой зависит от решения задачи) составляющая скорости $u(x, y)$ должна быть равна $u_0 = ax$, т.е.

$$u(x, y) = ax \quad \text{при } y = \delta. \quad (9)$$

Кроме того, давление в критической точке должно быть

$$p = p_0 \quad \text{при } x=0, y=0. \quad (10)$$

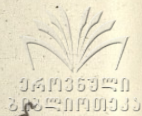
Следовательно, граничные условия нашей задачи будут:

$$\begin{aligned} f=0, \quad f'=0, \quad F=0 & \quad \text{при } y=0, \\ f' = a & \quad \text{при } y = \delta. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как уравнение (6) не содержит неизвестную функцию $F(y)$, то сначала можно определить $f(y)$, а затем из уравнения (7) и функцию $F(y)$.

Решение нелинейного уравнения (6), как уже было сказано, решено не в замкнутой форме, а найдено его численное решение.

Мы воспользуемся методом функций Грина и методом последовательных приближений найдем первые два приближения



уравнения (6). В решение войдет неизвестная толщина δ , которую найдем из условия непрерывного перехода скорости вблизи критической точки в соответствующую скорость вдали от стенки. Это условие будет:

$$f'' = 0 \quad \text{при } y = \delta. \quad (I2)$$

Легко показать, что решение задачи (6) - (II) можно представить в виде:

$$f(y) = A(y) + \lambda \int_0^\delta (f'^2 - f f'' - a^2) G(y, \eta) d\eta, \quad (I3)$$

где $\lambda = \frac{1}{\nu}$, а

$$A(y) = \frac{\alpha y^2}{2\delta} \quad (I4)$$

удовлетворяет уравнению $A''' = 0$ и граничным условиям (II), G - функция Грина задачи (6) - (II). Она имеет вид:

$$G = \begin{cases} \left(\frac{\eta}{2\delta} - \frac{1}{2}\right)y^2, & 0 \leq y < \eta, \\ \frac{\eta^2}{2} - \eta y + \frac{\eta y^2}{2\delta}, & \eta < y \leq \delta. \end{cases} \quad (I5)$$

Будем искать решение (I3) в виде

$$f(y) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^\kappa f_\kappa(y). \quad (I6)$$

Тогда для двух первых приближений получим:

$$f_0(y) = A(y), \quad f_1(y) = \int_0^\delta (f_0'^2 - f_0 f_0'' - a^2) G d\eta.$$

Вычисляя последний интеграл, придем окончательно к решению

$$f(y) \approx f_0 + \lambda f_1' = \frac{\alpha y^2}{2\delta} + \frac{\alpha^2}{\nu} \left(\frac{11}{48} y^2 \delta - \frac{y^3}{6} + \frac{1}{120} \frac{y^5}{\delta^2} \right), \quad (17)$$

где $\delta(x)$ - неизвестная. Для ее определения воспользуемся условием (12). Это даст

$$\delta^2 = \frac{8}{3} \frac{\nu}{\alpha} \approx 1,64 \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}. \quad (18)$$

Таким образом, расстояние, на которое распространяется влияние трения, постоянно. Соответствующее приближение тем лучше, чем больше вязкость и меньше постоянное число α .

Сила трения на стенке дается выражением

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu x f''(0) = 1,36 \rho \alpha \sqrt{\alpha \nu} x. \quad (19)$$

Составляющие скорости и давление имеют вид:

$$u = x f'(y) = \alpha x \left[\frac{y}{\delta} + \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{11}{24} y \delta - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{24} \frac{y^4}{\delta^2} \right) \right],$$

$$v = -\alpha \left[\frac{y^2}{2\delta} + \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{11}{48} y^2 \delta - \frac{y^3}{6} + \frac{1}{120} \frac{y^5}{\delta^2} \right) \right], \quad (20)$$

$$p_0 - p = \frac{\rho \alpha^2}{2} \left[x^2 + F(y) \right] = \rho \left(\frac{\alpha^2 x^2}{2} + \nu f' + \frac{1}{2} f^2 \right).$$

Если сравнить полученное численное значение $\frac{\tau}{\rho \alpha \sqrt{\alpha \nu}} =$



=1,36 со значением, полученным численным методом Л.Хоуарта - $\frac{\tau}{\rho x a \sqrt{a v}} = 1,2326$, увидим, что применяемый метод дает завышенное значение силы трения на стенке. Относительная погрешность равна 10,6%.

2. Плоский нестационарный случай.

Нестационарное течение, возникающее произвольным, изменяющимся во времени поперечным движением плоскости, в которой расположена критическая точка, исследована Дж.Ватсоном /2/. До работы Дж.Ватсона М.Б. Глауэртом /3/ было рассмотрено гармоническое поперечное движение плоскости.

Следуя предыдущему пункту, здесь мы дадим простое приближенное решение плоской нестационарной задачи.

Уравнения нестационарного течения вблизи критической точки имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Будем искать решение системы (21) в виде

$$u = x f'_y(y, t), \quad v = -f(y, t),$$

$$p = p_0(t) - \rho p_1(y, t) - \frac{1}{2} \rho p_2(y, t) x^2, \quad (22)$$

где $p_0(t)$ - давление торможения.

Подставляя (22) в (21) и приравнивая коэффициенты при равных степенях x получим:

$$\begin{aligned} \nu \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - P_2, \\ \frac{\partial P_2}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$P_2 = c(t).$$

Предельные условия при такой постановке задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} f(y, t) = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \quad \text{при } y=0, t>0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 & \quad \text{при } t=0, y>0. \end{aligned} \quad (24)$$

Условия для p_1 и p_2 на стенке можно получить из уравнения импульсов для невязкой жидкости, проинтегрировав их вдоль линии тока, совпадающей со стенкой, и сравнив полученный результат с выражением p из (22).

Запишем уравнение невязкой жидкости:

$$\operatorname{grad} \left(p + \frac{\rho V^2}{2} \right) = \rho [\vec{V} \operatorname{rot} \vec{V}] - \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

Проинтегрируем его по линии тока, идущей вдоль стенки от 0 до некоторого значения x . Тогда, учитывая, что оба компонента скорости обращаются в нуль в критической точке и вертикальная компонента \vec{V} у стенки также равна нулю, придем к выражению

$$\begin{aligned} & \rho(x, 0, t) - \rho_0(0, 0, t) + \frac{1}{2} \rho U^2(x, 0, t) = \\ & = \rho \int_0^x [\vec{V}_{\text{rot}} \vec{V}] \vec{i} dx - \rho \int_0^x \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \vec{i} dx. \end{aligned}$$

Предполагая, что компоненты скорости в невязком потоке заданы равенствами $U = a(t)x$, $V = -a(t)x$, так как эти выражения скоростей удовлетворяют условию симметрии и уравнению неразрывности, окончательно будем иметь:

$$\rho(x, 0, t) = \rho_0(0, 0, t) - \frac{\rho}{2} \left(a^2 + \frac{da}{dt} \right) x^2.$$

Сравнивая последнее выражение с выражением давления из (22), получим граничные условия для давления

$$P_1(y, t) = 0, \quad P_2(y, t) = a^2 + \frac{da}{dt} \quad \text{при } y = 0. \quad (25)$$

Требую также, чтобы на конечном расстоянии от стенки

$\delta(y, t)$ горизонтальная скорость совпадала со скоростью невязкого потока, т.е. $a(t)x$, получим граничное условие для функции $f(y, t)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = a(t) \quad \text{при } y = \delta(x, t). \quad (26)$$

Для определения неизвестной толщины $\delta(x, t)$, как и ранее, потребуем выполнения условий:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \delta(x, t). \quad (27)$$

Сравнивая $c(t)$ и $P_2(y, t)$ из (23) и (25), будем иметь:

$$c(t) = a^2 + \frac{da}{dt}. \quad (28)$$

Окончательно будем иметь:

$$v) \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - a^2 \frac{da}{dt}. \quad (29)$$

Как только из (29) будет определено $f(y, t)$, $P_1(y, t)$ определится из второго равенства (23) и условия (25).

Легко показать, что решение задачи (29), (24), (26) можно представить в виде:

$$f(y, t) = A(y, t) + \frac{1}{v} \int_0^\delta \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - a^2 - \frac{da}{dt} \right] G(y, \eta, t) d\eta. \quad (30)$$

Представим решение (30) в виде суммы

$$f(y, t) \approx f_0(y, t) + f_1(y, t),$$

где $f_0(y, t)$ суть решения уравнения

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = 0,$$

удовлетворяющего условиям (24), (26). Оно имеет вид:

$$f_0(y, t) = \frac{a(t)}{2\delta(t)} y^2. \quad (31)$$

Функция $G(y, \eta, t)$, стоящая под интегралом, представляет собой функцию Грина и определяется по формуле (15).

За $f_1(y, t)$ возьмем выражение

$$f_1(y, t) = \frac{1}{v} \int_0^\delta \left[\frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta \partial t} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial \eta} \right)^2 - f_0 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \eta^2} - a^2 - \frac{da}{dt} \right] G d\eta.$$

удовлетворяющее нулевым граничным условиям. Вычисление да-
ет:

$$f_1(y, t) = \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{24} \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\delta} \right) \cdot (y^4 - 2a^2 \delta^2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} \left(a^2 + \frac{da}{dt} \right) \cdot (2y^3 - 3y^2 \delta) + \frac{1}{240} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 \cdot (2y^5 - 5y^2 \delta^3) \right]. \quad (32)$$

Окончательно для $f(y, t)$ будем иметь:

$$f(y, t) \approx \frac{a}{2\delta} y^2 + \frac{1}{\nu} \left[\frac{1}{24} (y^4 - 2y^2 \delta^2) \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{\delta} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{12} \left(a^2 + \frac{da}{dt} \right) \cdot (2y^3 - 3y^2 \delta) + \frac{1}{240} \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 \cdot (2y^5 - 5y^2 \delta^3) \right]. \quad (33)$$

Определим неизвестную толщину $\delta(t)$ из (33) и усло-
вия (27):

$$\frac{d\delta^2}{dt} + \left[\frac{g}{4} a + \frac{d \ln a}{dt} \right] \delta^2 = 6\nu. \quad (34)$$

Решая линейное уравнение (34), получим:

$$\delta^2 = \frac{6\nu}{a} e^{-\frac{g}{4} \int_0^t a(\tau) d\tau} \int_0^t a(\tau) e^{\frac{g}{4} \int_0^\tau a(\tau) d\tau} d\tau. \quad (35)$$

Здесь учтено, что в начальный момент $\delta = 0$.

Если параметр $a = \text{const}$, то из (35) имеем

$$\delta^2(t) = \frac{g\nu}{3a} \left(1 - e^{-\frac{g}{4}at}\right). \quad (36)$$

Это выражение при $t \rightarrow \infty$ переходит в выражение толщины плоского стационарного течения вблизи критической точки, полученное в предыдущем пункте.

3. Пространственное течение вблизи критической точки.

Совершенно аналогичным способом можно получить решение уравнений Навье-Стокса и для пространственного течения вблизи критической точки. Для этого воспользуемся цилиндрическими координатами. Совместим плоскость $x = 0$ со стенкой, начало координат расположим в критической точке, а ось x направим противоположно направлению набегающего течения. Пусть U и W - составляющие скорости в радиальном и осевом направлениях для течения без трения, а $u = u(r, x, t)$ и $w = w(r, x, t)$ - соответствующие составляющие для вязкого течения. Вследствие осевой симметрии течения $v_\varphi = 0$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$; поэтому из трех уравнений Навье-Стокса, записанных в цилиндрической системе координат, остаются только два:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} +$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (37)$$

Уравнение неразрывности при этом имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (38)$$

За граничные условия возьмем

$$u = 0, w = 0 \quad \text{при } z = 0,$$

$$u = U \quad \text{при } z = \delta. \quad (39)$$

Для невязкого осесимметричного течения с критической точкой имеем решение:

$$u = a r, \quad W = -2 a z, \quad (40)$$

которое удовлетворяет уравнению неразрывности. Здесь

$a(t)$ - функция времени. Как и раньше, можно найти давление в невязком течении. При $z = 0$ оно имеет вид:

$$p(r, 0, t) = p_0(t) - \frac{\rho}{2} \left(a^2 + \frac{da}{dt} \right) r^2, \quad (41)$$

где $p_0(t)$ - давление в критической точке.

Представим решение задачи в виде:

$$u = r \frac{\partial f(z, t)}{\partial z}, \quad w = -2f(z, t), \quad (42)$$

$$p = p_0(t) - \rho f_z(z, t) + \frac{\rho}{2} \left(a^2 + \frac{da}{dt} \right) r^2.$$

Тогда для определения неизвестных функций $f(x, t)$ и $P_1(x, t)$ получим следующие уравнения:

$$\nu \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - 2f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2 - \frac{da}{dt},$$
(43)

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = 2\nu \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial t} + 4f \frac{\partial f}{\partial x}$$

и граничные условия

$$f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad P_1(x, t) = 0 \quad \text{при } x = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a \quad \text{при } x = \delta(t).$$
(44)

Совершенно так же, как и в предыдущем случае, для $f(x, t)$ получим выражение:

$$f(x, t) \approx f_0(x, t) + f_1(x, t) =$$

$$= f_0(x, t) + \frac{1}{\nu} \int_0^\delta \left[\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 - 2f \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - a^2 - \frac{da}{dt} \right] G(x, \eta, t) d\eta,$$
(45)

где

$$f_0(x, t) = \frac{a}{2\delta} x^2,$$
(46)

$$f_1(x, t) = \frac{1}{\nu} \left[\left(\frac{x^4}{24} - \frac{x^2 \delta^2}{12} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha}{\delta} \right) - \left(\alpha^2 + \frac{d\alpha}{dt} \right) \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^2 \delta}{4} \right) \right]. \quad (47)$$

Для определения неизвестной $\delta(t)$ воспользуемся условием

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = \delta(t). \quad (48)$$

Тогда из (45) - (47) имеем:

$$\frac{d\delta^2}{dt} + \left(3\alpha^2 + \frac{d \ln \alpha}{dt} \right) \delta^2 = 6\nu. \quad (49)$$

Отсюда получаем, что

$$\delta^2(t) = \frac{6\nu}{\alpha} e^{-3 \int_0^t \alpha dr} \int_0^t \alpha e^{3 \int_0^r \alpha dr} dr. \quad (50)$$

Если $\alpha(t) = \text{const}$, будем иметь:

$$\delta^2(t) = 2 \frac{\nu}{\alpha} (1 - e^{-3\alpha t}). \quad (51)$$

При $t \rightarrow \infty$ получим

$$\delta = 1,41 \sqrt{\frac{\nu}{\alpha}}. \quad (52)$$

Расстояние δ , на которое распространяется влияние трения для осесимметричного течения в окрестности критической точки, вычисленное Н.Фреслингом /1/, равно 2.

Из формул (18) и (52) видно, что при стационарном те-



чении в окрестности критической точки толщина пограничного слоя как в плоском, так и осесимметричном случаях не зависит от координат x и y соответственно, т.е. не меняется вдоль обтекаемой стенки. В нестационарных случаях она так же не зависит от координат x и y , но меняется, как это видно из формул (36) и (51), со временем по экспоненциальному закону.

После того как найдено выражение толщины пограничного слоя в обоих случаях, вычисление составляющих скоростей и давления не представляет труда.

4. Общий нестационарный плоский случай.

В этом пункте рассмотрим решение асимптотического слоя вблизи критической точки в общем нестационарном плоском случае.

Введем новую функцию:

$$f(y, t) = ya(t) - \varphi(y, t). \quad (53)$$

Подставляя (53) в уравнение (29), получим:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 2a \frac{\partial \varphi}{\partial y} - (ya - \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2. \quad (54)$$

При этом предельные условия (24), (26) в асимптотическом случае примут вид:

$$\begin{aligned} \varphi(y, t) &= 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = a \quad \text{при } y=0, t>0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } y \rightarrow \infty, t>0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \quad \text{при } t=0, y>0. \end{aligned} \quad (55)$$

Здесь подразумевается, что $a(0) = 0$.

Представим решение задачи (54), (55) в виде:

$$\varphi(y, t) = \mathcal{A}(y, t) + \int_0^t dt \int_0^\infty \left[2a \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \right. \\ \left. - (\eta a - \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)^2 \right] G(y, \eta, t - \tau) d\eta, \quad (56)$$

где $\mathcal{A}(y, t)$ - решение уравнения (54) без правой части, удовлетворяющее предельным условиям (55). Оно имеет вид:

$$\mathcal{A}(y, t) = \int_0^t \frac{a(\tau) \sqrt{v}}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left[1 - e^{-\frac{y^2}{4v(t-\tau)}} \right] d\tau, \quad (57)$$

$G(y, \eta, t)$ - функция Грина задачи (54), (55). Она представляется формулой:

$$G(y, \eta, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{\eta+y}{2\sqrt{vt}} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{\eta-y}{2\sqrt{vt}} - \operatorname{erf} \frac{\eta}{2\sqrt{vt}}, & 0 \leq y < \eta \\ \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{y+\eta}{2\sqrt{vt}} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \frac{y-\eta}{2\sqrt{vt}} - \operatorname{erf} \frac{\eta}{2\sqrt{vt}}, & y < \eta < \infty. \end{cases} \quad (58)$$

Вместо (56) рассмотрим выражение с множителем λ перед интегралом

$$\varphi(y, t) = \mathcal{A}(y, t) + \lambda \int_0^t d\tau \int_0^\infty E(\eta, \tau) G(y, \eta, t - \tau) d\eta, \quad (59)$$

где

$$E(y, t) = 2a \frac{\partial \varphi}{\partial y} - (ya - \varphi) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2. \quad (60)$$

Продифференцировав (59) в два ряда, получим:

$$\frac{\partial^\alpha y}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial^\alpha A}{\partial y^\alpha} + A \int_0^t d\tau \int_0^\infty E(\tau, \tau) \frac{\partial^\alpha G}{\partial y^\alpha} d\eta. \quad (61)$$

Будем искать решение последнего интегродифференциального уравнения в виде ряда:

$$\frac{\partial^\alpha y}{\partial y^\alpha} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^\kappa \frac{\partial^\alpha y_\kappa}{\partial y^\kappa}, \quad \frac{\partial^0 y}{\partial y^0} = A(y, t), \quad \alpha = 0, 1, 2. \quad (62)$$

Тогда для определения членов ряда (62) получим следующие рекуррентные формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha y_0}{\partial y^\alpha} &= \frac{\partial^\alpha A}{\partial y^\alpha}, \quad \frac{\partial^\alpha y_{\kappa+1}}{\partial y^\alpha} = \int_0^t d\tau \int_0^\infty \left[2a \frac{\partial y_\kappa}{\partial \eta} - \right. \\ &- a\eta \frac{\partial^2 y_\kappa}{\partial \eta^2} + \sum_{m=0}^{\kappa} \left(y_m \frac{\partial^2 y_{\kappa-m}}{\partial \eta^2} - \right. \\ &\left. \left. - \frac{\partial y_m}{\partial \eta} \frac{\partial y_{\kappa-m}}{\partial \eta} \right) \right] \frac{\partial^\alpha G}{\partial y^\alpha} d\eta. \end{aligned}$$

Исследуем сходимость ряда (62).

Легко показать, что

$$\int_0^t d\tau \int_0^\infty \left| \frac{\partial^\alpha G}{\partial y^\alpha} \right| d\eta < N\sqrt{t}, \quad \left| ay^\beta \frac{\partial^\alpha A}{\partial y^\alpha} \right| < M,$$

где M, N - постоянные, β - любое конечное положительное число.

В силу (63) и (64), мажоранта рядов (62) имеет вид:

$$B = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \lambda^\kappa B_\kappa,$$

где

$$B_0 = M, \quad B_{k+1} = 4N\sqrt{t} \sum_{m=0}^k B_m B_{k-m} + 4B_k M\sqrt{t}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что B должно удовлетворять равенству:

$$B = B_0 + 4N\lambda\sqrt{t} B^2 + 4M\sqrt{t} B,$$

что представляет собой квадратное уравнение относительно B . Из этого выражения для наименьшего корня получим:

$$B = \frac{1}{8N\lambda\sqrt{t}} \left[1 - 4M\sqrt{t} - \sqrt{(1 - 4M\sqrt{t})^2 - 16MN\lambda\sqrt{t}} \right].$$

Отсюда видно, что для сходимости мажорантного ряда при $\lambda = 1$ необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство:

$$4\sqrt{MN\sqrt{t}} + 4M\sqrt{t} \leq 1.$$

При разных значениях параметра $a(t)$ из (57) и (59) легко получить разные приближения в эффективном виде.

Для выражения давления на стенке $y = 0$ получим формулу:

$$p(x, 0, t) = p_0(a, 0, t) - \frac{1}{2} \rho \left(a^2 + \frac{da}{dt} \right) x^2,$$

а для касательного напряжения на стенке будем иметь:

$$\begin{aligned} \tau(x, t) &= \mu f''_{yy}(0, t)x = -\mu \varphi''_{yy}(0, t)x = \\ &= -\mu x \left[A''_{yy}(0, t) + 2D''_{yy}(0, t) \right], \end{aligned}$$

где



$$D(y,t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty E(\eta,\tau) G(y,\eta,t-\tau) d\eta.$$

Поступила 10.XI.1980

Кафедра
механики сплошных сред

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя. М., 1969.
2. T. Watson. Quart. J. Mech. Appl. Math., 12, 175-190, 1950.
3. M.B. Glauert. J. Fluid. Mech., 1, 97-110, 1956.

Հ. Շարիկաձե

Ջրնդրուող ճանաչողական խնդիրները լուծելու ստեղծված
մոտեցումն օգտագործելով գրանցման մեթոդը

ԴՐՈՒՄԵՆ

Ջրնդրուող ճանաչողական խնդիրները լուծելու ստեղծված
մոտեցումն օգտագործելով գրանցման մեթոդը

J. Sharikadze

ON THE SOLUTION OF SOME PROBLEMS OF THE MOTION
OF A VISCOUS FLUID NEAR THE STAGNATION POINT

Summary

Some problems of the motion of a viscous fluid near the stagnation
point are solved by the method of Green's function.



УДК 532.546

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ
РАЗЛОЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В.М.Ентов, Т.А.Малахова, М.Г.Одидария

Современные методы теории нелинейной фильтрации позволяют изучить большое число задач, имеющих разнообразные технические приложения, используя единообразный подход, опирающийся на два основных факта: наличие аналогии между задачами дозвуковой газовой динамики и нелинейной фильтрации, указанной еще в 1940 году С.А.Христиановичем / 1 /, и установленную С.А. Чаплыгиным / 2 / возможность линеаризации уравнений газовой динамики путем перехода к переменным годографа скорости.

Описание нелинейной структуры течения удобно вести с помощью закона

$$\text{grad } H = -\frac{\vec{\omega}}{\omega} \varphi(\omega), \quad H = C \left(\frac{p}{\rho g} + z \right), \quad C = \frac{\kappa \rho g}{\mu}, \quad (0.1)$$

где H - обобщенный напор, C - коэффициент фильтрации, κ - проницаемость, $\varphi(\omega)$ - функция, описывающая закон фильтрации.

В случае фильтрации с предельным градиентом / 3 / $\varphi(\omega)$

имеет вид

$$\varphi(\omega) = \omega + \lambda, \quad \lambda = \frac{\kappa}{\mu} G, \quad (0.2)$$

где G - предельный градиент давления.

Если рассмотреть движение в тонком слоистом пласте /4/, в каждом пропластке которого фильтрация подчиняется закону (0.2), то описание осредненного движения полезно проводить с помощью кусочно-линейной функции

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\varepsilon_j} (\omega + \lambda_j), \quad \omega_{j-1} \leq \omega \leq \omega_j, \quad (0.3)$$

где

$$\lambda_j = \frac{\sum_{i=1}^j \kappa_i h_i G_i}{\mu h}, \quad \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n,$$

$$\varepsilon_j = \frac{\sum_{i=1}^j \kappa_i h_i}{\sum_{i=1}^n \kappa_i h_i}, \quad \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots < \varepsilon_n,$$

h - мощность пласта, h_i - мощность пропластка с номером i , n - число пропластков, ω_j - значение осредненной по мощности пласта скорости фильтрации, при которой начинается движение в пропластке с номером $j+1$.

Для рассмотрения качественных особенностей проявления нелинейных эффектов в слоистом пласте выберем простейшую модель двухслойного пласта, в одном из пропластков которого предельный градиент настолько мал, что им можно пренебречь, т.е. в обозначениях (0.3) $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 1$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda$, $G_2 = G$, $\omega_0 = 0$, $\omega_1 = \omega_*$.

Дополняя уравнение (0.1) в плоском случае уравнением

неразрывности

$$\operatorname{div} \vec{\omega} = 0, \quad (0.4)$$

вводя обычным образом функцию тока $\Psi(x, y)$ и выбирая за независимые переменные модуль скорости фильтрации ω и угла θ между вектором скорости и положительным направлением оси x , получаем линейную систему

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \omega} = - \frac{\varphi'(\omega)\omega}{\varphi^2(\omega)} \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad (0.5)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\omega^2}{\varphi(\omega)} \frac{\partial H}{\partial \omega}.$$

Или, исключая напор H , для функции тока $\Psi(\omega, \theta)$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\varphi^2}{\omega \varphi'(\omega)} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \right) + \frac{\varphi}{\omega^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (0.6)$$

Для закона (0.3) функция $\varphi'(\omega)$ в уравнении (0.6) является разрывной при $\omega = \omega_*$.

Дополнительные выгоды от применения преобразования годографа заключаются в том, что неизвестная граница области физической плоскости (x, y) переходит в известную линию в плоскости годографа. Так, как показано С.А.Христиановичем / 1 /, свободная поверхность при безнапорной фильтрации переходит в линию плоскости годографа, уравнение которой

$$\varphi(\omega) + C \sin \theta = 0.$$

Подобным же образом при фильтрации с предельным градиентом (0.2) неизвестная граница застойной зоны переходит в отрезок линии $\omega = 0$, в случае (0.3) (рис. 2)

границе застойной зоны в малопроницаемом пропластке двух-
 слойного пласта соответствует $\omega = \omega_*$. Разберем это ни-
 же на приведенных конкретных примерах течения.

Возвращение к исходным переменным x, y дается ин-
 тегрированием соотношений / 5 /

$$dx = \left(-\frac{\cos \theta}{\omega^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \right) d\omega +$$

$$+ \left(\frac{\cos \theta}{\omega} \frac{\varphi(\omega)}{\varphi'(\omega)} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} - \frac{\sin \theta}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) d\theta, \quad (0.7)$$

$$dy = \left(\frac{\cos \theta}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} - \frac{\sin \theta}{\omega^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) d\omega +$$

$$+ \left(\frac{\sin \theta}{\omega} \frac{\varphi(\omega)}{\varphi'(\omega)} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} + \frac{\cos \theta}{\omega} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) d\theta.$$

В силу однозначности x и y на линии $\omega = \omega_*$ для (0.3)
 следует учесть дополнительные условия

$$\Psi(\omega_* + 0) = \Psi(\omega_* - 0), \quad (0.8)$$

$$\frac{\varphi}{\omega \varphi'(\omega)} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_* + 0} = \frac{\varphi}{\omega \varphi'(\omega)} \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} \Big|_{\omega = \omega_* - 0}$$

Типичная краевая задача, решаемая для уравнения (0.6),
 это первая краевая задача в полуплоскости $0 \leq \theta \leq \theta_0, 0 \leq \omega < \infty$
 с разрезом вдоль участка прямой $\theta = \theta_1$.

Таким образом, исследование задач нелинейной фильтра-
 ции сводится к решению соответствующих краевых задач для
 отыскания функций Ψ и H в плоскости годографа скорости.

К настоящему времени решено достаточно много задач нелинейной фильтрации. Развитые при этом аналитические методы весьма специализированы и не могут быть непосредственно перенесены на исследование течений с другими законами фильтрации. Однако существует обширный класс течений, для которых элементы нелинейности локализованы в окрестности особых точек-источников, угловых точек, точек смены типа граничных условий или бесконечно удаленной точки. Такие течения могут эффективно изучаться при практически любом законе фильтрации при помощи метода срачиваемых асимптотических разложений /6,8/.

Применение этого асимптотического подхода позволяет существенно расширить возможности аналитических методов, получить решение новых задач.

Существование в рассматриваемом классе задач малых по сравнению с характерными величинами, вносящих в решение "неоднородность", необходимость учета этих "неоднородностей" вблизи особых точек и линий приводит к применению основного приема задачи особых возмущений: построению внешнего и внутреннего разложения, так как ни одно из асимптотических разложений не является равномерно пригодным во всей области течения.

Построение внешнего разложения основного решения при стремлении малого параметра к нулю и пригодного, таким образом, во всей области движения за исключением узкой полосы вблизи линии (или точки) влияния неоднородности, основано на естественном предположении о существовании предела решения при стягивании области "неоднородности".

Детали течения в самой области "неоднородности" исследуются введением внутреннего решения, учитывающего эту "неоднородность". Иначе, внешнее и внутреннее решение дополняют друг друга: одно имеет место там, где непригодно другое.

Существенной чертой, необходимой для успешного применения метода, является существование такой области течения, в которой еще верно основное решение (внешнее решение) и уже действует внутреннее разложение, т.е. возможность срачивания внешнего и внутреннего разложений.

Следует отметить, что применение метода срачивания двух асимптотических разложений возможно и в случае, если известно хотя бы численное решение внутренней (или внешней) задачи.

Во всех рассмотренных ниже случаях при помощи метода срачиваемых асимптотических разложений удастся построить главный член разложения решения по малому параметру. Однако, даже знание главного члена позволяет описать многие физически интересные ситуации.

I. Рассмотрим решение задачи напорной фильтрации под плотиной в случае грунта бесконечной мощности.

Пусть течение описывается законом (0.1). Движение жидкости происходит не во всем слое грунта, а лишь в области с границей ABCDEF (рис.3). Будем называть эту область областью фильтрации. Остальная часть полуплоскости $y < 0$ занята "застойной зоной", жидкость в ней неподвижна. Граница застойной зоны подлежит отысканию в ходе решения.

Задача определения функции тока Ψ в плоскости годографа скорости (ω, θ) имеет вид (учитывая (0.2) и (0.6)):

$$u(u+1)\Psi_{uu} + (u-1)\Psi_u + \Psi_{\theta\theta} = 0, \quad (1.1)$$

$$0 < u < \infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0, \quad \omega = uA,$$

при граничных условиях (рис. 4)

$$\Psi_{\theta} = 0 \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad 0 < u < \infty,$$

$$\Psi = 0 \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < 0, \quad u = 0, \quad (1.2)$$

$$\Psi_{\theta} = 0 \quad \theta = 0, \quad 0 < u < a,$$

$$\Psi = 0 \quad \theta = 0, \quad a < u < \infty.$$

Задача (1.1), (1.2) принадлежит к задачам, рассмотренным в работах /3, 7/. Решение ее может быть представлено в виде

$$\Psi(u, \theta) = \frac{u^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{s^3(1+s^2)}{th\pi s} \mathcal{F}(s, -u) \Psi^*(s, \theta) ds, \quad (1.3)$$

где $\mathcal{F}(s, -u) = \mathcal{F}(2+is, 2-is, 3, -u)$ - гипергеометрическая функция, а трансформанта $\Psi^*(s, \theta)$ имеет вид

$$\Psi^*(s, \theta) = \int_0^{\infty} (1+v) \mathcal{F}(s, -v) \Psi(v, \theta) dv = \begin{cases} A(s) chs(\theta + \frac{\pi}{2}), & -\frac{\pi}{2} < \theta < 0 \\ A(s) chs(\frac{\pi}{2} - \theta), & 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (1.4)$$

причем для определения $A(s)$ имеем парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty} \frac{s^3(1+s^2)}{th\pi s} C(s) \mathcal{F}(s, -u) ds = 0, \quad a < u < \infty, \quad (1.5)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{s^2(1+s^2)}{th\pi s} C(s) \mathcal{F}(s, -u) ds = h_2(u), \quad 0 < u < a,$$

$$C(s) = s^2 \left[H(s) \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2} - \Psi_-^*(s) \right], \quad (I.6)$$

$$\Psi_-^* = \int_0^{\infty} (1+v) \mathcal{F}(s, -v) \Psi(v, 0) dv,$$

$$h_2(u) = - \int_0^{\infty} \frac{s^4(1+s^2)}{th \pi s} th \frac{\pi s}{2} \mathcal{F}(s, -u) \Psi_-^*(s) ds.$$

Следуя [3, 7], решение этих уравнений можно представить

в виде

$$C(s) = \frac{1}{s} \int_0^{\alpha} \varphi(\tau) \sin s \tau d\tau, \quad sh^2 \frac{\alpha}{2} = a, \quad (I.7)$$

причем для функции тока получаем представление

$$\begin{aligned} \Psi(u, \theta) = & \frac{u^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{s(1+s^2) \operatorname{ch}(\theta + \frac{\pi}{2}) s}{th \pi s \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2}} \left[\frac{1}{s} \int_0^{\alpha} \varphi(\tau) \sin s \tau + \right. \\ & \left. + 2Q \mathcal{F}_0(s, -a) \right] \mathcal{F}(s, -u) ds d\tau = \end{aligned} \quad (I.8)$$

$$= \frac{\kappa_2 u^2}{2} \int_0^{\infty} \frac{(1+s^2) \operatorname{ch}(\theta + \frac{\pi}{2}) s}{th \pi s \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2}} \mathcal{F}(s, -u) \int_0^{\alpha} \xi(\tau) \sin s \tau d\tau ds,$$

где $\xi(\tau)$ - решение интегрального уравнения

$$\xi(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\alpha} \xi(\nu) E_2(\tau, \nu) d\nu = \frac{1}{\pi} sh \tau, \quad (I.9)$$

$$E_2(\tau, \nu) = 2 \int_0^{\infty} \epsilon_2(s) \sin s\tau \cdot \sin s\nu ds,$$

(I.10)

$$\epsilon_2(s) = \operatorname{ctg} \pi s \cdot \operatorname{th} \frac{\pi s}{2} - 1,$$

$$\mathcal{F}_0(s, -\alpha) = \frac{1}{\pi s} \int_0^{\alpha} \frac{\operatorname{sh} \frac{\tau}{2} (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2}) \sin s\tau}{\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} (\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2})^{1/2}} d\tau.$$

(I.11)

Постоянная γ_2 находится из условия

$$\int_0^{\alpha} \tau \varphi(\tau) d\tau = 0,$$

(I.12)

$$\varphi(\tau) = -\frac{2a}{\pi} \frac{\operatorname{sh} \frac{\tau}{2} (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2})}{a (\operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sh}^2 \frac{\tau}{2})^{1/2}} + \gamma_2 \xi(\tau).$$

(I.13)

Граница застойной зоны определяется соотношением

$$\lambda z(\theta) = \int_0^{\theta} \chi(\theta) e^{i\theta} d\theta + z_0 \lambda,$$

(I.14)

$$\chi(\theta) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\varphi_u}{u}, \quad z = x + iy,$$

следующим из формул (0.7). Подставляем сюда выражение из (I.8), получаем

$$\lambda z(\theta) = \gamma_2 e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - i \right) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\theta + \frac{\pi}{2}) s}{\operatorname{th} \pi s \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2}} \int_0^{\alpha} \xi(\tau) \sin \tau s d\tau ds + \lambda z_0.$$

(I.15)

Наконец, для перепада напора вдоль застойной зоны имеем

$$H_2 - H(\theta) = \int_0^{\theta} H_0(\theta, 0) d\theta = \int_0^{\theta} \chi(\theta) d\theta =$$

(I.16)

$$= \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} \frac{(1+s^2) \left[\operatorname{sh} \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) s - \operatorname{sh} \frac{\pi s}{2} \right]}{s \cdot \operatorname{th} \pi s \cdot \operatorname{ch} \frac{\pi s}{2}} \int_0^{\alpha} \xi(r) \sin r s \, dr \, ds. \quad (\text{I.16})$$

В частности, можно определить далее полный перепад напора (между верхним бьефом и осью симметрии), распределение скоростей и напоров в основании плотины и на выходе в верхний бьеф.

Таким образом, решение задачи строится следующим образом: из уравнения (I.9) находится $\xi(r)$, а затем по формулам (I.15) и другим определяются все основные величины, представляющие интерес. При этом характерный размер задачи - длина плотины - оказывается выраженным через параметр α , т.е. по существу, через характерную скорость α .

Перейдем к асимптотическому исследованию задачи при больших значениях α , когда все исследование можно провести до конца (хотя и приближенно) с помощью метода срачиваемых асимптотических разложений. Этот случай соответствует большим интенсивностям потока ($\alpha \gg 1$).

Внешнюю задачу в плоскости годографа получим, выбирая в качестве масштаба скорости $U_0 = \alpha \lambda$, в качестве независимой переменной $U = \frac{\omega r}{U_0} = \frac{u}{\alpha}$ и считая величину $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ малой.

Тогда главный член внешнего разложения ψ^0 находится как решение уравнения

$$u^2 \psi_{uu} + u \psi_u + \psi_{\theta\theta} = 0 \quad (\text{I.17})$$

в области, указанной на рис. 4 (с заменой ω на u , $\alpha \lambda$ на 1) и при краевых условиях (I.2). Указанное решение лег-



ко находится, поскольку фактически речь идет о решении уравнения Лапласа, записанного в полярных координатах (u, θ) , и имеет вид

$$\Psi^0(u, \theta) = Q - \frac{h_0}{2\pi} I_m \sqrt{\nu^2 - 1} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi} (\xi - \nu^2)}, \quad \nu = u e^{-i\theta} \quad (I.18)$$

При $\nu \rightarrow 0$ решение (I.18) имеет асимптотику

$$\Psi^0(u, \theta) = C \ln u + B = C (\ln u - \ln a) + B, \quad (I.19)$$

где $C = \frac{h_0}{\pi}$, $B = Q - \frac{h_0}{\pi} \ln 2$.

С другой стороны, при $u < a$ общее решение задачи (I.1), (I.2), удовлетворяющее крайевым условиям при $u = 0$, $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ и очевидному условию симметрии $\Psi(\theta) = \Psi(-\theta)$, имеет вид

$$\Psi(u, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_{2n}(u) \cos 2n\theta, \quad (I.20)$$

где $P_{2n}(u)$ - решение уравнения

$$u(u+1)P_{2n}'' + (u-1)P_{2n}' - 4n^2 P_{2n} = 0, \quad (I.21)$$

при условиях

$$P_n(0) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} u^{-n} P_n(u) = 1, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{P_0}{\ln u} = 1. \quad (I.22)$$

Указанное решение выражается через гипергеометрические функции

$$P_n(u) = B_n u^2 \mathcal{F}(-2n+2, 2n+2, 3, -u) = B_n u^2 \mathcal{F}_{2n}(u), \quad (I.23)$$

$$\mathcal{F}_{2n}(0) = 1.$$

Выражение (I.20) есть внутреннее решение исходной задачи, формально соответствующее асимптотике $a \rightarrow \infty$ в задаче (I.1), (I.2). Коэффициенты в нем подлежат определению из сращивания с внешним решением.

Внешняя асимптотика внутреннего решения (I.20) в соответствии с (I.22) имеет вид

$$\Psi_0(u, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u^{2n} \cos \lambda n \theta + A_n \ln u. \quad (I.24)$$

Из условия сопряжения с внутренним разложением внешнего решения (I.19) получаем

$$A_0 = C, \quad A_n = 0 \quad (n \geq 1). \quad (I.25)$$

Таким образом, решение задачи при $a \gg 1$ может быть представлено в виде составного асимптотического разложения

$$\Psi(u, \theta) = \begin{cases} Q - \frac{h_0}{\lambda \pi} \operatorname{Im} \sqrt{v^2 - 1} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t} (t-v^2)}, & u \gg \lambda, \\ c P_0(u), & u \ll a. \end{cases} \quad (I.26)$$

Из условия согласования решения при $\lambda \leq u \leq a$ имеем $-C \ln a + B = -C$, что позволяет связать постоянные Q (расход) и h_0 (перепад напора). Связь a и h_0 можно взять непосредственно из аналогичной задачи фильтрации, следующей закону Дарси

$$Q = \frac{h_0}{\pi} (\ln \lambda a - 1), \quad a = \frac{h_0}{\pi \lambda k}.$$

В рамках рассматриваемого приближения определение границы застойной зоны (I.14) дает

$$\lambda z(\theta) = \int_0^{\theta} x(\theta) e^{i\theta} d\theta + \lambda z_0,$$

(I.27)

$$x(\theta) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{c}{u} \psi_u = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{c}{u} \left[\frac{1}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} \right] = c.$$

Отсюда

$$\lambda z(\theta) = c(-i \cos \theta + \sin \theta) + \lambda z_0,$$

т.е. в рассматриваемом приближении застойная зона есть окружность радиуса C с центром в середине основания плотины.

II. В случае двухзвенного закона (0.3) (рис.2) приведем асимптотическое решение уравнения (0.6) для граничных условий, изображенных на рис. 5,6 для течения, создаваемого кольцевой батареей n равнодебитных скважин, и в элементе пятиточечной системы расстановки скважин - основных схем, применяемых при разработке нефтяных месторождений. Легко видеть, что рассматриваемые постановки эквивалентны исследованию задач о внутреннем обтекании угла $\frac{\pi}{n}$ в случае кольцевой батареи и $\frac{\pi}{2}$ - для пятиточечной системы.

В рассматриваемых течениях существуют три параметра размерности скорости: ω_x - скорость, соответствующая угловой точке в законе (0.3), λ - характерное значение скорости, отвечающее предельному градиенту, α - характерная скорость на оси симметрии системы скважин.

Последовательное применение метода сращиваемых асимптотических разложений удается провести, если между

$\alpha, \omega_*, \lambda$ выполняется одно из соотношений:

либо

$$\omega_* < \lambda \ll \alpha \quad (2.1)$$

(случай большой интенсивности течения $\frac{\alpha}{\lambda} \gg 1$),

либо

$$\omega_* \ll \alpha \lesssim \lambda \quad (2.2)$$

(мало отношение относительных подвижностей при малых и больших скоростях фильтрации, мало $\frac{\omega_*}{\lambda}$),

либо

$$\alpha \ll \omega_* \quad (\alpha \ll \lambda) \quad (2.3)$$

(малые интенсивности потока)

I⁰. Рассмотрим случай (2.1) на примере течения, создаваемого кольцевой батареей.

Найдем внутреннее решение задачи. Положим

$u = \frac{\omega}{\lambda}$, $u_* = \frac{\omega_*}{\lambda}$, $\alpha' = \frac{\alpha}{\lambda}$. Тогда из (0.6), учитывая (0.3), имеем при $u < \alpha'$

$$u^2 \Psi_{uu} + u \Psi_u + \Psi_{\theta\theta} = 0, \quad u \leq u_*, \quad (2.4)$$

$$u(u+1) \Psi_{uu} + (u-1) \Psi_u + \Psi_{\theta\theta} = 0, \quad u > u_*,$$

и дополнительные условия из (0.8) на линии $u = u_*$

$$\frac{u+1}{u} \Psi_u(u_*, +0) = \Psi_u(u_*, -0), \quad (2.5)$$

$$\Psi(u_*, +0) = \Psi(u_*, -0).$$

Интересующее нас решение, учитывающее "неоднородность", должно удовлетворять крайевым условиям в прямоугольнике

$$0 \leq u \leq \alpha', \quad 0 = \theta_- \leq \theta \leq \theta_+ = \frac{n-1}{n} \pi,$$

$$\Psi(u, \theta_-) = \Psi_- = \text{const}; \quad \Psi(u, \theta_+) = \Psi_+ = \text{const},$$

$$\Psi(0, \theta) = \Psi_- + \Psi_+ \frac{\theta - \theta_-}{\theta_+ - \theta_-}.$$

Поскольку произвольная функция вида $A + B\theta$ удовлетворяет (2.4), (2.5), достаточно построить решение с $\Psi_- = \Psi_+ = 0$.

Общее решение, удовлетворяющее однородным условиям при $\theta = \theta_{\mp}$, $u = 0$ имеет вид

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} C_k P_k(u) \sin \frac{\kappa \pi \theta'}{\theta_+ - \theta_-}, \quad \theta' = \theta - \theta_-, \quad (2.7)$$

где $P_k(u)$ есть решение задачи (аналог (1.23))

$$\begin{aligned} u(u+1)P_k'' + (u-1)P_k' - s_k^2 P_k &= 0, \quad u > u_*, \\ u^2 P_k'' + uP_k' - s_k^2 P_k &= 0, \quad u \leq u_*, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\frac{u_*+1}{u_*} P_k'(u_*+0) = P_k'(u_*-0), \quad (2.9)$$

$$P_k(u_*+0) = P_k(u_*-0); \quad P_k(0) = 0.$$

Указанное решение определено с точностью до множителя и имеет вид (индекс "к" временно опустим, чтобы не загромождать запись)

$$P(u) = C u^s, \quad u < u_* \quad (2.10)$$

$$P(u) = A(u+1)^{-s} \mathcal{G}(s-1, s, 1+\lambda s, (u+1)^{-1}) + B u^2 \mathcal{G}(2-s, 2+s, 3, -u), \quad u \geq u_*$$

Если потребовать дополнительно $P(u) \cdot u^{-s} \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 1$, имеем выражения для A, B, C :

$$A = \frac{\Gamma(2+s)\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+2s)} u_* (u_*+1)^s \left[\mathcal{F}(2-s, 2+s, 2, -u_*) - s u_* \times \right. \\ \times \mathcal{F}(2-s, 2+s, 3, -u_*) \left. \right] \left[\mathcal{F}(s-1, s, 1+2s, \frac{1}{u_*+1}) + \right. \\ \left. + \mathcal{F}(s-1, s+1, 1+2s, \frac{1}{u_*+1}) \right]^{-1}, \quad (2.11)$$

$$B = \frac{\Gamma(2+s)\Gamma(1+s)}{2\Gamma(2s)},$$

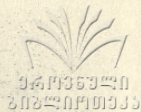
$$C = \frac{\Gamma(2+s)\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+2s)} u_*^{1-s} \left[2(u_*+1) \mathcal{F}(2-s, 2+s, 2, -u_*) \mathcal{F}(s-1, s, 1+2s, \frac{1}{u_*+1}) + \right. \\ \left. + s u_* \mathcal{F}(2-s, 2+s, 3, -u_*) \mathcal{F}(s-1, s+1, 1+2s, \frac{1}{u_*+1}) \right] \times \\ \times \left[\mathcal{F}(s-1, s, 1+2s, \frac{1}{u_*+1}) + \mathcal{F}(s-1, s+1, 1+2s, \frac{1}{u_*+1}) \right]^{-1}$$

Коэффициенты в выражении (2.7) определяются требованием согласования решения с поведением решения во внешней области.

Вводя "внешнюю" переменную $U = \frac{\omega r}{a}$, $\Delta = \frac{\lambda}{a}$, получим для $\psi(U, \theta)$

$$U(U+\Delta)\psi_{UU} + (U-\Delta)\psi_U + \psi_{\theta\theta} = 0, \quad U > U_* = \frac{\omega r_*}{a}. \quad (2.12)$$

Краевые условия показаны на рис.5. Заметим, что в предположении (2.1) $\Delta \ll 1$, $U_* \ll 1$, поэтому "внешнее" решение приближенно совпадает с решением уравнения Лапласа, в которое переходит (2.12) при $\Delta = U_* = 0$, в полярных



координатах. Удобное представление для решения в комплексной (физической) плоскости дается выражениями

$$\omega(z) = -H + i\psi = \frac{q}{2\pi} \ln(z^n - R^n), \quad (2.13)$$

$$Ue^{-i\theta} = \frac{1}{2} \frac{q^n}{\pi a} z^{n-1} / (z^n - R^n), \quad \alpha = \frac{q(n-1)^{1-\frac{1}{n}}}{2\pi R}$$

(Приведенные выражения соответствуют течению, создаваемому кольцевой батареей n источников с радиусом R).

Полученное решение применимо при $U \gg U_*$, $U \gg \Lambda$. Для того чтобы найти его продолжение во внутреннюю область, допустим, что найдется такая промежуточная область U , $1 \gg U \gg \Lambda$, в которой можно пользоваться решением (2.13), считая U малым. Тогда, находя внутреннюю асимптотику внешнего решения (2.13), считая $\frac{z}{R}$ малым и исключая z , имеем

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{q}{2\pi} \operatorname{Im} \left(\frac{z}{R} \right)^n = \frac{q}{2\pi} (n-1) \left(\frac{U}{n} \right)^{n-1} \sin \frac{n\theta}{n-1} = \\ &= \frac{q}{2\pi} (n-1) \left(\frac{U}{n} \right)^s \sin s\theta, \quad s = \frac{n}{n-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

С другой стороны, из внутреннего решения при $u = \frac{w}{\lambda} \gg 1$ (его внешняя асимптотика)

$$\psi \approx C_1 u^s \sin s\theta + C_2 u^{2s} \sin 2s\theta + \dots \quad (2.15)$$

Представления (2.14), (2.15) будут согласованы между собой, если положить

$$C_1 = \frac{q}{2\pi} (n-1) \left(\frac{\lambda}{an} \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad C_2 = C_3 = \dots = 0. \quad (2.16)$$

Таким образом, продолжение внешнего решения во внутреннюю

область $U = \frac{\omega}{a} \ll 1$ записывается в виде

$$\psi \approx \frac{q}{2\pi} (n-1) \left(\frac{\lambda}{na}\right)^{\frac{n}{n-1}} P_1(u) \sin \frac{n\theta}{n-1}. \quad (2.17)$$

Оценить пределы применимости полученных асимптотических решений удобнее всего на частном случае фильтрации с предельным градиентом (рис.1), когда имеется достаточный запас точных решений. Проведем это для случая батареи шести равнодебитных скважин. Сопоставление будем вести по границам застойных зон. Решение задачи с предельным градиентом получим при $u_* = 0$. Используя (0.7), получим для линии $u = 0$

$$x = \frac{a}{\lambda} \left[(n-1) \cos \frac{\theta}{n-1} + \frac{n-1}{2n-1} \cos \frac{2n-1}{n-1} \theta \right], \quad (2.18)$$

$$y = \frac{a}{\lambda} \left[\frac{n-1}{2n-1} \sin \frac{2n-1}{n-1} \theta - (n-1) \sin \frac{\theta}{n-1} \right],$$

$$Q = \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot \frac{q}{2\pi} \frac{n-1}{n \frac{n}{n-1}} \frac{\Gamma(2 + \frac{n}{n-1}) \cdot \Gamma(1 + \frac{n}{n-1})}{2\Gamma(\frac{2n}{n-1})}$$

Границы застойных зон, найденные из точного (сплошные линии) и асимптотического (пунктир) решений показаны на рис.7. Нетрудно видеть, что удовлетворительное согласование результатов достигается при $a' = \frac{a}{\lambda} \geq 5$.

Воспользуемся полученным выше решением, чтобы оценить размеры застойных зон в менее проницаемом пропластке двухслойного пласта (случай (0.3)). Значение $\omega = \omega_*$

находится в области применимости "внутреннего" решения (2.17). Используя формулы возвращения на физическую плоскость, получим

$$x = R' \cos \frac{\theta'}{n-1}, \quad y = R' \sin \frac{\theta'}{n-1}, \quad (2.19)$$

т.е. окружность радиуса R' ,

$$R' = R \left(\frac{2\pi R \lambda}{q^n} \right)^{\frac{1}{n-1}} C u_*^{s-1}, \quad \text{где } C \text{ из (2.11).}$$

Это выражение справедливо при любых $\frac{\omega_*}{\lambda} < 1$. Чтобы оценить возможные размеры застойных зон, примем параметры пропластков, имеющие место на некоторых участках месторождения Арлан (Вашкирская АССР), тогда $\omega_* = 1.125 \cdot 10^{-6} \frac{\text{см}}{\text{сек}}$,

$$\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad \lambda = 2.25 \cdot 10^{-6} \frac{\text{см}}{\text{сек}}, \quad a \approx 0.606 \frac{q}{R} = 1.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{см}}{\text{сек}} \approx 8\lambda,$$

$$q = 10 \frac{\text{м}^2}{\text{сут}}, \quad R = 200 \text{ м}, \quad R' = 0,43 R.$$

Таким образом, при реальных величинах предельного градиента в одном из пропластков может оказаться неподвижной значительная часть жидкости. Можно полагать, что в ходе вытеснения нефти водой в подобной ситуации в малопроницаемом пласте образуются целики больших размеров, приводящие к заметным потерям нефти.

В случае рассмотренной асимптотики (2.1) исследование влияния нелинейных эффектов представляет интерес лишь в течениях с резким поворотом потока, когда и при больших интенсивностях образуются значительные застойные зоны.



Именно к таким относятся течения, создаваемые кольцевыми батареями с достаточно большим числом скважин. В таблице I для сравнения приведены данные по размерам застойных зон для пятиточечной системы расстановки скважин. Здесь R' - радиус застойной зоны в малопроницаемой пропластке, L - сторона квадрата сетки.

2⁰. Рассмотрим случай (2.2) $\omega_* \ll a \lesssim \lambda$.

Теперь величиной λ нельзя пренебрегать, поэтому "опорным" будет решение задачи с предельным градиентом ($\omega_* = 0$).

Полагая $\omega_* = 0$, мы наибольшим образом искажаем решение в области малых скоростей ω порядка ω_* , т.е. решение задачи с предельным градиентом должно быть

"исправлено" в тонком пограничном слое, прилегающем к линии $\omega = 0$ плоскости годографа. Формальная процедура построения решения методом сращиваемых асимптотических разложений, которую подробно рассмотрим на примере течения в элементе пятиточечной системы расстановки скважин, состоит здесь в следующем:

Обозначим через $\Psi(\omega, \theta, \omega_*)$ искомое решение задачи и положим $\Psi(\omega, \theta, 0) = \Psi_0(\omega, \theta)$ - внешнее решение.

$\Psi_0(\omega, \theta)$ может быть эффективно построено методами [3].

Введем внутреннюю переменную $U = \frac{\omega}{\omega_*}$ и обозначим

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\omega_*}, \quad A = \frac{a}{\omega_*}. \quad (2.20)$$

В области $\omega < a$ решение задачи, записанное через внутреннюю переменную, имеет вид (2.7), (2.10), (2.11),

где нужно подставить

$$u = \frac{\omega}{\omega_*} \cdot \frac{\omega_*}{\lambda} = U \cdot \frac{\omega_*}{\lambda}, \quad s_k = 2k. \quad (2.21)$$

Учитывая неравенство $\frac{\omega_*}{\lambda} \ll 1$, выражение (2.11) можно упростить

$$A = \frac{(2k+1)!(2k)!}{(4k)!} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{\omega_*}{\lambda} + 1\right)^{2k} \frac{\omega_*}{\lambda} \left[2 \left(1 + \frac{\omega_*}{\lambda}\right) - 2k \frac{\omega_*}{\lambda} \right], \quad (2.22)$$

$$B = \frac{(2k+1)!(2k)!}{2(4k-1)!},$$

$$C = \frac{(2k+1)!(2k)!}{(4k)!} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{\omega_*}{\lambda}\right)^{+2k} \left[2 \left(1 + \frac{\omega_*}{\lambda}\right) + 4k^2 \frac{\omega_*}{\lambda} \right].$$

Окончательно для функций $P_k(u)$ во внутреннем решении

$$P_k(u) = C U^{2k} \left(\frac{\omega_*}{\lambda}\right)^{2k}, \quad U < 1,$$

$$P_k(u) = B U^2 \left(\frac{\omega_*}{\lambda}\right)^2 \mathcal{F}\left(2-2k, 2+2k, 3, -U \frac{\omega_*}{\lambda}\right) + \quad (2.23)$$

$$+ A \left(U \frac{\omega_*}{\lambda} + 1\right)^{-2k} \mathcal{F}\left(2k-1, 2k, 4k+1, \frac{1}{U \frac{\omega_*}{\lambda} + 1}\right), \quad U > 1.$$

Коэффициенты C_k в (2.7) подлежат определению из условия сопряжения с внешним решением задачи.

Найдем внутреннюю асимптотику внешнего решения. По общему правилу она представляет главный член разложения

$\Psi_0(\omega, \theta)$ при $\omega \rightarrow 0$. В случае фильтрации с предельным градиентом ее вид

$$\Psi_0(\omega, \theta) = A + B\theta + C(\theta)\omega^2 \quad (2.24)$$

A и B определяются видом граничного условия на линии $\omega = 0$ и здесь $A = B = 0$. Раскладывая $C(\theta)$ в ряд по синусам $\sin 2k\theta$, имеем

$$C(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^* \sin 2k\theta. \quad (2.25)$$

Внешняя асимптотика внутреннего решения

$$\Psi \approx \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{(2k+1)!(2k)!}{2(4k-1)!} U^2 \left(\frac{\omega_n}{\lambda}\right)^2 \sin 2k\theta. \quad (2.26)$$

Из условия сопряжения внешней и внутренней асимптотик

$$C_k = C_k^* \lambda^2 \frac{2(4k-1)!}{(2k)!(2k+1)!}. \quad (2.27)$$

Итак, составное разложение решения при малых ω_n задается следующим образом:

$$\Psi(\omega, \theta, \omega_n) = \begin{cases} \Psi_0(\omega, \theta), & \omega \gg \omega_n \\ \sum_{k=1}^{\infty} C_k \rho_k \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) \sin 2k\theta, & \omega \ll \min\{\alpha, \lambda\} \end{cases} \quad (2.28)$$

Коэффициенты C_k могут быть найдены из внешнего решения $\Psi_0(\omega, \theta)$ по формуле

$$\begin{aligned} C_k &= C_k^* \lambda^2 \int_0^{\pi/2} C(\theta) \sin 2k\theta d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi} \lambda^2 \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1}{\omega} \frac{\partial \Psi_0(\omega, \theta)}{\partial \omega} \right] \Big|_{\omega=0} \sin 2k\theta d\theta. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Граница застойной зоны определяется разложением (2.28)

как образ линии $\omega = \omega_n$.



Заметим, что координаты точек границы застойной зоны в задаче с предельным градиентом выражаются по (I.27), поэтому, дифференцируя (I.27) по θ , имеем

$$\frac{x'(\theta)}{\lambda \cos \theta} = \frac{y'(\theta)}{\lambda \sin \theta} = \chi(\theta). \quad (2.30)$$

Допустим, что граница застойной зоны допускает для задачи с предельным градиентом представление астроидой с уравнением

$$x = -l \cos^3 t, \quad y = l \sin^3 t, \quad t = \theta.$$

Тогда из (2.30)

$$\chi(\theta) = \frac{3l}{2\lambda} \sin 2\theta,$$

а для коэффициентов C_k из (2.29)

$$C_1 = \frac{3l}{\pi} \lambda \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{3l}{4} \lambda, \quad C_k = 0, \quad k > 1.$$

Применяя затем формулы для вычисления координат точек физической плоскости (0,7), находим, что при сделанных предположениях граница застойной зоны представляет собой дугу окружности с центром в точке K (рис.6) радиуса

$$R' = \frac{3}{2} l \frac{(1 + \frac{\omega_n}{\lambda}) \mathcal{F}(1, 2, 5, (1 + \frac{\omega_n}{\lambda})^{-1}) + \frac{\omega_n}{\lambda} \mathcal{F}(1, 3, 5, (1 + \frac{\omega_n}{\lambda})^{-1})}{\mathcal{F}(1, 2, 5, (1 + \frac{\omega_n}{\lambda})^{-1}) + \mathcal{F}(1, 3, 5, (1 + \frac{\omega_n}{\lambda})^{-1})}$$

Приведенная формула позволяет легко подсчитать размеры застойных зон в менее проницаемом пропластке, если известно решение соответствующей задачи фильтрации с предельным градиентом.

Поскольку анализ является асимптотическим для малых



ω_* интересно сопоставить полученные результаты с результатами прямого численного расчета течений в случае закона (0.3) /9/.

Результаты для радиуса застойной зоны в слоистом пласте приведены в таблице 2 в столбце 4, в столбце 5 даны значения $\frac{R'}{L}$, полученные в /9/ непосредственным счетом. Для приближения границы застойной зоны при течении с предельным градиентом в виде астроида использованы рассчитанные в /9/ границы застойных зон. В таблице 2 приведены результаты для разных интенсивностей потока. Очевидно, имеет место (столбцы 4 и 5) хорошее согласие численного и асимптотического расчета, поэтому изложенный метод может достаточно успешно применяться для определения размеров застойных зон в слоистых пластах по известным решениям задач фильтрации с предельным градиентом.

Тот же подход может быть применен и к другим схемам течений. Для кольцевой батареи шести скважин аналогично построенное составное разложение имеет вид

$$\Psi(\omega, \theta, \omega_*) = \begin{cases} \Psi_0(\omega, \theta), & \omega \gg \omega_* \\ \sum_{k=1}^{\infty} C_k P_k\left(\frac{\omega}{\omega_*}\right) \sin \frac{6}{5} k \theta, & \omega \ll \min\{a, \lambda\} \end{cases}$$

И в данном случае приходится искать приближенное представление для границы застойной зоны гипоциклоидой в случае течения с предельным градиентом. Результаты расчета размеров застойных зон R' для кольцевой батареи приведены в таблице 3.

Таблица 1.

ω_* \ a	Кольцевая батарея шести скважин $\frac{R'}{R}$		Пятиточечная система расстановки скважин $\frac{R'}{L}$	
	5	10	5	10
0,011	0,5	0,433	0,039	0,02
0,048	0,511	0,446	0,046	0,023
0,155	0,54	0,472	0,061	0,03
0,28	0,565	0,492	0,077	0,038

Таблица 2.

ω_* \ a	$\frac{R'}{L}$				
	0,1	0,25	0,5		1
I	2	3	4	5	6
0,011	0,566	0,344	0,238	0,252	0,161
0,048	0,534	0,401	0,278	0,298	0,176
0,155	0,71	0,533	0,37	0,39	0,234
0,28	0,893	0,67	0,465	0,454	0,294

Таблица 3.

ω_* \ a	$\frac{R'}{R}$			
	10	5	2	1
0,011	0,434	0,493	0,565	0,637
0,048	0,448	0,509	0,583	0,659
0,155	0,472	0,537	0,616	0,695
0,28	0,492	0,56	0,642	0,725

3°. Исследуем случай чрезвычайно малых интенсивностей потока (2.3) для элемента пятиточечной схемы.

Построим внешнее решение задачи, полагая в полной постановке $a = 0$. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть задачу в области $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$. Таким образом, решение внешней задачи должно удовлетворять уравнениям (2.4), если вместо u подставить ω , а условия (2.5) записать в виде

$$\Psi(\omega, 0) = 0, \quad \Psi\left(\omega, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{q}{8}, \quad \Psi(\infty, \theta) < \infty. \quad (2.31)$$

Общее решение задачи имеет в этом случае вид

$$\Psi = A + B\theta + \sum_{k=1}^{\infty} C_k R_k(\omega) \sin 4k\theta, \quad A = 0, \quad B = \frac{q}{2\pi}, \quad (2.32)$$

где $R_k(\omega)$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} \omega(\omega + \lambda) R_k'' + (\omega - \lambda) R_k' - 16\kappa^2 R_k &= 0, & \omega > \omega_*, \\ \omega^2 R_k'' + \omega R_k' - 16\kappa^2 R_k &= 0, & \omega < \omega_*, \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$R_k(\infty) = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega^{4k} R_k(\omega) = 1, \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} R_k(\omega_* - 0) &= R_k(\omega_* + 0), \\ \frac{\omega_* + \lambda}{\omega_*} R_k'(\omega_* + 0) &= R_k'(\omega_* - 0). \end{aligned}$$

Искомое решение записывается в виде

$$R_k = \mathcal{D}_k \omega^{4k} + \omega^{-4k}, \quad \omega < \omega_*, \quad (2.35)$$

$$R_k = A_k \left(\frac{\lambda}{\omega + \lambda} \right)^{4k} \mathcal{F} \left(4k-1, 4k, 1+8k, \frac{\lambda}{\omega + \lambda} \right), \quad \omega > \omega_*.$$

Учитывая условия (2.34), находим коэффициенты A_k , D_k . Коэффициенты C_k будут найдены из условий сопряжения с внутренним решением.

Для получения его возьмем в качестве основного масштаба скорости a и положим $U = \frac{\omega}{a}$, $\Lambda = \frac{\lambda}{a}$, $U_* = \frac{\omega_*}{a}$. Полагая при отыскании внутреннего решения $U_* \rightarrow \infty$, $\Lambda \rightarrow \infty$, получаем

$$U^2 \Psi_{UU} + U \Psi_{U\theta} + \Psi_{\theta\theta} = 0, \quad \begin{array}{l} 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < U < \infty, \end{array} \quad (2.36)$$

$$\Psi_0(U, 0) = \Psi_0\left(U, \frac{\pi}{2}\right) = \Psi_0(0, \theta) = 0,$$

$$\Psi_0\left(U, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{q}{8} (U > 1), \quad \Psi_0(\infty, \theta) < \infty.$$

Отсюда находим

$$\Psi = \text{Im } \omega(\omega), \quad \omega = U e^{-i\theta},$$

$$\omega(\omega) = \frac{q}{8\pi} \ln \frac{1 - \sqrt{\frac{\omega^4}{1 + \omega^4}}}{1 + \sqrt{\frac{\omega^4}{1 + \omega^4}}}.$$

Внешняя его асимптотика

$$\Psi_{ac} \approx \frac{q}{2\pi} \theta - \frac{q}{16\pi} \frac{a^4}{\omega^4} \sin 4\theta. \quad (2.37)$$

Внутренняя асимптотика внешнего решения в соответствии с (2.32), (2.35) имеет вид

$$\psi \approx \frac{q}{2\pi} \theta + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{1}{\omega^k} \sin 4k\theta. \quad (2.38)$$

Условия сраживания (2.37) и (2.38) дают

$$C_1 = -\frac{q}{16\pi} \alpha^4, \quad C_2 = C_3 = \dots = 0.$$

Таким образом, составное разложение решения выписывается в форме

$$\psi = \begin{cases} \frac{q}{8\pi} \operatorname{Im} \operatorname{erfc} \frac{1 - \sqrt{\frac{\omega^4}{1+\omega^4}}}{1 + \sqrt{\frac{\omega^4}{1+\omega^4}}}, & \omega \ll \omega_*, \\ \frac{q}{2\pi} \theta - \frac{q}{16\pi} \alpha^4 R_1 \sin 4\theta, & \omega \gg a. \end{cases}$$

Граница застойной зоны (образ линии $\omega = \omega_*$) получается в данном случае так же, как в приведенных выше

$$x = \frac{q}{2\pi\omega_*} (\cos \theta - 1) - \frac{q\alpha^4}{4\pi\omega_*^5} \left[\bar{\Phi} \left(\frac{\cos 3\theta}{3} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{\cos 5\theta}{5} - \frac{1}{5} \right) \right],$$

$$y = \frac{q}{2\pi\omega_*} \sin \theta + \frac{q\alpha^4}{4\pi\omega_*^5} \left[\bar{\Phi} \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} \right],$$

$$\bar{\Phi} = \frac{\mathcal{F} \left(3, 5, 9, \frac{\lambda}{\omega_* + \lambda} \right) - \mathcal{F} \left(3, 4, 9, \frac{\lambda}{\omega_* + \lambda} \right)}{\mathcal{F} \left(3, 5, 9, \frac{\lambda}{\omega_* + \lambda} \right) + \mathcal{F} \left(3, 4, 9, \frac{\lambda}{\omega_* + \lambda} \right)},$$

$$\alpha = 0.927 \frac{q}{\pi L}.$$



Расположение застойных зон, рассчитанное для параметров $\frac{a}{\lambda} = 0.1, 0.2$; $\frac{\omega_*}{\lambda} = \frac{1}{3}$ приведено на рис.8. В данном случае от застойных зон свободна лишь непосредственная окрестность скважин. Основная часть менее проницаемого пропластка занята застойной зоной.

Используя приведенное решение, можно получить и информацию о перепаде напора между нагнетательной и эксплуатационной скважинами. (Зависимость $\frac{\Delta H}{\lambda L \sqrt{2}}$ от $\frac{q}{\lambda L}$ представлена на рис.9)

Составное разложение для случая течения у кольцевой батареи n скважин имеет вид

$$\psi = \begin{cases} \frac{q}{2\pi} \operatorname{Im} \ln (z^n - R^n), & \omega \ll \omega_*, \\ \frac{q}{2\pi} \theta - \frac{n-1}{R} \left(\frac{q}{2\pi} \right)^2 R_1(\omega) \sin \theta, & \omega \gg a. \end{cases}$$

$$R_1 = \begin{cases} D_1 \omega + \frac{1}{\omega}, & \omega < \omega_*, \quad D_1 = 0, \\ A_1 \frac{\lambda}{\omega_* + \lambda}, & \omega > \omega_*, \quad A_1 = \frac{1}{\omega_*} \frac{\omega_* + \lambda}{\lambda}. \end{cases}$$

Зависимость a от интенсивности потока дается формулой (2.13). Границу застойной зоны определим по формулам

$$x = \frac{q}{2\pi \omega_*} (\cos \theta - 1) + \frac{n-1}{R} \left(\frac{q}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\omega_*^2} \sin^2 \theta,$$

$$y = \frac{q}{2\pi\omega_*} \sin \theta - \frac{n-1}{R} \left(\frac{q}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{\omega_*^2} \frac{\sin 2\theta}{2}$$

На рис. 10 приведено положение застойных зон для кольцевой батареи шести скважин для $\frac{a}{\lambda} = 0.1, 0.2$; $\frac{\omega_*}{\lambda} = 0.3$.

Таким образом, метод срачиваемых асимптотических разложений позволяет на основе имеющихся решений задач фильтрации с предельным градиентом и задач линейной фильтрации строить эффективные приближенные решения новых задач нелинейной теории фильтрации и более простые решения задач, исследованных другими способами.

Поступила 25.XI.1980

Институт проблем механики
АН СССР, Тбилисский
математический институт
им. А.М.Размадзе
АН ГССР

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А. Христианович. Движение грунтовых вод, не следующий закону Дарси. ПММ, 4, вып. I, 1940.
2. С.А. Чаплыгин. О газовых струях. М., 1949.
3. М.Г.Бернадинер, В.М.Ентов. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей, М., 1975.
4. В.М. Ентов. Двухмерные и нестационарные одномерные задачи движения неньютоновских жидкостей в пористой среде, М., "Нефтяное хозяйство", № 10, 1968.

V. Entov, T. Malakhova, M. Odisharia

APPLICATION OF THE METHOD OF JOINED ASYMPTOTIC EXPANSIONS TO THE SOLUTION OF NONLINEAR FILTRATION PROBLEMS

Summary

The paper deals with a number of problems of the nonlinear filtration theory for two laws of resistance: a law with the limiting gradient of pressure and a two-link law. Using the method of joined asymptotic expansions, the solutions of these problems are obtained. The diagrams and tables of physical characteristics of a flow are given.

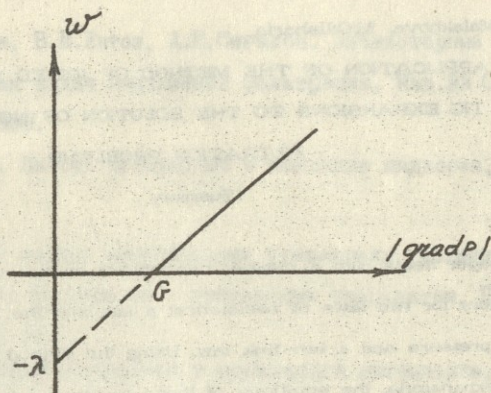


Рис. 1

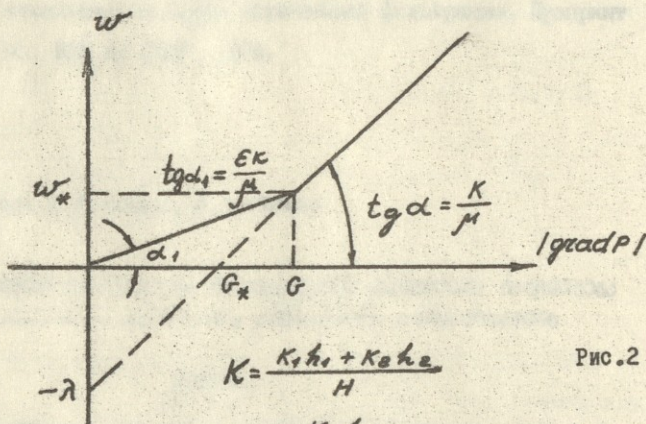


Рис. 2

$$K = \frac{K_1 h_1 + K_2 h_2}{H}$$

$$\varepsilon = \frac{K_1 h_1}{K_1 h_1 + K_2 h_2}$$

$$\lambda = \frac{K_2 h_2 G_2}{\mu H}, \quad H = h_1 + h_2$$

$$\omega_* = \frac{K_1 h_1 G_2}{\mu H}, \quad \frac{\omega_*}{\lambda} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

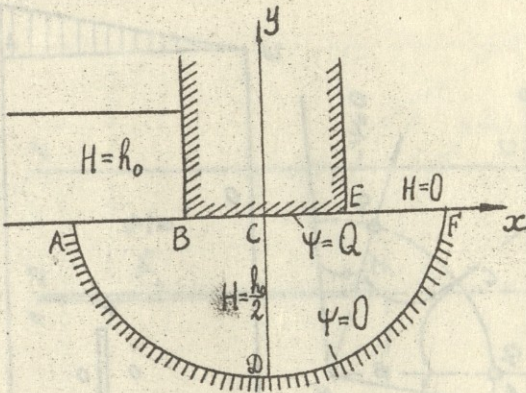


Рис. 3

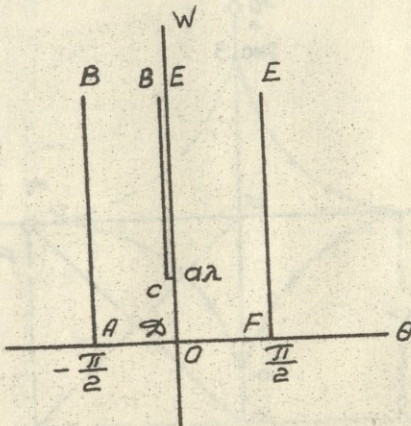


Рис. 4

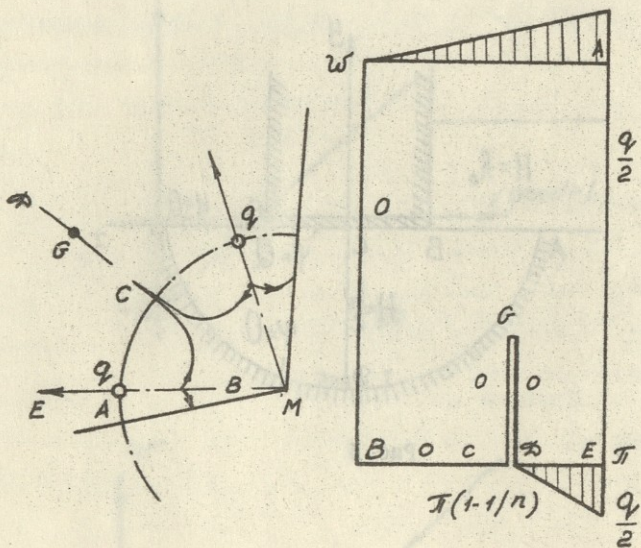


Рис.5

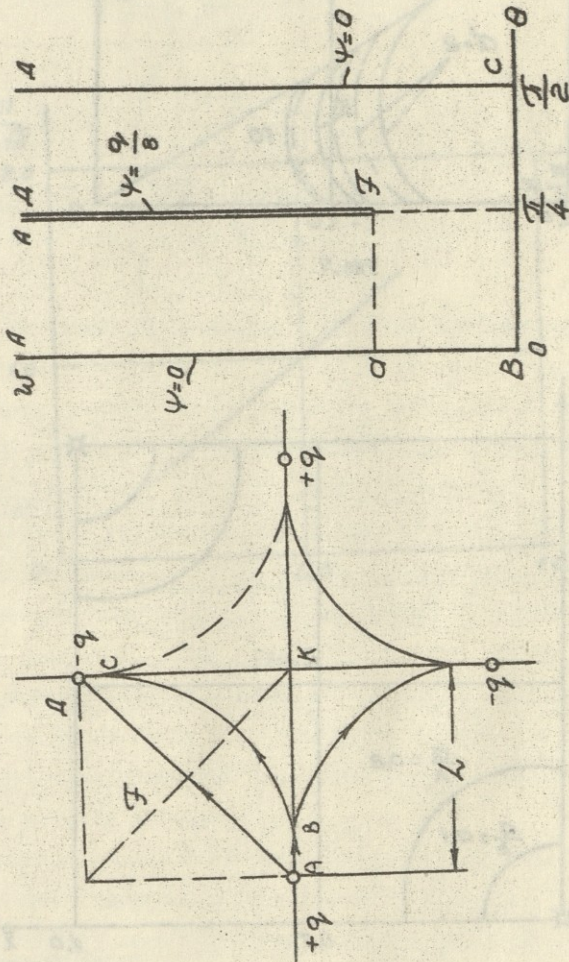


Рис. 6

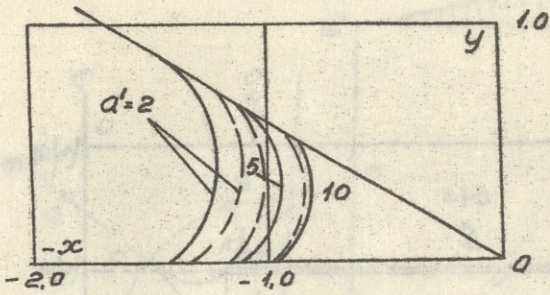


Рис.7

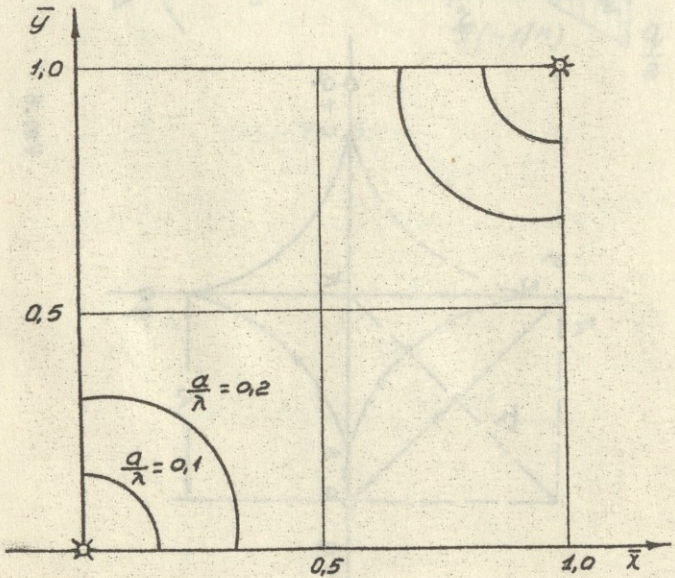


Рис.8

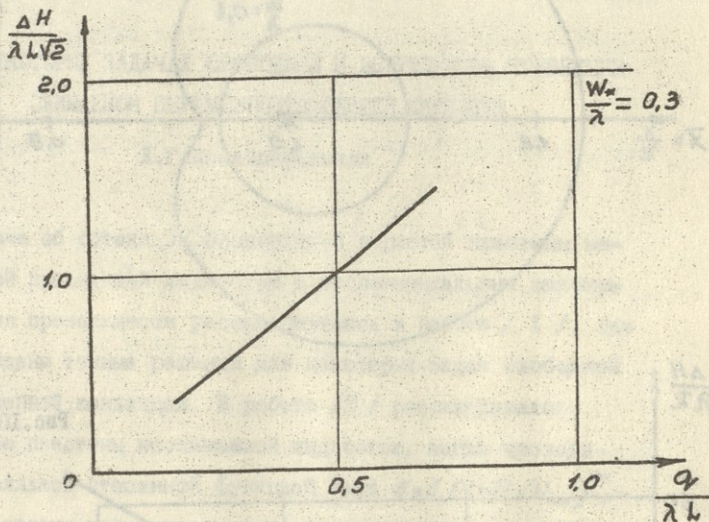


Рис.9

$\bar{y} = \frac{y}{R}$
04005020
20240101033

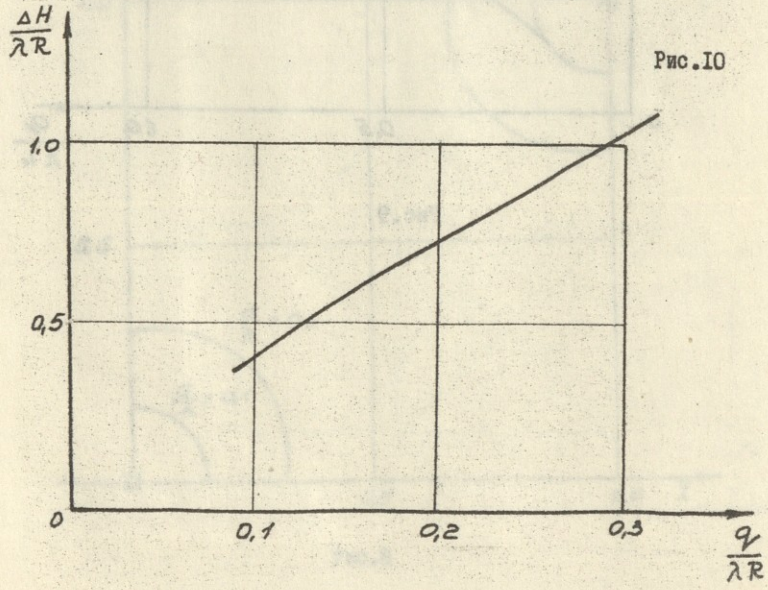
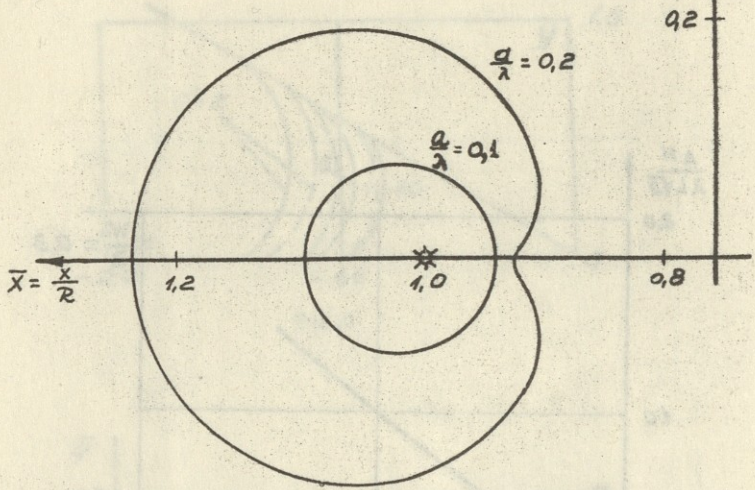


Рис. 10

УДК 583.4

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ СВОБОДНОЙ И ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ
СЖИМАЕМОЙ ПЕРЕМЕННОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Л.Г. Азмайпарашвили

Задача об обтекании бесконечной пористой пластины несжимаемой проводящей жидкостью с экспоненциальным законом изменения проводимости рассматривалась в работе / 1 /, где были найдены точные решения для некоторых задач свободной и вынужденной конвекции. В работе / 2 / рассматривалось обтекание пластины несжимаемой жидкостью, когда проводимость являлась степенной функцией вида $\sigma = \sigma_0 (1 - u/u_\infty)^m$. Решение задачи проводилось методом последовательных приближений. В настоящей работе предпринята попытка обобщить результаты вышеперечисленных работ для сжимаемой жидкости. В связи с этим рассмотрено несколько задач свободной и вынужденной конвекции сжимаемой жидкости с экспоненциальным и степенным законами проводимости.

I. Рассмотрим задачу о тепловой конвекции слабопроводящего газа около нагретой пористой теплопроводной пластины, совпадающей с осью OX, в присутствии постоянного магнитного поля \vec{B}_0 , перпендикулярного стенке, в прибли-



жении пограничного слоя, при выполнении следующих условий:

а) Скорость и градиенты скорости малы и все величины зависят только от y , следовательно, в уравнении теплопроводности можно пренебречь вязкой диссипацией и джоулевым теплом.

б) Закон вязкости примем линейным в виде

$$\mu = \nu \mu_0 \frac{T}{T_0},$$

где постоянная ν определяется из формулы Саттерленда

$$\nu = \left(\frac{T_w}{T_0} \right)^{1/2} \cdot \frac{T_0 + 110^\circ\text{K}}{T_w + 110^\circ\text{K}},$$

из которого непосредственно следует, что

$$\mu \rho = \mu_w \rho_w = \mu_\infty \rho_\infty = \text{const.}$$

в) Основным механизмом ионизации потока будем считать разность температур поверхности пластины и невозмущенной среды.

г) Задача рассматривается в безиндукционном приближении при отсутствии электрического поля. Число Прандтля принимается постоянным, т.е. $R_m \ll 1$, $\vec{E} = 0$,

$$P_n = \text{const.}$$

При вынужденной конвекции газа соответствующая система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \rho v &= \text{const}, \quad \rho T = \text{const}, \\ \rho v &= \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\mu \frac{du}{dy} \right) - \sigma B_0^2 u, \end{aligned} \quad (I)$$

$$\rho c_p v \frac{dT}{dy} = \frac{d}{dy} (\lambda \frac{dT}{dy}), \quad (2)$$

при $y=0$ $u=0$, $T=T_w$, $v=v_w$, (3)

при $y=\infty$ $u=u_\infty$, $T=T_\infty$.

Для решения уравнения (2) представим его в безразмерном виде, для чего введем новые переменные

$$\bar{y} = \frac{|v_w|}{v_w} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_w} dy, \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad (4)$$

получим

$$\frac{d^2 \theta}{d\bar{y}^2} + P_r \frac{d\theta}{d\bar{y}} = 0,$$

$$\theta \Big|_{\bar{y}=0} = 1, \quad \theta \Big|_{\bar{y}=\infty} = 0,$$

решение которого дает

$$\theta = \exp(-P_r \bar{y}).$$

На основании вышеуказанного, это решение можно использовать для построения модели σ , которая возникает за счет тепловой ионизации потока, т.е. предположим, что

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-P_r \bar{y}), \quad (5)$$

где

$$\sigma_0 = const.$$

Приведем уравнение движения (I) к безразмерному виду, для чего положим $u = u_\infty \cdot \bar{u}$, и воспользуемся соотношениями (3), (4), (5), будем иметь:



$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} + \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} - \mathcal{N} \left[\left(1 - \frac{T_{\infty}}{T_w}\right) \exp(-P_x \bar{y}) + \frac{T_{\infty}}{T_w} \right] \exp(-P_x \bar{y}) \bar{u} = 0 \quad (6)$$

и, наконец, переходя к переменному

$$\xi = \exp(-P_x \bar{y}),$$

получим уравнение типа Уиттекера:

$$\xi^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{1}{P_x}\right) \xi \frac{d\bar{u}}{d\xi} - \frac{\mathcal{N}}{P_x^2} \left[\left(1 - \frac{T_{\infty}}{T_w}\right) \xi^2 + \frac{T_{\infty}}{T_w} \xi \right] \bar{u} = 0 \quad (7)$$

где \mathcal{N} - число Стюарта.

Граничные условия (3) после соответствующего преобразования дают:

$$\bar{u} \Big|_{\xi=1} = 0, \quad \bar{u} \Big|_{\xi=0} = 1.$$

Как известно, в общем случае решение (7) будет иметь вид [3]:

$$\bar{u} = \xi^{1/2(P_x-1)} f \left(-\frac{\mathcal{N}^{1/2} \cdot \frac{T_{\infty}}{T_w}}{2P_x \left(1 - \frac{T_{\infty}}{T_w}\right)^2}, \frac{1}{P_x}, \frac{2}{P_x} \left[\mathcal{N} \left(1 - \frac{T_{\infty}}{T_w}\right) \right]^{1/2} \xi \right), \quad (8)$$

где

$$f(\kappa, \ell, x) = C_1 x^{1/2+\ell} \cdot e^{-1/2 x} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \ell - \kappa, 2\ell + 1, x\right) + C_2 x^{1/2-\ell} \cdot e^{-1/2 x} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \ell - \kappa, -2\ell + 1, x\right),$$

причем

$${}_1F_1(p, q, \eta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\dots(p+n-1)\eta^n}{q(q+1)\dots(q+n-1)n!}$$

- ряд Похгаммера.

Полученное точное решение (7) физически нелегко обозри-
мо. Для выяснения физической картины течения рассмотрим
два случая, когда удастся найти все физические характери-
стики в упрощенном виде.

1. Допустим, что выполнены условия:

$$\frac{N \left(\frac{T_{\infty}}{T_w} \right)^2}{(1 - P_x)^2 \left(1 - \frac{T_{\infty}}{T_w} \right)}, \quad P_x < 1, \quad (9)$$

тогда из (8) получим

$$\bar{u} = \frac{\exp(A\xi)}{\int_0^1 \xi^{1/P_x - 1} \exp(2A\xi) d\xi} \cdot \int_{\xi}^1 \exp(2A\xi) \xi^{1/P_x - 1} d\xi, \quad (10)$$

где

$$A = \frac{N \cdot \frac{T_{\infty}}{T_w}}{P_x - P_x^2} > 0.$$

Из (10) легко найти выражение для касательного напря-
жения на пластине, которое в первоначальных переменных бу-
дет иметь вид:

$$\tau_w = \rho_w / v_w / u_{\infty} P_x \frac{\exp A}{\int_0^1 \xi^{1/P_x - 1} \exp(2A\xi) d\xi}. \quad (11)$$

2. Во втором случае коэффициенты $N, \frac{T_{\infty}}{T_w}, P_x$

подчиним условию

$$\frac{N \cdot \left(\frac{T_{\infty}}{T_w} \right)^2}{(1 + P_x)^2 \left(1 - \frac{T_{\infty}}{T_w} \right)} = 1, \quad (12)$$

тогда

$$\bar{u} = \frac{-\xi^{1/P_n} \exp(B\xi) \int_{\xi}^1 \xi^{-(1/P_n+1)} \exp(-2B\xi) d\xi}{\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\xi^{1/P_n} \int_{\xi}^1 \xi^{-(1/P_n+1)} \exp(-2B\xi) d\xi \right]}$$

где

$$B = \frac{N \frac{T_{\infty}}{T_w}}{P_n + P_n^2}$$

из которого при $P_n = \frac{1}{n}$ получим

$$\tau_w = \rho_w / \nu_w / u_{\infty} \exp(-B). \quad (I3)$$

Если в (II) и (I3) перейти к пределам, когда $A \rightarrow 0$, $B \rightarrow 0$, из которых при соблюдении условий (9) и (I2) вытекает $N \rightarrow 0$, $T_{\infty}/T_w \rightarrow 1$, получим, что при изотермическом процессе без присутствия магнитного поля касательное напряжение выражается формулой

$$\tau_w = \rho_w / \nu_w / u_{\infty}. \quad (I4)$$

Выражение (I4) совпадает с выражением τ_w для непроводящего газа, полученным в работе /4/. Если $A \rightarrow \infty$, $B \rightarrow \infty$, т.е. при $N \rightarrow \infty$, $T_{\infty}/T_w \rightarrow 0$, получим, что при большом значении магнитогидродинамического параметра и значительных разностях температур $\tau_w \rightarrow 0$. Можно также показать, что $\frac{d\tau_w}{dA} < 0$ и $\frac{d\tau_w}{dB} < 0$, т.е. переход τ_w от значения $\rho_w / \nu_w / u_{\infty}$ к нулю происходит монотонно.

Пользуясь (II) и (I3), можно численно получить картину распределения трения на стенке при изменении N , $\frac{T_{\infty}}{T_w}$

в отдельности (см. табл. I). Из таблицы видно, что увеличение любого одного из параметров влечет за собой уменьшение трения на пластине.

2. Рассмотрим случай свободной конвекции газа. Пусть пластина направлена вертикально и находится в поле силы тяжести, тогда уравнение движения, соответствующее уравнению (7) будет иметь вид:

$$\xi^2 \frac{d^2 \bar{u}}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{1}{Pr}\right) \xi \frac{d\bar{u}}{d\xi} - \frac{N}{Pr^2} \left[\left(1 - \frac{T_\infty}{T_w}\right) \xi^2 + \frac{T_\infty}{T_w} \xi \right] \bar{u} = -Gr \xi \quad (15)$$

где Gr — число Грасгофа.

При этом граничными условиями будут:

$$\bar{u} \Big|_{\xi=1} = 0, \quad \bar{u} \Big|_{\xi=0} = 0. \quad (16)$$

Если воспользоваться вышенайденным частным решением $\varphi(\xi)$ уравнения (7), то, как известно, решение (15) можно построить в виде

$$\begin{aligned} \bar{u} = & C_1 \varphi + C_2 \varphi \int \xi^{(1/Pr-1)} \varphi^2 d\xi + \\ & + Gr \cdot \varphi \int \xi^{(1/Pr-1)} \varphi^2 \left(\int \xi^{-1/Pr} \cdot \varphi d\xi \right) d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

Выраженно (17) можно придать более простой вид, если потребовать выполнение условия (12) и принять, что $Pr = \frac{1}{n}$.

Тогда, принимая во внимание (15), получим



$$\bar{u} = \frac{Gx}{B} \exp(B\xi) \xi^{1/\kappa} \left[Ei(-B) - Ei(-2B) - Ei(-B\xi) + Ei(-2B\xi) \right]$$

где

$$Ei(\eta) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\eta^{\kappa}}{\kappa \cdot \kappa!}$$

Напряжение трения на стенке будет иметь вид

$$\tau_w = \rho_w / \nu_w / u_{\infty} Gx \cdot P_{\kappa} \frac{1 - \exp(-B)}{B} \quad (18)$$

Из (18) вытекает, что при $B \rightarrow 0$ $\tau_w \rightarrow \rho_w / \nu_w / u_{\infty} P_{\kappa} Gx$,
а при $B \rightarrow \infty$ τ_w монотонно стремится к нулю.

3. При малых чисел Стюарта \mathcal{N} решение уравнения (6) можно построить приближенно. Будем искать его решение в виде ряда

$$\bar{u} = u_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}^n \bar{u}_{n+1},$$

где

$$\bar{u}_1 \Big|_{\bar{y}} = 0, \quad \bar{u}_1 \Big|_{\bar{y}=\infty} = 1,$$

$$\bar{u}_n \Big|_{\bar{y}=0} = 0, \quad \bar{u}_n \Big|_{\bar{y}=\infty} = 0 \quad \text{при } n > 1.$$

Подставляя (19) в (6) и приравнивая друг другу члены, содержащие \mathcal{N} в одинаковых степенях, получим систему дифференциальных уравнений для определения \bar{u}_n , из которой можно найти \bar{u} в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} N^n \int_0^{\infty} \left[\left(1 - \frac{T_{\infty}}{T_w}\right) \exp(-2P_x \eta) + \frac{T_{\infty}}{T_w} \exp(-P_x \eta) \right] \bar{u}_n G(\bar{y}, \eta) d\eta, \quad (I9)$$

где G — функция Грина для оператора $\frac{d^2}{d\bar{y}^2} + \frac{d}{d\bar{y}}$,
имеющая вид:

$$G = \begin{cases} \exp(-\bar{y}) - 1, & \text{при } 0 \leq \bar{y} < \eta \\ (1 - \exp(\eta)) \exp(-\bar{y}), & \text{при } \eta < \bar{y} < \infty. \end{cases}$$

Ограничиваясь двумя членами ряда (I9), найдем выражение для τ_w в виде

$$\tau_w = \rho_w |v_w| U_{\infty} \left[1 - N \left(\frac{1 - \frac{T_{\infty}}{T_w}}{2P_x(2P_x+1)} + \frac{\frac{T_{\infty}}{T_w}}{P_x(P_x+1)} \right) \right]. \quad (20)$$

Если провести сравнение (20) с точным решением (I3), то можно показать, что в диапазоне $0 \leq N \leq 0,4$ при любых числах $P_x = \frac{1}{\pi}$, относительная погрешность изменится от 0% до 13%. Выражение (20) сохраняет все качественные свойства точного решения, более того, из него следует, что τ_w возрастает при увеличении числа P_x . Последний результат принципиально не удастся получить из точных решений (II) и (I3), при ограничениях (9) и (I2).

4. Рассмотрим задачу о вынужденной конвекции газа.

В отличие от постановки первой задачи в уравнении энергии не будем пренебрегать вкладом вязкой диссипации и джоулевым теплом, число Прандтля возьмем равным единице, а эмпирический закон проводимости примем в виде

$$\sigma = \sigma_0 \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right)^m.$$

Запишем для данной задачи систему уравнений в безразмерной форме, для чего, следуя [5], введем новые переменные:

$$u = \frac{c_\infty}{c_0} \bar{u}_\infty \cdot \bar{u}, \quad u_\infty = \frac{c_\infty}{c_0} \bar{u}_\infty, \quad v = \frac{b \rho_0 \rho_\infty c_\infty}{\rho_0 \rho_0 c_0} \bar{v},$$

$$S = \frac{c_p T + \frac{1}{2} u^2}{c_p T_0} - 1, \quad \bar{y} = \frac{|v_w| c_\infty}{v_0 \cdot c_0} \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0} dy,$$

$$c_0 = (\alpha - 1) c_p T_0, \quad c_\infty = (\alpha - 1) c_p T_\infty, \quad \kappa = \frac{\alpha}{1 - \alpha} Ma^2$$

Получим

$$\frac{d^2 \bar{u}}{d\bar{y}^2} + \frac{d\bar{u}}{d\bar{y}} = M \left[(1+S) - \frac{\kappa}{1+\kappa} \bar{u}^2 \right] (1-\bar{u})^m \bar{u}, \quad (21)$$

$$\frac{d^2 S}{d\bar{y}^2} + \frac{dS}{d\bar{y}} = 0, \quad (22)$$

где

$$M = \frac{(1+\kappa)^2 \rho_0 b B_0^2 v_0}{b \rho_\infty \rho_0 |v_w|^2},$$

а граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} \bar{u} = 0, \quad S = S_w, & \quad \text{при } \bar{y} = 0 \\ \bar{u} = 1, \quad S = 0, & \quad \text{при } \bar{y} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Подставляя в (2I) решение (22) $S = S_w \exp(-\bar{y})$, будем искать решение (2I) при малых M в виде

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^n \bar{u}_{n+1} \quad (23)$$

где

$$\bar{u}_1 \Big|_{\bar{y}=0} = 0, \quad \bar{u}_1 \Big|_{\bar{y}=\infty} = 1,$$

$$\bar{u}_n \Big|_{\bar{y}=0} = 0, \quad \bar{u}_n \Big|_{\bar{y}=\infty} = 0, \quad \text{при } n = 2, 3, \dots$$

Если подставить (23) в (2I) и поступить аналогично предыдущей задаче, будем иметь

$$\bar{u} = \bar{u}_1 + \sum_{n=1}^{\infty} M^n \int_0^{\infty} \left[1 + S_w \exp(-\bar{y}) - \frac{\kappa}{1+\kappa} \bar{u}_n^2 \right] (1 - \bar{u}_n)^m \bar{u}_n \cdot \quad (24)$$

Ограничиваясь двумя членами ряда (24), получим:

$$\begin{aligned} \bar{u} = & 1 - \exp(-\bar{y}) + M \left\{ \frac{1}{m(1-m)(\kappa+1)} \left[\exp(-\bar{y}) - \exp(-m\bar{y}) \right] - \right. \\ & - \frac{2\kappa-1}{m(m+1)(\kappa+1)} \cdot \left[\exp(-\bar{y}) - \exp\{-(m-1)\bar{y}\} \right] \times \\ & \times \left[\exp(-\bar{y}) - \exp\{-(m+2)\bar{y}\} \right] - \frac{\kappa}{(\kappa+1)(m+2)(m+3)} \times \\ & \times \left[\exp(-\bar{y}) - \exp\{-(m+3)\bar{y}\} \right] - \frac{S_w}{(m+1)m} \times \\ & \times \left[\exp(-\bar{y}) - \exp\{-(m+1)\bar{y}\} \right] + \frac{S_w}{(m+2)(m+1)} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[\exp(-\bar{y}) - \exp\{-(m+2)\bar{y}\} \right] \Bigg\},$$

$$\tau_w = \nu \rho_0 U_\infty |U_w| \left(\frac{T_\infty}{T_0} \right)^{\frac{2x-1}{2-1}} \cdot \left\{ 1 - M \left[\frac{1}{m(m+1)} - \frac{6\kappa}{m(m+1)(m+2)(m+3)(\kappa+1)} - \frac{S_w}{(m+1)(m+2)} \right] \right\}. \quad (25)$$

Из (25) следует, что τ_w уменьшается при увеличении безразмерной энтальпии S_w .

Из (25) также следует, что чем больше m , т.е. чем резче падает проводимость среды до нуля, тем меньше влияет магнитное поле на уменьшение трения.

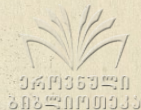
Поступила 15.X.1980

Кафедра
механики сплошных сред

ЛИТЕРАТУРА

1. З.А. Кереселидзе, Д.В. Шарикадзе. Сообщ. АН СССР, 78, I, 1975.
2. Д.В. Шарикадзе. Магнитная гидродинамика, 4, 1968.
3. Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1971.
4. A.D. Young. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1, 1948.
5. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя, М., 1969.

Таблица I



P_x	T_{∞}/T_w	N	$\tau_w/\rho_w \nu_w u_{\infty}$	P_x	T_{∞}/T_w	N	$\tau_w/\rho_w \nu_w u_{\infty}$
0,5	0,1	22,5	0,00I	0,33	0,1	40,0	0,000000I
"	0,1	202,5	0,0000	"	0,1	160,0	0,0000
"	0,2	4,0	0,084	"	0,2	8,888	0,00I7
"	0,2	45,0	0,000006	"	0,2	35,55	0,00000I
"	0,3	I,825	0,292I	"	0,3	3,244	0,0295
"	0,3	I6,425	0,00I0	"	0,3	I2,977	0,000I
"	0,4	0,937	0,50I8	"	0,4	I,666	0,I494
"	0,4	8,437	0,0III	"	0,4	6,666	0,0024
"	0,5	0,5	0,6480	"	0,5	0,888	0,3633
"	0,5	4,5	0,0497	"	0,5	3,555	0,0I83
"	0,9	0,027	0,9606	"	0,9	0,053	0,9204
"	0,9	0,27	0,7I89	"	0,9	0,2I3	0,6440
"	I,0	0	I,0	"	I,0	0	I,0
"	0,7320	0,I25	0,8725	"	0,89	0,055	0,9305
"	0,9498	0,I25	0,8535	"	0,97	0,055	0,8869
"	0,6I80	0,25	0,78I9	"	0,82	0,III	0,8033
"	0,9083	0,25	0,7387	"	0,94	0,III	0,7897
"	0,3582	I,25	0,4I09	"	0,58	0,555	0,435I
"	0,7I55	I,25	0,3034	"	0,80	0,555	0,3678
"	0,20	5,0	0,0732	"	0,35	2,222	0,0929
"	0,4825	5,0	0,040	"	0,58	2,222	0,0550
"	0,I0	22,5	0,00II	"	0,I9	I0,0	0,00II
"	0,220	22,5	0,0003	"	0,34	I0,0	0,0004



რ. აზმაიპარაშვილი

ვაკუუმისა და სიმკვრივედამკვრივე სითხის თავისუფალი
და იძულებითი კონვექციის ამოხსნის
შესახებ

რეზიუმე

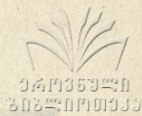
შესწავლილია უსასრულო ფორმის ფრთხილის კუბიკური სი-
ბით გასრულების რადიურნიმი ამოცანა, როდესაც სითხის გამტარუნარი-
ობა დამოკიდებულია ელემენტარული და ხარისხობრივი კონვექციის, მაგ-
ნიტური ველის თანხლებიანად. ნაპოვინია ამ ამოცანების რადიურნიმი
მუსონი და მიხედვითად ამოხსნა, შესწავლილია მაგნიტური ველის,
ფორმირებადობის სხვაობის, კონვექციის რეგულაციის და ვაკუუმისა და
რადიურნიმი მიქსურად ნაკადის პარამეტრები.

L. Azmaiparashvili

ON SOME PROBLEMS OF THE FREE AND FORCED OF
CONVECTION A COMPRESSIBLE VARIABLY-CON-
DUCTIVE

Summary

Several problems of flow around an infinite porous plate by a
compressible variably-conductive fluid in the presence of a magnetic
field are investigated, Several exact and approximate solutions of the
problems are obtained.



218, 1981

УДК 517.838

ФРЕДГОЛЬМОВСКИЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА И ВЕТВЛЕНИЕ
РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Г.Н. Химшиашвили

I. В работе исследуется вопрос о существовании и числе ветвей решений нелинейного уравнения, содержащего параметра

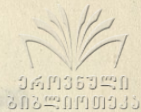
$$f(x, \lambda) = 0, \quad (I)$$

где $f: E \times K^m \rightarrow F$ - фредгольмовский аналитический оператор с $f(0, 0) = 0$, а E и F - банаховы пространства над полем K вещественных или комплексных чисел. Фредгольмовские операторы являются естественным и общепринятым объектом теории ветвления / 1 /, поскольку с их помощью формулируются многие важные задачи, например, из теории сингулярных интегральных уравнений / 2 /.

Ветвление решений уравнения (I) тесно связано со строением соответствующего фредгольмовского аналитического мно-

жества (фр.а.м.) / 3 /, для изучения которого ниже привлекаются некоторые понятия алгебраической геометрии. Такой подход позволяет получать информацию о количестве решений в терминах эффективно вычислимых алгебраических инвариантов типа хорошо известной в конечномерной ситуации кратности изолированного прообраза /4/, /5/. При этом в самостоятельную задачу выделяется исследование локальной структуры фр, а.м., проводимое во втором пункте работы посредством техники банаховых аналитических пространств, развитой А.Дуади / 6 /. Как следствие здесь же доказана одна теорема о неподвижной точке.

В последнем разделе определяются необходимые алгебраические понятия и приводятся основные результаты. Для комплексного оператора ответ дает теорема 4, полученная в /5/. Теорема 5 представляет собой бесконечномерное обобщение алгебраической формулы для локальной топологической степени / 7 /, /8 / и дает оценку для числа ветвей в вещественном случае. В теоремах 6 и 7 рассматриваются не изучавшиеся ранее с этой точки зрения операторы положительного индекса. Отметим, что вторая из них дает частичный ответ на вопрос Д.Айзенбуда (/ 8 /, стр.763) об аналогах упомянутой формулы для топологической степени в случае неравных раз-



мерностей.

Излагаемые ниже результаты уже использовались в ряде конкретных задач теории ветвления /5/, /9/ и недавно нашли некоторые новые применения, в том числе к нелинейным сингулярным интегральным уравнениям, составляющие предмет отдельной работы.

Переходя к основному тексту, отметим еще, что условие аналитичности операторов не является необходимым и допускает замену требованием конечной гладкости в вещественном случае при дополнительном, но не слишком ограничительном предположении достаточности соответствующих струй.

2. В этом разделе K будет полем комплексных чисел \mathbb{C} .

Пусть E, F, G - комплексные банаховы пространства, U, V - открытые подмножества в E и F , соответственно. Через $H(U, V)$ обозначим комплексное векторное пространство аналитических отображений из U в V . Через $L(E, F)$ будет обозначаться пространство линейных операторов из E в F с топологией нормы. Имеется естественное билинейное отображение $\alpha(F, G): L(F, G) \times F \rightarrow G$, $\alpha(F, G)(\varphi, x) = \varphi(x)$, где $\varphi \in L(F, G)$, $x \in F$. Для $f \in H(U, F)$ и $g \in H(U, L(F, G))$ положим $(g(f))(x) = \alpha(F, G)(g(x), f(x))$, тогда, очевидно, $g(f) \in H(U, G)$.



Обозначим через $\mathcal{N}(f, G)$ подпространство в $H(U, G)$, состоящее из отображений вида $g(f)$ с $g \in H(U, L(F, G))$.

Пусть $f: U \rightarrow F$ - аналитическое отображение и $X = f^{-1}(0)$. Как и в конечномерном случае, X называется аналитическим подмножеством в U . Следуя работе / 6 /, мы наделим X некоторым функтором - аналогом структурного пучка обычных аналитических множеств / 5 /, / 4 /.

Для произвольного банахова пространства G определим предпучок на U следующим равенством, где U' открыто в U :

$$\Psi(U', G) = H(U', G) / \mathcal{N}(f|_{U'}, G). \quad (2)$$

Пучок, порожденный этим предпучком / 6 /, имеет носитель X . Обозначим через $\Phi(G)$ этот пучок, ограниченный на X . Каждому сечению пучка $\Phi(G)$ над открытым подмножеством $V \subset X$ соответствует непрерывное отображение из V в G , которое мы будем называть несущим. Если V - открытое подмножество G , то через $\Phi(V)$ мы обозначим подпучок множеств в $\Phi(G)$, сечениями которого являются те и только те сечения пучка $\Phi(G)$, несущие отображения которых действуют в V . В цитируемой работе / 6 / доказано, что с аналитическим отображением $f: V \rightarrow V'$ естественным образом ассоциируется морфизм пучков множеств

$\mathfrak{h}: \Phi(V) \rightarrow \Phi(V')$ (п. I, §3, лемма I), так что соответствие $V \rightarrow \Phi(V)$ становится ковариантным функтором из категории открытых подмножеств банаховых пространств и аналитических отображений в категорию пучков множеств на X .

Определение 1/6/. Топологическое пространство X , снабженное построенным функтором Φ , называется модельным банаховым аналитическим пространством, определенным тройкой (U, F, f) , и обозначается $\mathfrak{X}(U, F, f)$, или сокращенно $\mathfrak{X}(f)$.

Множество X называют подстилающим пространством, а пучок $\Phi(\mathcal{C})$ - его структурным пучком. Очевидно, что $\Phi(\mathcal{C})$ -пучок локальных \mathcal{C} -алгебр / 4 /, и для конечномерной модели, т.е. при $\dim U < \infty$, он полностью определяет весь функтор Φ .

Определение 2/6/. Пусть $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}(U_i, F_i, f_i)$, $i=1,2$, - модельные банаховы аналитические пространства. Аналитическое отображение $g: U_1 \rightarrow U_2$ называется допустимым относительно пары $(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2)$, если выполняются следующие два условия:

(a) $g(X_1) \subset X_2$;

(б) для любого $x \in X_1$ и для любого банахова пространства G существует такая фундаментальная система окрестностей точки $g(x)$, что для любой из них, например W ,

существует такая окрестность $U \subset g^{-1}(W) = V$ точки x ,
 что $s_U^V g^*(\mathcal{N}(f_2|W, G)) \subset \mathcal{N}(f_1|U, G)$, где $s_U^V: H(V, G) \rightarrow H(U, G)$
 - отображение сужения и $g^*: H(W, G) \rightarrow H(V, G)$, $g^*(\varphi) = \varphi(g)$.

С каждым допустимым отображением g можно каноническим образом связать пару $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$, где $\varphi_0 = g|_{X_1}: X_1 \rightarrow X_2$ - непрерывное отображение, а $\varphi_1: \varphi_0^* \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ - морфизм функторов. Здесь φ_0^* - функтор обратного образа при φ_0 из категории пучков на X_2 в категорию пучков на X_1 , а φ_1 строится естественным и стандартным образом / 6 /.

Определение 3/6/. Морфизмом из $\mathcal{X}(U_1, F_1, f_1)$ в $\mathcal{X}(U_2, F_2, f_2)$ называется пара $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1)$, порожденная некоторым $(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ - допустимым отображением $g: U_1 \rightarrow U_2$.

Напомним, что дифференцируемое нелинейное отображение $f: U \rightarrow V$, $U \subset E$, $V \subset F$ называется фредгольмовым, если для любого $x \in U$ производная $f'(x) \in L(E, F)$ есть фредгольмовский линейный оператор, то есть его образ замкнут, а ядро и коядро конечномерны / 1 /. Если U - связное множество, то можно корректно определить индекс нелинейного фредгольмовского отображения f равенством

$$\text{ind } f = \dim \ker f'(x) - \dim \text{coker } f'(x), \quad (3)$$

где x - произвольная точка U / 1 /.

Определение 4. Фредгольмовским аналитическим множеством (фр. а.м.) называется модельное банахово аналитическое пространство, $\mathfrak{X}(U, F, f)$, порожденное фредгольмовским отображением f .

Замечание I. В работе / 3 / фр. а.м. рассматривается без существующей на нем структуры модельного аналитического пространства, поэтому следующая теорема усиливает аналогичный результат из / 3 /.

Теорема I. Пусть $f: U \rightarrow V$ - аналитическое фредгольмовское отображение. Тогда в окрестности любой своей точки соответствующее фр. а.м. изоморфно конечномерному модельному аналитическому пространству.

Доказательство. Применяя, если необходимо, подходящие линейные преобразования объемлющих пространств E и F , мы можем без ограничения общности считать, что $\text{ind } f = 0$ и рассматриваемая точка есть начало пространства E .

Обозначим через \mathcal{A} линейный оператор $f'(0) \in L(E, F)$, тогда в силу фредгольмовости \mathcal{A} можно построить разложения

$E = E_1 \times E_2$, $F = F_1 \times F_2$, где $E_1 = \ker \mathcal{A}$, $E_2 \cong \text{coim } \mathcal{A}$, $F_1 \cong \text{coker } \mathcal{A}$, $F_2 = \text{im } \mathcal{A}$, причем $E_1 \cong \mathbb{C}^n$, $F_1 \cong \mathbb{C}^n$, где $n = \dim \ker \mathcal{A} = \dim \text{coker } \mathcal{A}$. Обозначим через $p_k: E \rightarrow E_k$,

$q_k: F \rightarrow F_k$, $k=1, 2$, естественные проекции и через

$j: F_1 \rightarrow F$ - естественное вложение. Определим $\varphi: U \rightarrow E_1 \times E_2$ равенством $\varphi(x) = (p_1(x), q_2 f(x))$ и вычислим $\varphi'(0)$. Получаем

$$\varphi'(0) = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & q_2 f'(0)|_{E_2} \end{pmatrix},$$

где блочная структура оператора отвечает построенному разложению $E \cong E_1 \times F_2$. Поскольку по построению $\mathcal{A}|_{E_2}: E_2 \rightarrow F_2$ - изоморфизм, заключаем, что $\varphi'(0)$ является линейным изоморфизмом. По теореме об обратной функции для аналитических отображений / 1 /, / 2 / существует такая окрестность нуля $U' \subset U$, что φ является бигоморфизмом U' на $\bar{U} = \varphi(U') \subset E_1 \times F_2$. Пусть $\psi: \bar{U} \rightarrow U'$ - обратное отображение к φ . Заметим, что если $x = (u, v) \in \bar{U}$, то $\varphi(x) = (u, w) \in U'$ и $q_2 f(u, w) = v$, то есть $q_2 f \varphi(u, v) = v$. Положим $\bar{f} = f \psi: \bar{U} \rightarrow F$, тогда из предыдущей строчки вытекает, что

$$\bar{f}(u, v) = f \psi(u, v) = (q_1 f \psi(u, v), q_2 f \psi(u, v)) = (q_1 f \psi(u, v), v) \quad (4)$$

Обозначим через $i = id \times 0: E_1 \rightarrow E_1 \times F_2$ естественное вложение $i(u) = (u, 0)$. Пусть $\kappa: \bar{U} \rightarrow E_1 \times \{0\}$ - проекция на первый сомножитель, суженная на \bar{U} . Положим $\tilde{U} = i^{-1} \kappa(\bar{U})$ - это, очевидно, окрестность нуля в E_1 , такая, что $i(\tilde{U}) = \kappa(\bar{U}) = \bar{U} \cap (E_1 \times \{0\})$. Поскольку i отображает \tilde{U}



на $\kappa(\bar{U})$ изоморфно, возникает отображение $s = i^{-1}\kappa: \bar{U} \rightarrow \bar{U}$.

Определим отображение $\tilde{f}: \tilde{U} \rightarrow F_1$ равенством

$$\tilde{f} = q_1 \circ f \circ \psi i. \quad (5)$$

Это отображение естественно назвать отображением разветвления для f (ср./I/, § 23). Введем в рассмотрение три модельных банаховых пространства $X = X(U, F, f)$, $\bar{X} = X(\bar{U}, F, f)$, $\tilde{X} = X(\tilde{U}, F_1, \tilde{f})$. Последнее из них и есть то конечномерное

аналитическое множество, которому изоморфно наше фр.а.м. вблизи нуля. Из предыдущих построений легко вытекает коммутативность следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} X \subset U & \xrightarrow{f} & F \\ \psi \uparrow \downarrow \psi & & \parallel \\ \bar{X} \subset \bar{U} & \xrightarrow{\bar{f}} & F \\ i \uparrow & & j \uparrow \downarrow q_1 \\ \tilde{X} \subset \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}} & F_1 \end{array} \quad (6)$$

Из ее верхнего квадрата немедленно заключаем, что $\bar{X} \cong \bar{X}$, и остается показать, что $\bar{X} \cong \tilde{X}$. Для этого мы покажем, что отображения i и s являются допустимыми и порождают взаимно обратные изоморфизмы между \bar{X} и \tilde{X} . Сделаем это в три шага.

Шаг I. Отображение i допустимо.

Прежде всего, покажем, что $i(X) = \bar{X}$. Действительно, если $u \in \tilde{U}$ и $\tilde{f}(u) = 0$, то в силу коммутативности нижнего



квадрата (6) $\bar{f}i(u) = j\bar{f}(u) = 0$, то есть $i(u) \in \bar{X}$.

Обратно, если $x = (u, v) \in \bar{X}$, то $\bar{f}(u, v) = 0$, откуда согласно (4) получаем, что $v = 0$ и $q_1 f \psi(u, 0) = 0$, то есть $q_1 f \psi i(u) = 0$. Таким образом, $x = i(u)$ и $\bar{f}(u) = 0$, то есть $x \in i(\bar{X})$.

Проверим теперь условие (б) определения 2. Очевидно, достаточно доказать, что для любого $u \in \tilde{U}$, любого пространства G , любой окрестности V точки $i(u)$ и любого $h \in \mathcal{N}(\bar{f}|V, G)$ имеем $i^*(h) \in \mathcal{N}(\bar{f}|\tilde{V}, G)$, где $\tilde{V} = i^{-1}(V)$. По условию $h(x) = g(x)(\bar{f}(x))$ на V , где $g \in \mathcal{H}(V, L(F, G))$. Отсюда $i^*(h)(u) = h(i(u)) = g(i(u))(\bar{f}(i(u))) = g(i(u))(j\bar{f}(u)) = g_1(u)(\bar{f}(u)) = g_1(f)(u)$, где $g_1: \tilde{V} \rightarrow L(F, G)$, $g_1(u) = g(i(u))j(u)$. Таким образом, $i^*(h) \in \mathcal{N}(\bar{f}|\tilde{V}, G)$, что и требовалось.

Шаг 2. Отображение s допустимо.

Ввиду того, что s является обратным к i на $i(\tilde{U})$, из доказанного равенства $i(\bar{X}) = \bar{X}$ следует, что и $s(\bar{X}) = \bar{X}$.

Для проверки условия (б) выберем $x_0 = (u_0, 0) \in \bar{X}$, шар V в \tilde{U} с центром в $s(x_0)$ и произвольное $g \in \mathcal{N}(\bar{f}|V, G)$ и покажем, что $s^*(g) \in \mathcal{N}(\bar{f}|\tilde{V}, G)$, где V - некоторый шар с центром в x_0 , лежащий в $s^{-1}(\tilde{V})$. По условию $g(u) = h(u)(\bar{f}(u))$ на V . Отсюда для $x \in \tilde{V}$ получаем

$$\begin{aligned} s^*(g)(x) &= g(s(x)) = \\ &= h(s(x))(\bar{f}(s(x))) = h(s(x))(q_1 \bar{f}(i(x))), \end{aligned} \quad (7)$$



поскольку $\alpha(x) = i(s(x))$ и $\tilde{f} = q_1 \bar{f} i$ по определению \tilde{f}

Применяя в \bar{V} к отображению \bar{f} формулу Ньютона-Лейбница по второму аргументу, получаем:

$$\bar{f}(u, v) - \bar{f}(u, 0) = \int_0^1 \mathcal{D}_2 \bar{f}(u, tv) v dt, \quad (8)$$

где $\mathcal{D}_2 \bar{f}$ обозначает частную производную по второму аргументу. Другими словами, $\bar{f}(x) - \bar{f}(\alpha(x)) = \rho(x) (\mathcal{N}(x))$, где

$\rho \in H(\bar{V}, L(F_2, F))$, а $\mathcal{N}: \bar{U} \rightarrow F_2$ - проекция на второй сомножитель, суженная на \bar{U} . Вспомяная, что согласно (4)

$q_2 \bar{f}(x) = \mathcal{N}(x)$, получаем, что $\bar{f}(x) - \bar{f}(\alpha(x)) = \rho(x) (q_2 \bar{f}(x))$,

откуда $\bar{f}(\alpha(x)) = (id - \rho(x) q_2) \bar{f}(x)$. Подставляя последнее равенство в (7), получаем окончательно, что

$$s^*(g)(x) = h(s(x)) (q_1 (id - \rho(x) q_2)) (\bar{f}(x)) = h_1(x) \bar{f}(x),$$

где $h_1 \in H(\bar{V}, L(F, G))$, $h_1(x) = h(s(x)) q_1 (id - \rho(x) q_2)$,

а это и означает, что $s^*(g) \in \mathcal{N}(\bar{f} | \bar{V}, G)$.

Итак, i и s , будучи допустимыми отображениями, порождают морфизмы $\gamma: \tilde{X} \rightarrow \bar{X}$ и $\delta: \bar{X} \rightarrow \tilde{X}$, соответственно. Заметим, что $\delta\gamma = id$, поскольку $si = id$. Остается третий шаг.

Шаг 3. Отображение is порождает тождественный морфизм.

Выбрав $x_0 \in \bar{X}$, $V \ni x_0$ и $g \in H(V, G)$, достаточно показать, что $g(is)^* g \in \mathcal{N}(\bar{f} | V, G)$. Очевидно, $(g(is)^* g)(x) = g(x) - g(\alpha(x))$.



Пусть $x = (u, v) \in V$, тогда $\gamma(x) = (u, 0) \in V$ и аналогично (8) получаем

$$g(u, v) - g(u, 0) = \int_0^1 \mathcal{D}_2 g(u, tv) v dt, \quad (9)$$

откуда $g(x) - g(\gamma(x)) = q(x)(\pi(x))$, где $q \in H(V, L(F_2, G))$.

Отсюда уже ясно, что $g(x) - g(\gamma(x)) = (h(\bar{f}))(x)$, где $h \in H(V, L(F, G))$, $h(x) = q(x)q_x$, а это как раз и означает, что $g - (is)^*g \in N(\bar{f}|V, G)$.

Теорема I полностью доказана.

Замечание 2. Эта теорема является ключевой для всех последующих результатов, большинство из которых получается с помощью соответствующих модификаций и надстроек процесса, использованного в ее доказательстве. Отметим также ее тесную связь с классическим методом А.М.Ляпунова - Э.Шмидта / I /.

Следствие I. Компактное фр. а. м. конечно.

Выводится так же, как лемма 2 из леммы I в работе / 3 /

Следствие 2. Прообраз любой точки при собственном аналитическом фредгольмовском отображении конечен.

Действительно, такой прообраз является компактным фр. а.м.

Теорема 2. Пусть U - ограниченное связное открытое подмножество сепарабельного комплексного банахова простран-

ства и $f: \bar{U} \rightarrow U$ — аналитическое отображение. Если замыкание образа $f(U)$ компактно, то у f существует единственная неподвижная точка в U .

Доказательство. Сформулируем необходимое нам утверждение о последовательностях аналитических отображений, хорошо известное в бесконечномерном анализе.

Лемма. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность аналитических отображений ограниченной области U в сепарабельном банаховом пространстве в компактное множество $T \subset U$. Тогда существует поточечно сходящаяся в U подпоследовательность, предел которой также является аналитическим отображением U в T .

Положим теперь $f_n = f^n$. Тогда, пользуясь леммой, можно построить такую последовательность натуральных чисел n_k , что последовательности $\{f_{n_k}\}$ и $\{f_{n_{k+1}} - n_k\}$ обе сходятся в U , и их пределами F' и F'' являются аналитические отображения. Из тождества $f_{n_{k+1}} = f_{n_{k+1} - n_k} f_{n_k}$ получаем переходом к пределу, что $F' = F'' F'$. Поэтому

$$F'(U) \subset S = \{x \in U, x = F''(x)\} \quad . \text{Заметим, что}$$

$S \subset \overline{f(U)}$ является фр. а.м., поскольку представляет собой множество нулей отображения $id - F''$, которое будет фредгольмовским как компактное возмущение тождественно-



ного / I /. Согласно следствию I S' конечно. Далее, $F'(U)$, являясь непрерывным образом связного множества U , должно быть связным и, содержась при этом в конечном множестве S , вынуждено состоять из единственной точки x_0 . Очевидно, что f коммутирует с F' , поэтому $f(x_0) = f(F'(x_0)) = F'(f(x_0)) = x_0$, следовательно, x_0 - неподвижная точка отображения f . Если y - другая неподвижная точка для f в U , то для любого $n: f^n(y) = y$, откуда $F'(y) = y$, значит $y = x_0$. Теорема доказана.

Замечание 3. В отличие от известной теоремы Д. Шаудера / I / мы не требовали выпуклости области U . Ценой небольшого усложнения доказательства можно избавиться и от требования сепарабельности.

3. Пусть теперь поле K - любое из двух рассматриваемых, а $f: U \rightarrow F$ - аналитическое фредгольмовское отображение, заданное в окрестности нуля банахова пространства E над полем K и $f(0) = 0$.

Определение 5/5/. Локальным кольцом отображения f в точке нуль называется $\mathcal{A}_0(f) = (\mathcal{O}(\mathcal{C}))_0$ - слой структурного пучка фр. а.м. $\mathcal{X}(U, F, f)$ в нуле, рассматриваемый как K -алгебра /4/. Размерность $m_0(f)$ кольца $\mathcal{A}_0(f)$ как векторного пространства над полем K называется локаль-

ной кратностью отображения f в точке нуль.

Теорема 3/5/. Если f - комплексно-аналитическое фредгольмовское отображение индекса нуль, и нуль является изолированным решением уравнения $f(x)=0$, то кратность $m_0(f)$ конечна.

Доказательство. В процессе доказательства теоремы I был установлен изоморфизм $\tilde{x} \cong \tilde{\tilde{x}}$ (мы сохраняем прежние обозначения), откуда, в частности, вытекает, что $m_0(f) = m_0(\tilde{f})$, причем условие изолированности нуля сохраняется и для \tilde{f} . Для конечномерного отображения разветвления \tilde{f} конечность локальной кратности $m_0(\tilde{f})$ является известным фактом /4/, легко выводимым из знаменитой теоремы Гильберта о нулях /4/.

Для $f: E \times \mathbb{C}^m \rightarrow F$, $\lambda \in \mathbb{C}^m$ и $\varepsilon > 0$ определим $f_\lambda: E \rightarrow F$ равенством $f_\lambda(x) = f(x, \lambda)$ и положим $\mathcal{D}_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C}^m : \|\lambda\| < \varepsilon\}$.

Теорема 4/5/. Пусть $f: W \rightarrow F$, $f(0,0) = 0$ - аналитическое фредгольмовское индекса нуль по первому аргументу отображение окрестности начала в $E \times \mathbb{C}^m$ и нуль является изолированным решением уравнения $f(x,0) = 0$. Тогда определена и конечна локальная кратность $m_0(f_0)$ и существуют такие $\varepsilon > 0$ и окрестность нуля \mathcal{U} в E ,

что для любого $\lambda \in D_c$ уравнение $f(x, \lambda) = 0$ имеет в U ровно $m_0(f_0)$ решений, считаемых с кратностями.

Для доказательства оказывается достаточным заметить, что во всех конструкциях из доказательства теоремы I можно допустить аналитическую зависимость от параметра и в итоге мы получим изоморфизм $\tilde{X} \cong \tilde{X}$, коммутирующий с естественными проекциями на пространство параметров C^m . В конечномерной ситуации для отображения разветвления результатов с помощью стандартных для алгебраической геометрии рассуждений выводится из теоремы Грауэрта о прямом образе когерентного пучка /4/, /5/.

Замечание 4. Таким образом, в условиях теоремы всегда имеет место ветвление решений, причем число возникающих ветвей оценивается сверху кратностью $m_0(f_0)$, что дает ответ на основной вопрос в так называемом многомерном случае ветвления, который ранее почти не был исследован /1/. Не останавливаясь на многочисленных следствиях, частично отраженных в /5/, /7/, /9/, отметим лишь, что введенная локальная кратность допускает эффективное алгебраическое вычисление по коэффициентам ряда Тейлора отображения.

В вещественном случае информацию о ветвях решений содержит локальная топологическая степень Лере-Шаудера

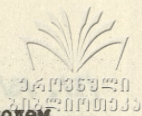


/1/, /5/, поэтому особый интерес представляет нахождение способов ее вычисления.

Теорема 5. Пусть $f: U \rightarrow F$ - аналитическое фредгольмовское отображение индекса нуль, заданное в окрестности нуля в вещественном банаховом пространстве E , и $f^{-1}(0) = \{0\}$. Тогда модуль локальной степени $\deg_0 f$ отображения f в нуле совпадает с сигнатурой канонической квадратичной формы Q_f на локальном кольце $A_0(f)$, которое в этом случае конечномерно (подробное описание канонической квадратичной формы содержится, например, в /8/).

Для доказательства вновь приходится прибегнуть к процедуре построения отображения разветвления, обеспечивающей, как легко убедиться, совпадение локальных степеней и изоморфизм локальных колец отображений f и \tilde{f} . Для последнего искомого равенство следует из алгебраической формулы для локальной степени /7/, /8/.

Для операторов положительного индекса удается описать строение сечений множества нулей гиперплоскостями подходящей конечной коразмерности, однако здесь уже требуются существенно более сложные инварианты локальных колец отображений, рассматриваемые в так называемой теории кратностей /6/, поскольку сами локальные кольца будут уже бесконеч-



номерными векторными пространствами над основным полем.

Кроме того, для получения результатов о конечности характера ветвления необходимо простое условие изолированности заменять более тонким условием правильности отображения /4/, которое для фредгольмовского отображения индекса $d > 0$ означает, что размерность Крулля /4/ локального кольца $\mathcal{A}_0(f)$ равна d .

Теорема 6. Пусть $f: W \rightarrow F$ - комплексно-аналитическое отображение окрестности нуля в $E \times \mathbb{C}^m$, такое, что $f(0,0) = 0$ и f_0 - правильное фредгольмовское отображение индекса $d > 0$. Тогда существуют такие линейные функционалы $g_i \in E^*$, $i=1, \dots, d$, окрестность нуля U в E и $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, что для любого $\lambda \in \mathcal{D}_\varepsilon$ и любых $\delta_i \in \mathbb{C}$ с $|\delta_i| < \delta$, $i=1, \dots, d$, число решений уравнения (I), лежащих в пересечении U с гиперплоскостью $L = \{x \in E: g_1(x) = \delta_1, \dots, g_d(x) = \delta_d\}$, учитываемых с кратностями, равно кратности $e(\mathcal{A}_0(f_0))$ локального кольца отображения f_0 .

Для доказательства опять применяется редукция к отображению разветвления, которое также будет правильным и имеет ту же кратность локального кольца, что и f . Затем с помощью соображений "общего положения" /4/ подбирают-



ся такие d линейных функций, чтобы при их присоединении к компонентам отображения разветвления вновь получалось правильное отображение уже между областями равной размерности. Поскольку в равноразмерном случае правильность влечет изолированность прообразов, применима теорема 4, дающая в точности требуемое заключение, если заметить, что размерность локального кольца расширенного отображения равна кратности локального кольца отображения разветвления.

В вещественной ситуации аналогичное предложение справедливо уже только по модулю 2. Оно может быть получено из предыдущего рассмотрением комплексификации и учетом эффекта "парного ухода прообразов в комплексную область".

Теорема 7. Пусть $f: W \rightarrow F$ — аналитическое отображение окрестности нуля в вещественном банаховом пространстве $E \times \mathbb{R}^m$, такое, что $f(0,0) = 0$ и f_0 является правильным фредгольмовским отображением индекса $d > 0$. Тогда существует такая окрестность нуля U в банаховом пространстве E и такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\lambda \in \mathcal{D}_\varepsilon$ и для любой гиперплоскости общего положения L коразмерности d , не содержащей нуля, число решений уравнения (I), лежащих в $U \cap L$, имеет одинаковую четность с кратностью локального кольца $\mathcal{A}_0(f_0)$ отображения



f_0 в нуле.

Следствие. Если $e(\mathcal{A}_0(f_0))$ нечетна, то описанное пересечение непусто. В этом случае существует нетривиальная ветвь решений уравнения (I).

Замечание 5. Последняя теорема представляет интерес даже в конечномерной ситуации, поскольку может рассматриваться как первый шаг на пути к решению поставленной Д. Айзенбудом в /8/ проблемы описания геометрических свойств множества нулей гладкого отображения $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ при $m > n$ в терминах его локального кольца в нуле. Нетрудно показать, что на самом деле число точек в $f^{-1}(0) \cap L$, где L - описанная в теореме 6 гиперплоскость, меньше кратности локального кольца $\mathcal{A}_0(f)$ на четное неотрицательное число, и возникает чрезвычайно интересная и актуальная, на наш взгляд, задача выражения этого целого числа через инварианты кольца $\mathcal{A}_0(f)$. Напомним, что недавно совершенно аналогичное положение имело место в случае равных размерностей. Появляющееся там четное число удалось выразить как размерность максимального изотропного подпространства канонической квадратичной формы Q_f , что привело к оказавшейся весьма полезной алгебраической формуле для локальной степени /7/, /8/. Таким образом предлагаемая постановка конкретизирует проблему Айзенбуда в направлении,

позволяющем надеяться не только на получение ее полного решения, но и на выяснение связей с естественно возникающими геометрическими инвариантами типа обобщенной степени Понтрягина-Тома.

Замечание 6. Как уже отмечалось во введении, результаты, относящиеся к вещественным операторам, справедливы и без предположений аналитичности или бесконечной дифференцируемости (гладкости). Очевидная априорная трудность заключается в том, что для отображения конечного класса гладкости C^k не определено локальное кольцо. Ясно, впрочем, что если требовать достаточности \mathcal{M} -струй, то все сводится к рассмотрению полиномов и формулировки сохраняются с тривиальными небольшими изменениями.

Гораздо более существенные обобщения получаются, однако, если расширить понятие локального кольца посредством перехода к гладким аппроксимациям. Оказывается, что при весьма общих предположениях локальные кольца достаточно близких аппроксимаций изоморфны, что позволяет дать корректное определение локального кольца и распространить полученные выше результаты на C^k -отображения. Намеченная программа содержательна даже в конечномерной ситуации и заслуживает реализации в специальном изложении. В случае

равных размерностей она позволяет построить алгоритмы для вычисления локальной степени отображений конечного класса гладкости.

В заключение отметим, что в этом контексте значительный и вполне независимый интерес представляет аппроксимация устойчивыми гладкими отображениями в окрестности особой точки комплексно-аналитического отображения, приводящая к любопытным результатам и связям между комплексным анализом и теорией особенностей уже в малых размерностях. Таким способом, например, классическая теорема Римана-Гурвица об отображениях римановых поверхностей может быть легко выведена из принадлежащей Х.Уитни классификации устойчивых гладких отображений плоскости в плоскость.

Поступила 15.XI.1980

Тбилисский математический
институт им. А.М.Размадзе

ЛИТЕРАТУРА

1. М.М.Вайнберг, В.А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969.
2. Н.И. Мухелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, 3-е изд., М., 1968.
3. А.Н.Горбань, В.Б.Меламед. Сиб.матем.журнал, т.17,



№ 3, 682-685, 1976.

4. В.П.Паламодов. Фунц.анализ и его прил., т. I, вып. 3, 54-65, 1967.
5. Г.Н.Химшиашвили, Вестник Моск.ун-та, матем., механ., № 2, 27-31, 1977.
6. A. Douady, Ann. Inst. Fourier, t. 16, N 1, 1-95, 1966.
7. Г.Н. Химшиашвили. Сообщ.АН СССР, т.85, № 2, 309-312, 1977.
8. D. Eisenbud, Bull. Amer. Math. Soc., v.84, N 4, 761-764, 1978.
9. G. Himshiashvili. Komplexe Analysis und ihre Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen, Halle, 75-77, 1980

ბ. ხიმშიაშვილი

ფრეჟოლიდის ანალიზური სიმრავლეები და ანალიზური
დასრულებების ანალიზური დასრულება

რეზიუმე

მივხედავთ, რამდენად ფრეჟოლიდის ანალიზური სიმრავლეები სასრულებ-
ბში იქნებიან ანალიზური სიმრავლეების ლოკალური ნომინალური დასრულებების
ამ მიხედვით სასრულებები განიხილება და შეესაბამება ფრეჟოლიდის
ანალიზური ნომინალური ლოკალური ჯერადობა. დასრულებების, რამდენად
ეს განიხილება დასრულებების ანალიზური სიმრავლეების რეცხვის უფროს
სადაც ნომინალური ლოკალური ჯერადობა.

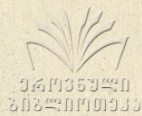


G. Himshiasvili

FREDHOLM ANALYTIC SETS AND BRANCHING OF SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS

Summary

It is proved that Fredholm analytic sets are locally isomorphic to finite-dimensional model analytic sets. Using this result, the local multiplicity of a complex-analytic Fredholm operator is defined and investigated. It is established that the number of small solutions of an equation with such an operator depending on parameters is equal to the local multiplicity.



УДК 52

О РЕЛЯТИВИСТСКОМ ЭФФЕКТЕ ПРИ ДВИЖЕНИИ МНОГИХ ТЕЛ
С ПЕРЕМЕННЫМИ МАССАМИ В ПОСТНЬЮТОНОВОМ ГРАВИТАЦИОН-
НОМ ПОЛЕ

Н.Г. Магнарадзе

1. В в е д е н и е. В настоящей статье продолжается исследование, начатое в работе /9/, являющейся дальнейшим развитием результатов /1 - 8 /.

Рассматривается поступательное движение $N \gg 2$ тел M_i ($i = 1, 2, \dots, N$), имеющих сферически симметричную форму и соответственно переменные массы $m_i = m_i(t)$, аналитически зависящие от времени t на сегменте $t_0 \leq t \leq t_0 + 1/H_0$, где t_0 - некоторый заданный начальный момент, а H_0 - заданное положительное число.

Предполагается, что рассматриваемое поле является слабым, а основные уравнения движения являются постньютоновыми, выраженными в т.н. гармонических координатах. Кроме того, следуя П. Дираку, коэффициент гравитации $\gamma = \gamma(t)$ считается заданной аналитической функцией от t на вышеуказанном сегменте.



При выводе системы основных уравнений движения используются результаты, изложенные в монографии В.А.Брумберга / 23 /.

Для решения этой системы применяется метод, являющийся обобщением метода, предложенного И. Стеффенсенем / 10-12 / при решении задачи трех тел с постоянными массами, получившего дальнейшее развитие в / 1-9 / (в случае переменных масс) и в / 13-20, 24 / (в случае постоянных масс); см. также / 25 /.

Большим достоинством этого метода является его эффективный алгоритмический характер, позволяющий для определения коэффициентов разложений искомым и вспомогательных неизвестных величин в степенные ряды строить рекуррентные соотношения, очень удобные для их вычисления на современных вычислительных машинах, а также явно находить оценки для остаточных членов этих рядов.

В / 9 / при исследовании рассматриваемого движения не была дана количественная оценка соответствующего релятивистского эффекта.

В настоящей статье, пользуясь методом теории возмущения и некоторыми результатами из / 9 /, даем оценку такого эффекта.

2. Основная система дифференциальных уравнений. Пусть $O\mathcal{F}^5$ является некоторой заданной абсолютной системой координат. Тогда основная система дифференциальных уравнений движения рассматриваемых \mathcal{N} тел с переменными массами имеет вид /23, 9/:

$$\ddot{\vec{p}}_i = \sum_{j=1}^N (i) \left[\alpha_j(t) \frac{\vec{p}_{ij}}{\rho_{ij}^3} + \frac{\alpha_j(t)}{c^2} (2|\dot{\vec{p}}_{ij}|^2 - |\vec{p}_i|^2) \frac{\vec{p}_{ij}}{\rho_{ij}^3} + \frac{\alpha_j(t)}{c^2} \times \right.$$

(2.1)

$$\times (4\dot{\vec{p}}_i - 3\dot{\vec{p}}_j, \vec{p}_{ij}) \frac{\vec{p}_{ij}}{\rho_{ij}^3} - \frac{3\alpha_j(t)}{2c^2} (\vec{p}_i, \dot{\vec{p}}_j)^2 \frac{\vec{p}_{ij}}{\rho_{ij}^3} + \frac{\beta_{ij}(t)}{c^2} \frac{\vec{p}_{ij}}{\rho_{ij}^3} \Bigg] +$$

$$+ \sum_{j=1}^N (i) \sum_{k=1}^N (i,j) \frac{\gamma_{jk}(t)}{c^2} \left[\frac{4\vec{p}_{ij}}{\rho_{ik} \rho_{ij}^3} + \frac{\vec{p}_{ij}}{\rho_{jk} \rho_{ij}^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{7\vec{p}_{kj}}{\rho_{ij} \rho_{kj}^3} + \frac{(\vec{p}_{ij}, \vec{p}_{kj})}{2\rho_{ij}^3 \rho_{kj}^3} \vec{p}_{ij} \right] + \delta_i(t) \vec{p}_i,$$

 $i = 1, 2, \dots, N,$
 ξ_i, η_i, ζ_i - координаты M_i , $\vec{p}_i = \vec{OM}_i$, $\vec{p}_{ij} = \vec{p}_j - \vec{p}_i$,

$$\rho_{ij} = |\vec{p}_{ij}|, \quad \alpha_j(t) = \gamma(t) m_j(t), \quad \beta_{ij}(t) = -\gamma^2(t) m_j(t) [5m_i(t) +$$

$$+ 4m_j(t)], \quad \gamma_{jk}(t) = -\gamma^2(t) m_j(t) m_k(t),$$

$$\delta_i(t) = \lambda_i(t) \frac{\dot{m}_i(t)}{m_i(t)},$$

$\lambda_i(t)$ - заданная аналитическая функция, характеризующая реактивную силу, приложенную к M_i ; (\vec{a}, \vec{b}) означает скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} ; c - скорость света; индексы (i) и (i, j) при знаках суммирования

ния означают, что члены, обращающиеся в бесконечность, пропущены; функции $\alpha_j(t)$, $\beta_{ij}(t)$, $\gamma_{jk}(t)$, $\delta_i(t)$ предполагаются аналитическими на сегменте $t_0 \leq t \leq t_0 + 1/H_0$.

Введем еще начальные условия:

$$\text{при } t = t_0 \quad \vec{p}_i = \vec{p}_{i0}, \quad \dot{\vec{p}}_i = \dot{\vec{p}}_{i0}. \quad (2.2)$$

Ниже всюду считается, что взаимные расстояния между M_i и M_j ($i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$) остаются больше некоторого заданного положительного числа.

3. Вспомогательные неизвестные. Наряду с основными неизвестными \vec{p}_i ($i = 1, 2, \dots, N$) введем вспомогательные неизвестные:

$$\begin{aligned} \vec{b}_i &= \vec{p}_i, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{\rho_{ij}}, \quad \zeta_{ij} = \varepsilon_{ij}^2, \quad \vec{\eta}_{ij} = \varepsilon_{ij} \vec{p}_{ij}, \\ \vec{\theta}_{ij} &= \zeta_{ij} \vec{\eta}_{ij}, \quad \lambda_{ij} = |\vec{b}_j - \vec{b}_i|^2, \quad \mu_i = |\vec{b}_i|^2, \quad \vec{v}_{ij} = (2\lambda_{ij} - \mu_i) \vec{\theta}_{ij}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\varphi_{ij} = (4\vec{b}_i - 3\vec{b}_j, \vec{\eta}_{ij}), \quad \vec{\chi}_{ij} = (\vec{b}_j - \vec{b}_i) \zeta_{ij}, \quad \vec{\psi}_{ij} = \varphi_{ij} \vec{\chi}_{ij},$$

$$\omega_{ij} = (\vec{b}_j, \vec{\eta}_{ij}), \quad \rho_{ij} = \omega_{ij}^2, \quad \vec{q}_{ij} = \rho_{ij} \vec{\theta}_{ij},$$

$$\vec{\eta}_{ijk\ell} = \varepsilon_{ij} \vec{\theta}_{k\ell}, \quad s_{ijk} = (\vec{\eta}_{ij}, \vec{\eta}_{kj}),$$

$$u_{ijk} = \zeta_{kj} s_{ijk}, \quad \vec{v}_{ij} = \zeta_{ij} \vec{p}_{ij}, \quad \vec{w}_{ijk} = u_{ijk} \vec{v}_{ij},$$

$$i, j, k, \ell = 1, 2, \dots, N; \quad i \neq j \neq k \neq \ell.$$

Они дают возможность в каждом уравнении системы (2.1) нелинейные члены высокого порядка представить в виде произведения лишь двух множителей, что очень удобно при умножении разложений этих множителей в степенные ряды.

Теперь система (2.1) представляется в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_i &= \vec{c}_i, \\ \dot{\vec{c}}_i &= \sum_{j=1}^N (i) \left[\alpha_j(t) \vec{\theta}_{ij} + \frac{\alpha_j(t)}{c^2} \vec{v}_{ij} + \frac{\alpha_j(t)}{c^2} \vec{\psi}_{ij} - \frac{3\alpha_j(t)}{2c^2} \vec{q}_{ij} + \right. \\ &+ \left. \frac{\beta_{ij}(t)}{c^2} \vec{\chi}_{ijij} \right] + \sum_{j=1}^N (i) \sum_{k=1}^N (i,j) \frac{\gamma_{jk}(t)}{c^2} \left[\mu \vec{\chi}_{ikij} + \right. \\ &+ \left. \vec{\chi}_{jkij} + \frac{7}{2} \vec{\chi}_{ijkj} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{ijk} \right] + \delta_i(t) \vec{c}_i, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$i = 1, 2, \dots, N.$

4. Решение системы (3.1), (3.2) методом теории возмущения. Положим

$$\begin{aligned} \vec{p}_i &= \vec{p}_i^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{p}_i^{(2)}, & \vec{c}_i &= \vec{c}_i^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{c}_i^{(2)}, & \vec{\rho}_{ij} &= \vec{\rho}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{\rho}_{ij}^{(2)}, \\ \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \epsilon_{ij}^{(2)}, & \zeta_{ij} &= \zeta_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \zeta_{ij}^{(2)}, & \vec{\eta}_{ij} &= \vec{\eta}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{\eta}_{ij}^{(2)}, \\ \vec{\theta}_{ij} &= \vec{\theta}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{\theta}_{ij}^{(2)}, & \lambda_{ij} &= \lambda_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \lambda_{ij}^{(2)}, & \mathcal{M}_i &= \mathcal{M}_i^{(0)} + \frac{1}{c^2} \mathcal{M}_i^{(2)}. \end{aligned}$$



$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{v}_{ij}^{(1)}, \quad \varphi_{ij} = \varphi_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \varphi_{ij}^{(1)}, \quad \vec{\chi}_{ij} = \vec{\chi}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{\chi}_{ij}^{(1)},$$

$$\vec{\psi}_{ij} = \vec{\psi}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{\psi}_{ij}^{(1)}, \quad \omega_{ij} = \omega_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \omega_{ij}^{(1)}, \quad \rho_{ij} = \rho_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \rho_{ij}^{(1)},$$

$$\vec{q}_{ij} = \vec{q}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{q}_{ij}^{(1)}, \quad \vec{\eta}_{ijkl} = \vec{\eta}_{ijkl}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{\eta}_{ijkl}^{(1)}, \quad (4.1)$$

$$s_{ijk} = s_{ijk}^{(0)} + s_{ijk}^{(1)}, \quad u_{ijk} = u_{ijk}^{(0)} + \frac{1}{c^2} u_{ijk}^{(1)},$$

$$\vec{v}_{ij} = \vec{v}_{ij}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{v}_{ij}^{(1)}, \quad \vec{w}_{ijk} = \vec{w}_{ijk}^{(0)} + \frac{1}{c^2} \vec{w}_{ijk}^{(1)}.$$

Так как исследуется постньютоновое движение, можно пренебречь степенями $1/c^{2k}$ при $k=2, 3, \dots$. Поэтому из (2.1) и (4.1) легко получим две системы уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{p}}_i^{(0)} &= \vec{\delta}_i^{(0)}, \\ \dot{\vec{\delta}}_i^{(0)} &= \sum_{j=1}^N \alpha_j^{(i)} \vec{\theta}_{ij}^{(0)} + \delta_i^{(0)} \vec{\delta}_i^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\vec{p}_{ij}^{(0)} = \vec{p}_j^{(0)} - \vec{p}_i^{(0)}, \quad \rho_{ij}^{(0)2} = (\vec{p}_{ij}^{(0)}, \vec{p}_{ij}^{(0)}), \quad \varepsilon_{ij}^{(0)} \rho_{ij}^{(0)} = 1,$$

$$\zeta_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(0)2}, \quad \vec{\eta}_{ij}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} \vec{p}_{ij}^{(0)}, \quad \vec{\theta}_{ij}^{(0)} = \zeta_{ij}^{(0)} \vec{\eta}_{ij}^{(0)},$$

$$\lambda_{ij}^{(0)} = (\vec{\epsilon}_i^{(0)} - \vec{\epsilon}_j^{(0)}, \vec{\epsilon}_i^{(0)} - \vec{\epsilon}_j^{(0)}), \quad \mu_i^{(0)} = (\vec{\epsilon}_i^{(0)}, \vec{\epsilon}_i^{(0)}),$$

$$\vec{\nu}_{ij}^{(0)} = (2\lambda_{ij}^{(0)} - \mu_i^{(0)}) \vec{\theta}_{ij}^{(0)}, \quad \varphi_{ij}^{(0)} = (4\vec{\epsilon}_i^{(0)} - 3\vec{\epsilon}_j^{(0)}, \vec{\eta}_{ij}^{(0)}),$$

$$\vec{\chi}_{ij}^{(0)} = \zeta_{ij} (\vec{\epsilon}_j^{(0)} - \vec{\epsilon}_i^{(0)}), \quad \vec{\psi}_{ij}^{(0)} = \varphi_{ij}^{(0)} \vec{\chi}_{ij}^{(0)}, \quad (4.2)$$

$$\omega_{ij}^{(0)} = (\vec{\epsilon}_j^{(0)}, \vec{\eta}_{ij}^{(0)}), \quad \rho_{ij}^{(0)} = \omega_{ij}^{(0)2}, \quad \vec{\rho}_{ij}^{(0)} = \rho_{ij}^{(0)} \vec{\theta}_{ij}^{(0)},$$

$$\vec{\eta}_{ijk\ell}^{(0)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} \vec{\theta}_{k\ell}^{(0)}, \quad s_{ijk}^{(0)} = (\vec{\eta}_{ij}^{(0)}, \vec{\eta}_{kj}^{(0)}),$$

$$u_{ijk}^{(0)} = \zeta_{kj}^{(0)} s_{ijk}^{(0)}, \quad \vec{v}_{ij}^{(0)} = \zeta_{ij}^{(0)} \vec{\rho}_{ij}^{(0)}, \quad \vec{w}_{ijk}^{(0)} = u_{ijk}^{(0)} \vec{v}_{ij}^{(0)};$$

$$\vec{\rho}_i^{(1)} = \vec{\epsilon}_i^{(1)},$$

$$\vec{\epsilon}_i^{(1)} = \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \left[\alpha_j(t) \vec{\theta}_{ij}^{(1)} + \alpha_j(t) \vec{\nu}_{ij}^{(0)} + \alpha_j(t) \vec{\psi}_{ij}^{(0)} - \frac{3}{2} \alpha_j(t) \vec{\rho}_{ij}^{(0)} + \right.$$

$$\left. + \beta_{ij}(t) \vec{\eta}_{ijij}^{(0)} \right] + \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \sum_{k=1}^N {}^{(i,j)} \gamma_{jk}(t) \left[4 \vec{\eta}_{ikij}^{(0)} + \vec{\eta}_{jkii}^{(0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{2} \vec{\eta}_{ijkj}^{(0)} + \frac{1}{2} \vec{w}_{ijk}^{(0)} \right] + \delta_i(t) \vec{\epsilon}_i^{(1)}$$

$$\vec{\rho}_{ij}^{(1)} = \vec{\rho}_j^{(0)} - \vec{\rho}_i^{(0)}, \quad \rho_{ij}^{(0)} \rho_{ij}^{(1)} = 2(\vec{\rho}_{ij}^{(0)}, \vec{\rho}_{ij}^{(1)}),$$

(4.3)

$$\rho_{ij}^{(0)} \varepsilon_{ij}^{(1)} = -\varepsilon_{ij}^{(0)} \rho_{ij}^{(1)}, \quad \zeta_{ij}^{(1)} = 2\varepsilon_{ij}^{(0)} \varepsilon_{ij}^{(1)},$$

$$\vec{\eta}_{ij}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} \vec{\rho}_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \vec{\rho}_{ij}^{(0)}, \quad \vec{\theta}_{ij}^{(1)} = \zeta_{ij}^{(0)} \vec{\eta}_{ij}^{(1)} + \zeta_{ij}^{(1)} \vec{\eta}_{ij}^{(0)},$$

$$\lambda_{ij}^{(1)} = 2(\vec{\sigma}_j^{(0)} - \vec{\sigma}_i^{(0)}, \vec{\sigma}_j^{(1)} - \vec{\sigma}_i^{(1)}), \quad \mu_i^{(1)} = 2(\vec{\sigma}_i^{(0)}, \vec{\sigma}_i^{(1)}),$$

$$\vec{\nu}_{ij}^{(1)} = (2\lambda_{ij}^{(0)} - \mu_i^{(0)}) \vec{\theta}_{ij}^{(1)} + (2\lambda_{ij}^{(1)} - \mu_i^{(1)}) \vec{\theta}_{ij}^{(0)},$$

$$\varphi_{ij}^{(1)} = (4\vec{\sigma}_i^{(0)} - 3\vec{\sigma}_j^{(0)}, \vec{\eta}_{ij}^{(1)}) + (4\vec{\sigma}_i^{(1)} - 3\vec{\sigma}_j^{(1)}, \vec{\eta}_{ij}^{(0)}),$$

$$\vec{\chi}_{ij}^{(1)} = \zeta_{ij}^{(0)} (\vec{\sigma}_j^{(1)} - \vec{\sigma}_i^{(1)}) + \zeta_{ij}^{(1)} (\vec{\sigma}_j^{(0)} - \vec{\sigma}_i^{(0)}),$$

$$\vec{\psi}_{ij}^{(1)} = \varphi_{ij}^{(0)} \vec{\chi}_{ij}^{(1)} + \varphi_{ij}^{(1)} \vec{\chi}_{ij}^{(0)}, \quad \omega_{ij}^{(1)} = (\vec{\sigma}_j^{(0)}, \vec{\eta}_{ij}^{(1)}) + (\vec{\sigma}_j^{(1)}, \vec{\eta}_{ij}^{(0)}),$$

$$P_{ij}^{(1)} = 2\omega_{ij}^{(0)} \omega_{ij}^{(1)}, \quad \vec{q}_{ij}^{(1)} = P_{ij}^{(0)} \vec{\theta}_{ij}^{(1)} + P_{ij}^{(1)} \vec{\theta}_{ij}^{(0)},$$

$$\vec{\eta}_{ijkl}^{(1)} = \varepsilon_{ij}^{(0)} \vec{\theta}_{kl}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(1)} \vec{\theta}_{kl}^{(0)},$$

$$S_{ijk}^{(1)} = (\vec{\eta}_{ij}^{(0)}, \vec{\eta}_{kj}^{(1)}) + (\vec{\eta}_{ij}^{(1)}, \vec{\eta}_{kj}^{(0)}),$$

(4.3)

$$u_{ijk}^{(1)} = \zeta_{kj}^{(0)} s_{ijk}^{(1)} + \zeta_{kj}^{(1)} s_{ijk}^{(0)},$$

$$\vec{\psi}_{ij}^{(1)} = \zeta_{ij}^{(0)} \vec{\rho}_{ij}^{(1)} + \zeta_{ij}^{(1)} \vec{\rho}_{ij}^{(0)},$$

$$\vec{\omega}_{ijk}^{(1)} = u_{ijk}^{(0)} \vec{\psi}_{ij}^{(1)} + u_{ijk}^{(1)} \vec{\psi}_{ij}^{(0)}.$$

Система (4.2) соответствует невозмущенному случаю, т.е. величинам $\vec{\rho}_i^{(0)}, \vec{\sigma}_i^{(0)}, \dots, \vec{\omega}_{ijk}^{(0)}$, представляющим нулевое приближение к решению системы (3.2), а система (4.3) соответствует возмущенному случаю, т.е. величинам $\vec{\rho}_i^{(1)}, \vec{\sigma}_i^{(1)}, \dots, \vec{\omega}_{ijk}^{(1)}$, представляющим первое приближение к решению той же системы (3.2).

Решение системы (4.2) и (4.3) относительно основных неизвестных $\vec{\rho}_i$ и вспомогательных неизвестных (3.1) будем искать в виде степенных рядов по $t-t_0$:

$$\vec{\rho}_i^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\rho}_{in}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \vec{\sigma}_i^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\sigma}_{in}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$\vec{\rho}_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\rho}_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \rho_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$\varepsilon_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \zeta_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$\vec{\eta}_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\eta}_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \vec{\theta}_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\theta}_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$\lambda_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \mu_i^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{in}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$\vec{\nu}_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\nu}_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \varphi_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad (4.4)$$

$$\vec{\chi}_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\chi}_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \vec{\psi}_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\psi}_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$\omega_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \rho_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$\vec{q}_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{q}_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \vec{r}_{ijkl}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{r}_{ijkln}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$s_{ijk}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} s_{ijkn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad u_{ijk}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{ijkn}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

$$\vec{\psi}_{ij}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\psi}_{ijn}^{(h)} (t-t_0)^n, \quad \vec{\omega}_{ijk}^{(h)} = \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\omega}_{ijkn}^{(h)} (t-t_0)^n,$$

где $h = 0, 1$.

Предположим, что заданные функции $\alpha_j(t)$, $\beta_{ij}(t)$, $\gamma_{jk}(t)$, $\delta_i(t)$ допускают аналогичные разложения:

$$\alpha_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{jn} (t-t_0)^n, \quad \beta_{ij}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{ijn} (t-t_0)^n, \quad (4.5)$$

$$\gamma_{jk}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{jkn} (t-t_0)^n, \quad \delta_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{in} (t-t_0)^n.$$

Пусть

$$\left| \alpha_{jn} \right| \leq A_1 \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \quad \left| \beta_{ijn} \right| \leq A_2 \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \quad (4.6)$$

$$\left| \gamma_{jkn} \right| \leq A_3 \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \quad \left| \delta_{in} \right| \leq A_4 \frac{H_0^n}{n^\alpha},$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

где $\alpha > 1$, A_1, A_2, A_3, A_4, H_0 - заданные положительные числа. В силу (4.6.), ряды (4.5) сходятся абсолютно и равномерно на сегменте $|t-t_0| \leq 1/H_0$. Например, имеем



$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{jn} (t-t_0)^n \right| \leq |\alpha_{j0}| + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_1 \frac{H_0}{n^\alpha} |t-t_0|^n \leq$$

$$\leq |\alpha_{j0}| + \beta_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty,$$

ибо, по условию, $\alpha > 1$.

5. Рекуррентные равенства.

Если ряды (4.4) подставим в уравнения (4.2) и сравним коэффициенты при одинаковых степенях $t-t_0$, получим следующую систему рекуррентных соотношений:

$$(n+1) \vec{\rho}_{in+1}^{(o)} = \vec{\sigma}_{in}^{(o)},$$

$$(n+1) \vec{\sigma}_{in+1}^{(o)} = \sum_{j=1}^N {}^{(i)} (\alpha_{jn} \vec{\theta}_{ijo}^{(o)} + \alpha_{jo} \vec{\theta}_{ijn}^{(o)}) + \quad (5.1)$$

$$+ \delta_{in} \vec{\sigma}_{io}^{(o)} + \delta_{io} \vec{\sigma}_{in}^{(o)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \left[\sum_{j=1}^N {}^{(i)} \alpha_{jn-m} \vec{\theta}_{ijm}^{(o)} + \delta_{in-m} \vec{\sigma}_{im}^{(o)} \right],$$

$$\vec{\rho}_{ijn}^{(o)} = \vec{\rho}_{jn}^{(o)} - \vec{\rho}_{in}^{(o)},$$

$$2\rho_{ijo}^{(a)}\rho_{ijn}^{(a)} = 2(\vec{\rho}_{ijn}^{(a)}, \vec{\rho}_{ijo}^{(a)}) + \sum_{m=1}^{n-1} \left[(\vec{\rho}_{ijn-m}^{(a)}, \vec{\rho}_{ijm}^{(a)}) - \rho_{ij}^{(a)}\rho_{ijm}^{(a)} \right],$$

$$\varepsilon_{ijo}^{(a)}\rho_{ijo}^{(a)} = 1, \quad \rho_{ijo}^{(a)}\varepsilon_{ijn}^{(a)} = -\varepsilon_{ijo}^{(a)}\rho_{ijn}^{(a)} - \sum_{m=1}^{n-1} \varepsilon_{ijn-m}^{(a)}\rho_{ijm}^{(a)},$$

$$\zeta_{ijn}^{(a)} = 2\varepsilon_{ijn}^{(a)}\varepsilon_{ijo}^{(a)} + \sum_{m=1}^{n-1} \varepsilon_{ijn-m}^{(a)}\varepsilon_{ijm}^{(a)}, \quad (5.1)$$

$$\vec{\eta}_{ijn}^{(a)} = \varepsilon_{ijn}^{(a)}\vec{\rho}_{ijo}^{(a)} + \varepsilon_{ijo}^{(a)}\vec{\rho}_{ijn}^{(a)} + \sum_{m=1}^{n-1} \varepsilon_{ijn-m}^{(a)}\vec{\rho}_{ijm}^{(a)},$$

$$\vec{\theta}_{ijn}^{(a)} = \zeta_{ijn}^{(a)}\vec{\eta}_{ijo}^{(a)} + \zeta_{ijo}^{(a)}\vec{\eta}_{ijn}^{(a)} + \sum_{m=1}^{n-1} \zeta_{ijn-m}^{(a)}\vec{\eta}_{ijm}^{(a)},$$

$$\begin{aligned} \lambda_{ijn}^{(a)} &= 2(\vec{\theta}_{io}^{(a)} - \vec{\theta}_{jo}^{(a)}, \vec{\theta}_{in}^{(a)} - \vec{\theta}_{jn}^{(a)}) + \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} (\vec{\theta}_{in-m}^{(a)} - \vec{\theta}_{jn-m}^{(a)}, \vec{\theta}_{im}^{(a)} - \vec{\theta}_{jm}^{(a)}), \end{aligned}$$

$$\mu_{in}^{(a)} = 2(\vec{\theta}_{in}^{(a)}, \vec{\theta}_{io}^{(a)}) + \sum_{m=1}^{n-1} (\vec{\theta}_{in-m}^{(a)}, \vec{\theta}_{im}^{(a)}),$$

$$\vec{V}_{ijn}^{(o)} = (2\lambda_{ijn}^{(o)} - \mu_{in}^{(o)})\vec{\theta}_{ijo}^{(o)} + (2\lambda_{ijo}^{(o)} - \mu_{io}^{(o)})\vec{\theta}_{ijn}^{(o)} + \sum_{m=1}^{n-1} (2\lambda_{ijn-m}^{(o)} - \mu_{in-m}^{(o)})\vec{\theta}_{ijm}^{(o)},$$

$$\varphi_{ijn}^{(o)} = (4\vec{\epsilon}_{in}^{(o)} - 3\vec{\epsilon}_{jn}^{(o)}, \vec{\eta}_{ijo}^{(o)}) + (4\vec{\epsilon}_{io}^{(o)} - 3\vec{\epsilon}_{jo}^{(o)}, \vec{\eta}_{ijn}^{(o)}) + \sum_{m=1}^{n-1} (4\vec{\epsilon}_{in-m}^{(o)} - 3\vec{\epsilon}_{jn-m}^{(o)}, \vec{\eta}_{ijm}^{(o)}),$$

$$\vec{\chi}_{ijn}^{(o)} = \zeta_{ijo}^{(o)} (\vec{\epsilon}_{jn}^{(o)} - \vec{\epsilon}_{in}^{(o)}) + \zeta_{ijn}^{(o)} (\vec{\epsilon}_{jo}^{(o)} - \vec{\epsilon}_{io}^{(o)}) + \sum_{m=1}^{n-1} \zeta_{ijn-m}^{(o)} (\vec{\epsilon}_{jm}^{(o)} - \vec{\epsilon}_{im}^{(o)}), \quad (5.1)$$

$$\vec{\psi}_{ijn}^{(o)} = \varphi_{ijn}^{(o)} \vec{\chi}_{ijo}^{(o)} + \varphi_{ijo}^{(o)} \vec{\chi}_{ijn}^{(o)} + \sum_{m=1}^{n-1} \varphi_{ijn-m}^{(o)} \vec{\chi}_{ijm}^{(o)},$$

$$\omega_{ijn}^{(o)} = (\vec{\epsilon}_{jn}^{(o)}, \vec{\eta}_{ijo}^{(o)}) + (\vec{\epsilon}_{jo}^{(o)}, \vec{\eta}_{ijn}^{(o)}) + \sum_{m=1}^{n-1} (\vec{\epsilon}_{jn-m}^{(o)}, \vec{\eta}_{ijm}^{(o)}),$$

$$\rho_{ijn}^{(o)} = 2\omega_{ijo}^{(o)} \omega_{ijn}^{(o)} + \sum_{m=1}^{n-1} \omega_{ijn-m}^{(o)} \omega_{ijm}^{(o)},$$

$$\vec{q}_{ijn}^{(o)} = \rho_{ijo}^{(o)} \vec{\theta}_{ijn}^{(o)} + \rho_{ijn}^{(o)} \vec{\theta}_{ijo}^{(o)} + \sum_{m=1}^{n-1} \rho_{ijn-m}^{(o)} \vec{\theta}_{ijm}^{(o)},$$

$$\vec{\eta}_{ijkln}^{(o)} = \varepsilon_{ijo}^{(o)} \vec{\theta}_{kln}^{(o)} + \varepsilon_{ijn}^{(o)} \vec{\theta}_{klo}^{(o)} + \sum_{m=1}^{n-1} \varepsilon_{ijn-m}^{(o)} \vec{\theta}_{klm}^{(o)},$$

$$S_{ijkln}^{(o)} = (\vec{\eta}_{ijn}^{(o)}, \vec{\eta}_{kio}^{(o)}) + (\vec{\eta}_{ijo}^{(o)}, \vec{\eta}_{kln}^{(o)}) + \sum_{m=1}^{n-1} (\vec{\eta}_{ijn-m}^{(o)}, \vec{\eta}_{klm}^{(o)}),$$

$$u_{ijkn}^{(0)} = \zeta_{kjo}^{(0)} s_{ijkn}^{(0)} + \zeta_{kjn}^{(0)} s_{ijko}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n-1} \zeta_{kjin-m}^{(0)} s_{ijkm}^{(0)},$$

$$\begin{aligned} \psi_{ijn}^{(0)} &= \zeta_{ijo}^{(0)} \vec{\rho}_{ijn}^{(0)} + \zeta_{ijn}^{(0)} \vec{\rho}_{ijo}^{(0)} + \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} \zeta_{ijn-m}^{(0)} \vec{\rho}_{ijm}^{(0)}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_{ijkn}^{(0)} &= u_{ijko}^{(0)} \vec{\psi}_{ijn}^{(0)} + u_{ijkn}^{(0)} \vec{\psi}_{ijo}^{(0)} + \\ &+ \sum_{m=1}^{n-1} u_{ijkn-m}^{(0)} \vec{\psi}_{ijm}^{(0)}. \end{aligned}$$

Аналогично, в результате подстановки рядов (4.4) в уравнения (4.3), получим рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} (n+1) \vec{\rho}_{in+1}^{(1)} &= \vec{\rho}_{in}^{(1)} \\ (n+1) \vec{\rho}_{in+1}^{(1)} &= \sum_{j=1}^N (i) \left[\alpha_{jn} \vec{\theta}_{ijo}^{(1)} + \alpha_{jo} \vec{\theta}_{ijn}^{(1)} + \alpha_{jn} \vec{\psi}_{ijo}^{(0)} + \right. \\ &+ \alpha_{jo} \vec{\psi}_{ijn}^{(0)} + \alpha_{jn} \vec{\psi}_{ijo}^{(0)} + \alpha_{jo} \vec{\psi}_{ijn}^{(0)} - \frac{3}{2} \alpha_{jn} \vec{q}_{ijo}^{(0)} - \frac{3}{2} \alpha_{jo} \vec{q}_{ijo}^{(0)} + \\ &+ \beta_{ijn} \vec{\eta}_{ijijo}^{(0)} + \beta_{ijo} \vec{\eta}_{ijijn}^{(0)} \left. \right] + \sum_{j=1}^N (i) \sum_{k=1}^N (ij) \left[\gamma_{jkn} (4 \vec{\eta}_{ikijo}^{(0)} + \right. \\ &+ \vec{\eta}_{jkii0}^{(0)} + \frac{1}{2} \vec{\eta}_{ijkjo}^{(0)} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{ijk0}^{(0)}) \left. \right] + \left[\gamma_{jko} (4 \vec{\eta}_{ikijn}^{(0)} + \vec{\eta}_{jkii0}^{(0)} + \right. \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\gamma}{2} \vec{\chi}_{ijkn}^{(0)} + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{ijkn}^{(0)} \Big] + \delta_{in} \vec{\epsilon}_{io}^{(0)} + \delta_{io} \vec{\epsilon}_{in}^{(0)} + \\
 & + \sum_{m=1}^{n-1} \left[\sum_{j=1}^N (i) \left(\alpha_{jn-m} \vec{\theta}_{ijm}^{(0)} + \alpha_{jn-m} \vec{\nu}_{ijm}^{(0)} + \alpha_{jn-m} \vec{\psi}_{ijm}^{(0)} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3}{2} \alpha_{jn-m} \vec{\rho}_{ijm}^{(0)} + \beta_{ijn-m} \vec{\chi}_{ijim}^{(0)} \right) + \right. \\
 & + \sum_{j=1}^N (i) \sum_{k=1}^N (i,j) \gamma_{jkn-m} \left(4 \vec{\chi}_{ikiim}^{(0)} + \vec{\chi}_{jkiim}^{(0)} + \frac{\gamma}{2} \vec{\chi}_{ijkjm}^{(0)} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{ijkm}^{(0)} \right) + \delta_{in-m} \vec{\epsilon}_{im}^{(0)} \Big],
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\vec{\rho}_{ijn}^{(1)} = \vec{\rho}_{jn}^{(1)} - \vec{\rho}_{in}^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{ijo}^{(0)} \rho_{ijn}^{(1)} &= 2 (\vec{\rho}_{ijn}^{(0)}, \vec{\rho}_{ijo}^{(1)}) + 2 (\vec{\rho}_{ijo}^{(0)}, \vec{\rho}_{ijn}^{(1)}) - \rho_{ijn}^{(0)} \rho_{ijo}^{(1)} + \\
 & + \sum_{m=1}^{n-1} \left[2 (\vec{\rho}_{ijn-m}^{(0)}, \vec{\rho}_{ijm}^{(1)}) - \rho_{ijn-m}^{(0)} \rho_{ijm}^{(1)} \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{ijo}^{(0)} \epsilon_{ijn}^{(1)} &= -\epsilon_{ijn}^{(0)} \rho_{ijo}^{(1)} - \rho_{ijn}^{(0)} \epsilon_{ijo}^{(1)} - \epsilon_{ijo}^{(0)} \rho_{ijn}^{(1)} - \\
 & - \sum_{m=1}^{n-1} (\epsilon_{ijn-m}^{(0)} \rho_{ijm}^{(1)} + \rho_{ijn-m}^{(0)} \epsilon_{ijm}^{(1)}),
 \end{aligned}$$

$$\zeta_{ijn}^{(1)} = 2 \epsilon_{ijn}^{(0)} \epsilon_{ijo}^{(1)} + 2 \epsilon_{ijo}^{(0)} \epsilon_{ijn}^{(1)} + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \epsilon_{ijn-m}^{(0)} \epsilon_{ijm}^{(1)},$$

$$\eta_{ijn}^{(4)} = \epsilon_{ijn}^{(0)} \vec{\rho}_{ijo}^{(4)} + \epsilon_{ijn}^{(4)} \vec{\rho}_{ijo}^{(0)} + \epsilon_{ijo}^{(0)} \vec{\rho}_{ijn}^{(4)} + \epsilon_{ijo}^{(4)} \vec{\rho}_{ijn}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n-1} (\epsilon_{ijn-m}^{(0)} \vec{\rho}_{ijm}^{(4)} + \epsilon_{ijn-m}^{(4)} \vec{\rho}_{ijm}^{(0)}),$$

$$\vec{\theta}_{ijn}^{(4)} = \zeta_{ijn}^{(0)} \vec{\eta}_{ijo}^{(4)} + \zeta_{ijn}^{(4)} \vec{\eta}_{ijo}^{(0)} + \zeta_{ijo}^{(0)} \vec{\eta}_{ijn}^{(4)} + \zeta_{ijo}^{(4)} \vec{\eta}_{ijn}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n-1} (\zeta_{ijn-m}^{(0)} \vec{\eta}_{ijm}^{(4)} + \zeta_{ijn-m}^{(4)} \vec{\eta}_{ijm}^{(0)}), \quad (5.2)$$

$$\lambda_{ijn}^{(4)} = 2(\vec{\theta}_{in}^{(0)} - \vec{\theta}_{jn}^{(0)}, \vec{\theta}_{io}^{(4)} - \vec{\theta}_{jo}^{(4)}) + 2(\vec{\theta}_{io}^{(0)} - \vec{\theta}_{jo}^{(0)}, \vec{\theta}_{in}^{(4)} - \vec{\theta}_{jn}^{(4)}) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (\vec{\theta}_{in-m}^{(0)} - \vec{\theta}_{jn-m}^{(0)}, \vec{\theta}_{im}^{(4)} - \vec{\theta}_{jm}^{(4)}),$$

$$\mu_{in}^{(4)} = 2(\vec{\theta}_{in}^{(0)}, \vec{\theta}_{io}^{(4)}) + 2(\vec{\theta}_{io}^{(0)}, \vec{\theta}_{in}^{(4)}) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (\vec{\theta}_{in-m}^{(0)}, \vec{\theta}_{im}^{(4)}),$$

$$\vec{\nu}_{ijn}^{(4)} = (2\lambda_{ijn}^{(0)} - \mu_{in}^{(0)}) \vec{\theta}_{ijo}^{(4)} + (2\lambda_{ijn}^{(4)} - \mu_{in}^{(4)}) \vec{\theta}_{ijo}^{(0)} + (2\lambda_{ijo}^{(0)} - \mu_{io}^{(0)}) \vec{\theta}_{ijn}^{(4)} + (2\lambda_{ijo}^{(4)} - \mu_{io}^{(4)}) \vec{\theta}_{ijn}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n-1} [(2\lambda_{ijn-m}^{(0)} - \mu_{in-m}^{(0)}) \vec{\theta}_{ijm}^{(4)} + (2\lambda_{ijn-m}^{(4)} - \mu_{in-m}^{(4)}) \vec{\theta}_{ijm}^{(0)}],$$

$$\varphi_{ijn}^{(4)} = (4\vec{\delta}_{in}^{(0)} - 3\vec{\delta}_{jn}^{(0)}, \vec{\eta}_{ijo}^{(4)}) + (4\vec{\delta}_{in}^{(4)} - 3\vec{\delta}_{jn}^{(4)}, \vec{\eta}_{ijo}^{(0)}) +$$

$$+ (4\vec{\delta}_{io}^{(0)} - 3\vec{\delta}_{jo}^{(0)}, \vec{\eta}_{ijn}^{(4)}) + (4\vec{\delta}_{io}^{(4)} - 3\vec{\delta}_{jo}^{(4)}, \vec{\eta}_{ijn}^{(0)}) +$$

(5.2)

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \left[(4\vec{\delta}_{in-m}^{(0)} - 3\vec{\delta}_{jn-m}^{(0)}, \vec{\eta}_{iim}^{(4)}) + (4\vec{\delta}_{in-m}^{(4)} - 3\vec{\delta}_{jn-m}^{(4)}, \vec{\eta}_{iim}^{(0)}) \right],$$

$$\vec{\chi}_{ijn}^{(4)} = \zeta_{ijo}^{(0)} (\vec{\delta}_{jn}^{(4)} - \vec{\delta}_{in}^{(4)}) + \zeta_{ijo}^{(4)} (\vec{\delta}_{jn}^{(0)} - \vec{\delta}_{in}^{(0)}) + \zeta_{ijn}^{(0)} (\vec{\delta}_{jo}^{(4)} - \vec{\delta}_{io}^{(4)}) +$$

$$+ \zeta_{ijn}^{(4)} (\vec{\delta}_{jo}^{(0)} - \vec{\delta}_{io}^{(0)}) + \sum_{m=1}^{n-1} \left[\zeta_{ijm}^{(0)} (\vec{\delta}_{jn-m}^{(4)} - \vec{\delta}_{in-m}^{(4)}) + \zeta_{ijm}^{(4)} (\vec{\delta}_{jn-m}^{(0)} - \vec{\delta}_{in-m}^{(0)}) \right],$$

$$\vec{\Psi}_{ijn}^{(4)} = \varphi_{ijn}^{(0)} \vec{\chi}_{ijo}^{(4)} + \varphi_{ijn}^{(4)} \vec{\chi}_{ijo}^{(0)} + \varphi_{ijo}^{(0)} \vec{\chi}_{ijn}^{(4)} + \varphi_{ijo}^{(4)} \vec{\chi}_{ijn}^{(0)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} (\varphi_{ijn-m}^{(0)} \vec{\chi}_{iim}^{(4)} + \varphi_{ijn-m}^{(4)} \vec{\chi}_{iim}^{(0)}),$$

$$\omega_{ijn}^{(4)} = (\vec{\delta}_{jn}^{(0)}, \vec{\eta}_{ijo}^{(4)}) + (\vec{\delta}_{jn}^{(4)}, \vec{\eta}_{ijo}^{(0)}) + (\vec{\delta}_{jo}^{(0)}, \vec{\eta}_{ijn}^{(4)}) + (\vec{\delta}_{jo}^{(4)}, \vec{\eta}_{ijn}^{(0)}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \left[(\vec{\xi}_{jn-m}^{(0)}, \vec{\eta}_{ijm}^{(1)}) + (\vec{\xi}_{jn-m}^{(1)}, \vec{\eta}_{ijm}^{(0)}) \right],$$

$$\rho_{ijn}^{(1)} = 2\omega_{ijo}^{(0)} \omega_{ijn}^{(1)} + 2\omega_{ijn}^{(0)} \omega_{ijo}^{(1)} + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \omega_{ijn-m}^{(0)} \omega_{ijm}^{(1)},$$

$$\vec{\theta}_{ijn}^{(1)} = \rho_{ijn}^{(0)} \vec{\theta}_{ijo}^{(1)} + \rho_{ijn}^{(1)} \vec{\theta}_{ijo}^{(0)} + \rho_{ijo}^{(0)} \vec{\theta}_{ijn}^{(1)} + \rho_{ijo}^{(1)} \vec{\theta}_{ijn}^{(0)} + \quad (5.2)$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} (\rho_{ijn-m}^{(0)} \vec{\theta}_{ijm}^{(1)} + \rho_{ijn-m}^{(1)} \vec{\theta}_{ijm}^{(0)}),$$

$$\vec{\chi}_{ijkln}^{(1)} = \varepsilon_{ijn}^{(0)} \vec{\theta}_{klo}^{(1)} + \varepsilon_{ijn}^{(1)} \vec{\theta}_{klo}^{(0)} + \varepsilon_{ijo}^{(0)} \vec{\theta}_{kln}^{(1)} + \varepsilon_{ijo}^{(1)} \vec{\theta}_{kln}^{(0)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} (\varepsilon_{ijn-m}^{(0)} \vec{\theta}_{klm}^{(1)} + \varepsilon_{ijn-m}^{(1)} \vec{\theta}_{klm}^{(0)}),$$

$$S_{ijkln}^{(1)} = (\vec{\eta}_{ijn}^{(0)}, \vec{\eta}_{kjo}^{(1)}) + (\vec{\eta}_{ijn}^{(1)}, \vec{\eta}_{kjo}^{(0)}) + (\vec{\eta}_{ijo}^{(0)}, \vec{\eta}_{kjn}^{(1)}) + (\vec{\eta}_{ijo}^{(1)}, \vec{\eta}_{kjn}^{(0)}) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n-1} \left[(\vec{\eta}_{ijn-m}^{(0)}, \vec{\eta}_{kjm}^{(1)}) + (\vec{\eta}_{ijn-m}^{(1)}, \vec{\eta}_{kjm}^{(0)}) \right],$$

$$\begin{aligned}
 u_{ijkn}^{(1)} &= \zeta_{kln}^{(0)} s_{ijko}^{(1)} + \zeta_{kln}^{(1)} s_{ijko}^{(0)} + \zeta_{kjo}^{(0)} s_{ijkn}^{(1)} + \\
 &+ \zeta_{kjo}^{(1)} s_{ijkn}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n-1} \left(\zeta_{kin-m}^{(0)} s_{ijkm}^{(1)} + \zeta_{kin-m}^{(1)} s_{ijkm}^{(0)} \right),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\psi}_{ijn}^{(1)} &= \zeta_{ijn}^{(0)} \vec{\rho}_{ijo}^{(1)} + \zeta_{ijn}^{(1)} \vec{\rho}_{ijo}^{(0)} + \zeta_{ijo}^{(0)} \vec{\rho}_{ijn}^{(1)} + \zeta_{ijo}^{(1)} \vec{\rho}_{ijn}^{(0)} + \\
 &+ \sum_{m=1}^{n-1} \left(\zeta_{ijn-m}^{(0)} \vec{\rho}_{ijm}^{(1)} + \zeta_{ijn-m}^{(1)} \vec{\rho}_{ijm}^{(0)} \right), \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{\omega}_{ijkn}^{(1)} &= u_{ijkn}^{(0)} \vec{\psi}_{ijo}^{(1)} + u_{ijkn}^{(1)} \vec{\psi}_{ijo}^{(0)} + u_{ijko}^{(0)} \vec{\psi}_{ijn}^{(1)} + \\
 &+ u_{ijko}^{(1)} \vec{\psi}_{ijn}^{(0)} + \sum_{m=1}^{n-1} \left(u_{ijkn-m}^{(0)} \vec{\psi}_{ijm}^{(1)} + u_{ijkn-m}^{(1)} \vec{\psi}_{ijm}^{(0)} \right).
 \end{aligned}$$

В соотношениях (5.1), (5.2) при $n=0$ знаки суммирования заменяются нулями.

6. Некоторые вспомогательные соотношения. По основному предположению величины $\rho_{ij} = |\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_i|$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, N$, ограничены снизу некоторым заданным постоянным положительным числом. Из рекуррентных соотношений (5.1), (5.2), пользуясь

начальными условиями (2.2), можно последовательно определить коэффициенты степенных рядов (4.4) для первых нескольких значений $n = 0, 1, 2, \dots$.

Для доказательства сходимости рядов (4.4) введем следующие положительные постоянные:

$$B_1^{(0)} = \frac{2\alpha}{3}, B_2^{(0)} = \max(D_{i_0}^{(0)}, D_{i_1}^{(0)}, D_{i_2}^{(0)}), B_3^{(0)} = 2, B_4^{(0)} = \max\left(1, \frac{L_\alpha}{2\rho_{ij_0}^{(0)}}\right),$$

$$B_5^{(0)} = \max(\varepsilon_{ij_0}^{(0)}, L_\alpha), B_6^{(0)} = \max(2\varepsilon_{ij_0}^{(0)}, L_\alpha),$$

$$B_7^{(0)} = \max(|\vec{p}_{ij_0}^{(0)}|, \varepsilon_{ij_0}^{(0)}, L_\alpha), B_8^{(0)} = \max(|\vec{\eta}_{ij_0}^{(0)}|, \eta_{ij_0}^{(0)}, L_\alpha),$$

$$B_9^{(0)} = 4 \max(|\vec{b}_{i_0}^{(0)} - \vec{b}_{j_0}^{(0)}|, L_\alpha), B_{10}^{(0)} = \max(|\vec{b}_{i_0}^{(0)}|, L_\alpha),$$

$$B_{11}^{(0)} = \max\left(2|\vec{\theta}_{ij_0}^{(0)}|, 2\lambda_{ij_0}^{(0)} + \mu_{i_0}^{(0)}, 2L_\alpha\right),$$

(6.1)

$$B_{12}^{(0)} = \max\left(7|\vec{\eta}_{ij_0}^{(0)}|, |4\vec{b}_{i_0}^{(0)} - 3\vec{b}_{j_0}^{(0)}|, 7L_\alpha\right),$$

$$B_{13}^{(0)} = \max\left(2\zeta_{ij_0}^{(0)}, |\vec{b}_{j_0}^{(0)} - \vec{b}_{i_0}^{(0)}|, 2L_\alpha\right),$$

$$B_{14}^{(0)} = \max\left(|\vec{\chi}_{ij_0}^{(0)}|, |\varphi_{ij_0}^{(0)}|, L_\alpha\right),$$

$$B_{15}^{(0)} = \max\left(|\vec{\eta}_{ij_0}^{(0)}|, |\vec{b}_{j_0}^{(0)}|, L_\alpha\right),$$

$$B_{16}^{(0)} = \max\left(2|\omega_{ij_0}^{(0)}|, L_\alpha\right),$$



$$\mathcal{B}_{17}^{(0)} = \max(|\vec{\theta}_{ijo}^{(0)}|, \rho_{ijo}^{(0)}, L_\alpha), \quad \mathcal{B}_{18}^{(0)} = \max(|\vec{\theta}_{\kappa jo}^{(0)}|, \varepsilon_{ijo}^{(0)}, L_\alpha),$$

$$\mathcal{B}_{19}^{(0)} = \max\left(\frac{1}{2}|\vec{\eta}_{\kappa jo}^{(0)}|, \frac{1}{2}|\vec{\eta}_{ijo}^{(0)}|, L_\alpha\right), \quad \mathcal{B}_{20}^{(0)} = \max(|s_{ij\kappa o}^{(0)}|, \zeta_{\kappa jo}^{(0)}, L_\alpha),$$

(6.1)

$$\mathcal{B}_{21}^{(0)} = \max(|\vec{\rho}_{ijo}^{(0)}|, \zeta_{ijo}^{(0)}, L_\alpha), \quad \mathcal{B}_{22}^{(0)} = \max(|\vec{v}_{ijo}^{(0)}|, u_{ij\kappa o}^{(0)}, L_\alpha);$$

$$\mathcal{B}_1^{(1)} = \frac{2\alpha}{3}, \quad \mathcal{B}_2^{(1)} = \max(\mathcal{D}_{i0}^{(1)}, \mathcal{D}_{i1}^{(1)}, \mathcal{D}_{i2}^{(1)}, \mathcal{D}_{i3}^{(1)}, \mathcal{D}_{i4}^{(1)}), \quad \mathcal{B}_3^{(1)} = 2,$$

$$\mathcal{B}_4^{(1)} = \frac{1}{\rho_{ijo}^{(0)}} \max\left(2|\vec{\rho}_{ijo}^{(1)}|, |\rho_{ijo}^{(1)}|, 2\rho_{ijo}^{(0)}, 2L_\alpha\right),$$

$$\mathcal{B}_5^{(1)} = \frac{1}{\rho_{ijo}^{(0)}} \max\left(|\rho_{ijo}^{(1)}|, |\varepsilon_{ijo}^{(1)}|, \varepsilon_{ijo}^{(0)}, L_\alpha\right),$$

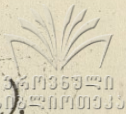
$$\mathcal{B}_6^{(1)} = 2 \max\left(|\varepsilon_{ijo}^{(1)}|, \varepsilon_{ijo}^{(0)}, L_\alpha\right), \quad (6.2)$$

$$\mathcal{B}_7^{(1)} = \max\left(|\vec{\rho}_{ijo}^{(0)}|, |\vec{\rho}_{ijo}^{(1)}|, \varepsilon_{ijo}^{(0)}, |\varepsilon_{ijo}^{(1)}|, L_\alpha\right),$$

$$\mathcal{B}_8^{(1)} = \max\left(|\vec{\eta}_{ijo}^{(1)}|, |\vec{\eta}_{ijo}^{(0)}|, \zeta_{ijo}^{(0)}, |\zeta_{ijo}^{(1)}|, L_\alpha\right),$$

$$\mathcal{B}_9^{(1)} = 4 \max\left(|\vec{\delta}_{i0}^{(1)} - \vec{\delta}_{j0}^{(1)}|, |\vec{\delta}_{i0}^{(0)} - \vec{\delta}_{j0}^{(0)}|, 2L_\alpha\right),$$

$$\mathcal{B}_{10}^{(1)} = 2 \max\left(|\vec{\delta}_{i0}^{(0)}|, |\vec{\delta}_{i0}^{(1)}|, L_\alpha\right),$$



$$B_{11}^{(1)} = \max \left(2 \left| \vec{\theta}_{ijo}^{(1)} \right|, 2 \left| \vec{\theta}_{ijo}^{(0)} \right|, \left| 2\lambda_{ijo}^{(0)} - \mathcal{N}_{io}^{(0)} \right|, \left| 2\lambda_{ijo}^{(1)} - \mathcal{N}_{io}^{(1)} \right|, 2L_\alpha \right),$$

$$B_{12}^{(1)} = \max \left(7 \left| \vec{\eta}_{ijo}^{(1)} \right|, 7 \left| \vec{\eta}_{ijo}^{(0)} \right|, \left| 4\vec{6}_{io}^{(0)} - 3\vec{6}_{jo}^{(0)} \right|, \left| 4\vec{6}_{io}^{(1)} - 3\vec{6}_{jo}^{(1)} \right|, 7L_\alpha \right),$$

$$B_{13}^{(1)} = \max \left(2 \left| \vec{s}_{ijo}^{(1)} \right|, 2 \left| \vec{s}_{ijo}^{(0)} \right|, \left| \vec{6}_{jo}^{(0)} - \vec{6}_{io}^{(0)} \right|, \left| \vec{6}_{jo}^{(1)} - \vec{6}_{io}^{(1)} \right|, 2L_\alpha \right),$$

$$B_{14}^{(1)} = \max \left(\left| \vec{\chi}_{ijo}^{(1)} \right|, \left| \vec{\chi}_{ijo}^{(0)} \right|, \left| \varphi_{ijo}^{(0)} \right|, \left| \varphi_{ijo}^{(1)} \right|, L_\alpha \right),$$

$$B_{15}^{(1)} = \max \left(\left| \vec{\eta}_{ijo}^{(1)} \right|, \left| \vec{\eta}_{ijo}^{(0)} \right|, \left| \vec{6}_{jo}^{(0)} \right|, \left| \vec{6}_{jo}^{(1)} \right|, L_\alpha \right),$$

$$B_{16}^{(1)} = 2 \max \left(\left| \omega_{ijo}^{(1)} \right|, \left| \omega_{ijo}^{(0)} \right|, L_\alpha \right), \quad (6.2)$$

$$B_{17}^{(1)} = \max \left(\left| \vec{\theta}_{ijo}^{(1)} \right|, \left| \vec{\theta}_{ijo}^{(0)} \right|, \left| \rho_{ijo}^{(0)} \right|, \left| \rho_{ijo}^{(1)} \right|, L_\alpha \right),$$

$$B_{18}^{(1)} = \max \left(\left| \vec{\theta}_{klo}^{(1)} \right|, \left| \vec{\theta}_{klo}^{(0)} \right|, \left| \varepsilon_{ijo}^{(0)} \right|, \left| \varepsilon_{ijo}^{(1)} \right|, L_\alpha \right),$$

$$B_{19}^{(1)} = \max \left(\left| \vec{\eta}_{kjo}^{(1)} \right| + \left| \vec{\eta}_{ijo}^{(1)} \right|, \left| \vec{\eta}_{kjo}^{(0)} \right| + \left| \vec{\eta}_{ijo}^{(0)} \right|, L_\alpha \right),$$

$$B_{20}^{(1)} = \max \left(\left| s_{ijko}^{(1)} \right|, \left| s_{ijko}^{(0)} \right|, \left| s_{kjo}^{(0)} \right|, \left| s_{kjo}^{(1)} \right|, L_\alpha \right),$$

$$B_{21}^{(1)} = \max \left(|\vec{\rho}_{ijo}^{(1)}|, |\vec{\rho}_{ijo}^{(0)}|, |S_{ijo}^{(1)}|, S_{ijo}^{(0)}, L_\alpha \right),$$

(6.2)

$$B_{22}^{(1)} = \max \left(|\vec{v}_{ijo}^{(1)}|, |\vec{v}_{ijo}^{(0)}|, |u_{ijk0}^{(0)}|, |u_{ijk0}^{(1)}|, L_\alpha \right),$$

где

$$D_{i0}^{(0)} = \frac{2^\alpha}{3} A_1 \sum_{j=1}^N {}^{(i)} |\vec{\theta}_{ijo}^{(0)}| + \frac{2^\alpha}{3} A_4 |\vec{b}_{i0}^{(0)}|,$$

$$D_{i1}^{(0)} = \frac{2^\alpha}{3} \sum_{j=1}^N {}^{(i)} |\alpha_{j0}| + \frac{2^\alpha}{3} (N-1) A_4 L_\alpha,$$

$$D_{i2}^{(0)} = \frac{2^\alpha}{3} |\delta_{i0}| + \frac{2^\alpha}{3} A_4 L_\alpha,$$

$$D_{i0}^{(1)} = \frac{2^\alpha}{3} A_3 \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \sum_{k=1}^N {}^{(i,j)} \left| 4 \vec{\tau}_{ikijo}^{(0)} + \vec{\tau}_{jkii0}^{(0)} + \frac{7}{2} \vec{\tau}_{ijkjo}^{(0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \vec{w}_{ijk0}^{(0)} \right| + \frac{2^\alpha}{3} \sum_{j=1}^N {}^{(i)} \left[A_1 \left(|\vec{\theta}_{ijo}^{(1)}| + |\vec{v}_{ijo}^{(0)}| + |\vec{\psi}_{ijo}^{(0)}| + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} |\vec{q}_{ijo}^{(0)}| \right) + A_2 |\vec{\tau}_{ijijo}^{(0)}| \left. \right] + \frac{2^\alpha}{3} A_4 |\vec{b}_{i0}^{(1)}|,$$

$$D_{i1}^{(1)} = \frac{2^\alpha}{3} \left(|\delta_{i0}| + A_4 L_\alpha \right) = D_{i2}^{(0)},$$

$$D_{i2}^{(1)} = \frac{2^\alpha}{3} \sum_{j=1}^N {}^{(i)} |\alpha_{j0}| + \frac{2^\alpha}{3} (N-1) A_4 L_\alpha,$$

$$\mathcal{D}_{i3}^{(1)} = \frac{2^{\alpha-1}}{3} 17 \sum_{j=1}^N (i) \sum_{k=1}^N (i,j) |\gamma_{jk\alpha}| +$$

$$+ \frac{2^\alpha}{3} \sum_{j=1}^N (i) |\beta_{ijo}| + \frac{2^{\alpha-1}}{3} 17(N-1)(N-2) A_3 L_\alpha + \frac{2^\alpha}{3} (N-1) A_2 L_\alpha,$$

$$\mathcal{D}_{i4}^{(1)} = \frac{2^{\alpha-1}}{3} \sum_{j=1}^N (i) \sum_{k=1}^N (i,j) |\gamma_{jk\alpha}| +$$

$$+ \frac{2^{\alpha-1}}{3} (N-1)(N-2) A_3 L_\alpha,$$

$$L_\alpha = \frac{2^\alpha (3\alpha - 1)}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1,$$

$$1 \leq i \neq j \neq k \leq N.$$

Нетрудно показать, что при любых заданных положительных постоянных $\mathcal{B}_g^{(h)}$ ($h=0,1; g=1,2,\dots,22$), определенных по равенствам (6.1), (6.2), всегда можно эффективно найти положительные постоянные $C_g^{(h)}$ ($h=0,1; g=1,2,\dots,22$) и $H \geq H_0$ так, что удовлетворяются следующие соотношения:

$$\frac{1}{H} \mathcal{B}_1^{(0)} C_2^{(0)} \leq C_1^{(0)}, \quad \frac{1}{H} \mathcal{B}_2^{(0)} \left(\frac{H_0}{H} + C_2^{(0)} + C_3^{(0)} \right) \leq C_2^{(0)},$$

$$\mathcal{B}_3^{(0)} C_1^{(0)} \leq C_3^{(0)}, \quad \mathcal{B}_4^{(0)} (C_3^{(0)} + C_3^{(0)2} + C_4^{(0)2}) \leq C_4^{(0)},$$

$$\mathcal{B}_5^{(0)} (C_4^{(0)} + C_4^{(0)} C_5^{(0)}) \leq C_5^{(0)}, \quad \mathcal{B}_6^{(0)} (C_5^{(0)} + C_5^{(0)2}) \leq C_6^{(0)},$$

(6.3)

$$B_7^{(0)}(C_3^{(0)} + C_5^{(0)} + C_3^{(0)}C_5^{(0)}) \leq C_7, \quad B_8^{(0)}(C_6^{(0)} + C_7^{(0)} + C_6^{(0)}C_7^{(0)}) \leq C_8,$$

$$B_9^{(0)}(C_2^{(0)} + C_2^{(0)2}) \leq C_9, \quad B_{10}^{(0)}(C_2^{(0)} + C_2^{(0)2}) \leq C_{10},$$

$$B_{11}^{(0)}(C_5^{(0)} + C_9^{(0)} + C_{10}^{(0)} + C_5^{(0)}C_9^{(0)} + C_8^{(0)}C_{10}^{(0)}) \leq C_{11}, \quad (6.3)$$

$$B_{12}^{(0)}(C_2^{(0)} + C_7^{(0)} + C_2^{(0)}C_7^{(0)}) \leq C_{12}, \quad B_{13}^{(0)}(C_2^{(0)} + C_6^{(0)} + C_2^{(0)}C_6^{(0)}) \leq C_{13},$$

$$B_{14}^{(0)}(C_{12}^{(0)} + C_{13}^{(0)} + C_{12}^{(0)}C_{13}^{(0)}) \leq C_{14}, \quad B_{15}^{(0)}(C_2^{(0)} + C_7^{(0)} + C_2^{(0)}C_7^{(0)}) \leq C_{15},$$

$$B_{16}^{(0)}(C_{15}^{(0)} + C_{15}^{(0)2}) \leq C_{16}, \quad B_{17}^{(0)}(C_8^{(0)} + C_{16}^{(0)} + C_8^{(0)}C_{16}^{(0)}) \leq C_{17},$$

$$B_{18}^{(0)}(C_5^{(0)} + C_8^{(0)} + C_5^{(0)}C_8^{(0)}) \leq C_{18}, \quad B_{19}^{(0)}(C_7^{(0)} + C_7^{(0)2}) \leq C_{19},$$

$$B_{20}^{(0)}(C_6^{(0)} + C_{19}^{(0)} + C_6^{(0)}C_{19}^{(0)}) \leq C_{20}, \quad B_{21}^{(0)}(C_3^{(0)} + C_6^{(0)} + C_3^{(0)}C_6^{(0)}) \leq C_{21},$$

$$B_{22}^{(0)}(C_{20}^{(0)} + C_{21}^{(0)} + C_{20}^{(0)}C_{21}^{(0)}) \leq C_{22};$$

$$\frac{1}{H} B_1^{(1)} C_2^{(1)} \leq C_1,$$

$$\frac{1}{H} B_2^{(1)} \left(\frac{H_0}{H} + C_2^{(1)} + C_3^{(1)} + C_H^{(1)} + C_{14}^{(1)} + \frac{3}{2} C_{17}^{(1)} + C_{18}^{(1)} + C_{22}^{(1)} \right) \leq C_2,$$

$$B_3^{(1)} C_1^{(1)} \leq C_3, \quad B_4^{(1)} (C_3^{(1)} + C_3^{(1)} + C_4^{(1)} + C_3^{(1)}C_3^{(1)} + C_4^{(1)}C_4^{(1)}) \leq C_4,$$

$$B_5^{(1)} (C_4^{(1)} + C_5^{(1)} + C_4^{(1)} + C_5^{(1)}C_4^{(1)} + C_4^{(1)}C_5^{(1)}) \leq C_5 \quad (6.4)$$

$$B_6^{(1)} (C_5^{(1)} + C_5^{(1)} + C_5^{(1)}C_5^{(1)}) \leq C_6,$$

$$B_7^{(4)}(C_3^{(0)} + C_3^{(1)} + C_5^{(0)} + C_5^{(1)} + C_5^{(0)}C_3^{(1)} + C_3^{(0)}C_5^{(1)}) \leq C_7^{(4)},$$

$$B_8^{(4)}(C_6^{(0)} + C_6^{(1)} + C_7^{(0)} + C_7^{(1)} + C_6^{(0)}C_7^{(1)} + C_7^{(0)}C_6^{(1)}) \leq C_8^{(4)},$$

$$B_9^{(4)}(C_2^{(0)} + C_2^{(1)} + C_2^{(0)}C_2^{(1)}) \leq C_9^{(4)}, \quad (6.4)$$

$$B_{10}^{(4)}(C_2^{(0)} + C_2^{(1)} + C_2^{(0)}C_2^{(1)}) \leq C_{10}^{(4)},$$

$$B_{11}^{(4)}(C_8^{(0)} + C_8^{(1)} + C_9^{(0)} + C_9^{(1)} + C_{10}^{(0)} + C_{10}^{(1)} + C_8^{(0)}C_9^{(1)} + C_9^{(0)}C_8^{(1)} + \\ + C_{10}^{(0)}C_8^{(1)} + C_8^{(0)}C_{10}^{(1)}) \leq C_{11}^{(4)},$$

$$B_{12}^{(4)}(C_2^{(0)} + C_2^{(1)} + C_7^{(0)} + C_7^{(1)} + C_2^{(0)}C_7^{(1)} + C_7^{(0)}C_2^{(1)}) \leq C_{12}^{(4)},$$

$$B_{13}^{(4)}(C_2^{(0)} + C_2^{(1)} + C_6^{(0)} + C_6^{(1)} + C_2^{(0)}C_6^{(1)} + C_6^{(0)}C_2^{(1)}) \leq C_{13}^{(4)},$$

$$B_{14}^{(4)}(C_{12}^{(0)} + C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(0)} + C_{13}^{(1)} + C_{12}^{(0)}C_{13}^{(1)} + C_{13}^{(0)}C_{12}^{(1)}) \leq C_{14}^{(4)},$$

$$B_{15}^{(4)}(C_2^{(0)} + C_2^{(1)} + C_7^{(0)} + C_7^{(1)} + C_2^{(0)}C_7^{(1)} + C_7^{(0)}C_2^{(1)}) \leq C_{15}^{(4)},$$

$$B_{16}^{(4)}(C_{15}^{(0)} + C_{15}^{(1)} + C_{15}^{(0)}C_{15}^{(1)}) \leq C_{16}^{(4)},$$



$$B_{17}^{(4)} (C_8^{(0)} + C_8^{(1)} + C_{16}^{(0)} + C_{16}^{(1)} + C_8^{(0)} C_{16}^{(1)} + C_{16}^{(0)} C_8^{(1)}) \leq C_{17}^{(4)},$$

$$B_{18}^{(4)} (C_5^{(0)} + C_5^{(1)} + C_8^{(0)} + C_8^{(1)} + C_8^{(0)} C_5^{(1)} + C_5^{(0)} C_8^{(1)}) \leq C_{18}^{(4)},$$

$$B_{19}^{(4)} (C_7^{(0)} + C_7^{(1)} + C_7^{(0)} C_7^{(1)}) \leq C_{19}^{(4)}, \quad (6.4)$$

$$B_{20}^{(4)} (C_6^{(0)} + C_6^{(1)} + C_{19}^{(0)} + C_{19}^{(1)} + C_6^{(0)} C_{19}^{(1)} + C_{19}^{(0)} C_6^{(1)}) \leq C_{20}^{(4)},$$

$$B_{21}^{(4)} (C_3^{(0)} + C_3^{(1)} + C_6^{(0)} + C_6^{(1)} + C_3^{(0)} C_6^{(1)} + C_6^{(0)} C_3^{(1)}) \leq C_{21}^{(4)},$$

$$B_{22}^{(4)} (C_{20}^{(0)} + C_{20}^{(1)} + C_{21}^{(0)} + C_{21}^{(1)} + C_{20}^{(0)} C_{21}^{(1)} + C_{21}^{(0)} C_{20}^{(1)}) \leq C_{22}^{(4)}.$$

7. Доказательство сходимости рядов. (4.4). Исходя из рекуррентных равенств (5.1), (5.2), пользуясь неравенством (см., например, / I /)

$$\sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^\alpha (n-m)^\alpha} < \frac{L_\alpha}{n^\alpha}, \quad L_\alpha = \frac{2^\alpha (3\alpha - 1)}{\alpha - 1}, \quad \alpha > 1,$$

при $n = 2, 3, \dots$, а также соотношениями (6.3), (6.4) и методом полной математической индукции, нетрудно установить, что при $n = 2, 3, \dots$ и $h = 0, 1$ имеем следующие соотношения:

$$|\vec{\rho}_{in}^{(h)}| \leq C_1^{(h)} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{\sigma}_{in}^{(h)}| \leq C_2^{(h)} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{\rho}_{ijn}^{(h)}| \leq C_3^{(h)} \frac{H^n}{n^\alpha},$$

$$\begin{aligned}
 |\rho_{ijn}^{(k)}| &\leq C_4 \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\varepsilon_{ijn}^{(k)}| \leq C_5 \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\xi_{ijn}^{(k)}| \leq C_6 \frac{H^n}{n^\alpha}, \\
 |\vec{\eta}_{ijn}^{(k)}| &\leq C_7 \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{\theta}_{ijn}^{(k)}| \leq C_8 \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\lambda_{ijn}^{(k)}| \leq C_9 \frac{H^n}{n^\alpha}, \\
 |\mu_{in}^{(k)}| &\leq C_{10} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{\nu}_{ijn}^{(k)}| \leq C_{11} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\varphi_{ij}^{(k)}| \leq C_{12} \frac{H^n}{n^\alpha}, \\
 |\vec{\chi}_{ijn}^{(k)}| &\leq C_{13} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{\psi}_{ijn}^{(k)}| \leq C_{14} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\omega_{ijn}^{(k)}| \leq C_{15} \frac{H^n}{n^\alpha}, \\
 |\rho_{ijn}^{(k)}| &\leq C_{16} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{q}_{ijn}^{(k)}| \leq C_{17} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{\pi}_{ijkln}^{(k)}| \leq C_{18} \frac{H^n}{n^\alpha}, \\
 |s_{ijkn}^{(k)}| &\leq C_{19} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |u_{ijkn}^{(k)}| \leq C_{20} \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\vec{v}_{ijn}^{(k)}| \leq C_{21} \frac{H^n}{n^\alpha}, \\
 |\vec{w}_{ijkn}^{(k)}| &\leq C_{22} \frac{H^n}{n^\alpha}.
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Теперь, пользуясь (7.1), очевидно, что ряды (4.4) сходятся абсолютно и равномерно на сегменте $|t-t_0| \leq 1/H$; например, имеем

$$\left| \sum_{n=2}^{\infty} \vec{\rho}_{in}^{(k)} (t-t_0)^n \right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} C_1 \frac{H^n}{n^\alpha} |t-t_0|^n \leq C_1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty, \quad \alpha > 1.$$

8. Оценка остаточных членов рядов (4.4). Степенной ряд функции $\vec{\rho}_i^{(k)}(t)$ представим в виде

$$\vec{\rho}_i^{(k)}(t) = \sum_{m=0}^n \vec{\rho}_{im}^{(k)} (t-t_0)^m + \left[\vec{\rho}_i^{(k)}(t) \right]_n, \tag{8.1}$$

где

$$\left[\vec{\rho}_i^{(k)}(t) \right]_n = \sum_{m=n+1}^{\infty} \vec{\rho}_{im}^{(k)} (t-t_0)^m.$$

При $n=1, 2, \dots$, в силу (7.1), очевидно, имеем

$$\left| \left[\vec{p}_{in}^{(h)}(t) \right]_n \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} C_1^{(h)} \frac{H^m}{m^\alpha} |t-t_0|^m \leq C_1^{(h)} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \left[\vec{p}_{in}^{(h)}(t) \right]_n \right| \leq \frac{C_1^{(h)}}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \quad (8.2)$$

при $h=0, 1$ и для $n=1, 2, \dots$; $\alpha > 1$.

Аналогичные оценки устанавливаются для других рядов (4.4).

9. Оценка релятивистского эффекта при постньютоновом движении.

Рассмотрим основную неизвестную функцию

$$\vec{p}_i(t) = \vec{p}_i^{(0)}(t) + \frac{1}{c^2} \vec{p}_i^{(1)}(t), \quad (9.1)$$

где $\vec{p}_i^{(0)}(t)$ является решением задачи многих тел в поле ньютоновой гравитации, а второй член в (9.1) является релятивистским эффектом в поле постньютоновой гравитации.

Принимая во внимание, что в силу (8.1),

$$\vec{p}_i^{(1)}(t) = \sum_{m=0}^n \vec{p}_{im}^{(1)}(t-t_0)^m + \left[\vec{p}_i^{(1)}(t) \right]_n,$$

получим

$$\vec{p}_i(t) = \vec{p}_i^{(0)}(t) + \frac{1}{c^2} \sum_{m=0}^n \vec{p}_{im}^{(1)}(t-t_0)^m + \frac{1}{c^2} \left[\vec{p}_i^{(1)}(t) \right]_n,$$

при этом, в силу (8.2), имеем

$$\frac{1}{c^2} \left| \left[\vec{p}_i^{(1)}(t) \right]_n \right| \leq \frac{C_1^{(1)}}{(\alpha-1)c^2 n^{\alpha-1}}, \quad n=1, 2, \dots; \alpha > 1. \quad (9.2)$$

Аналогичные оценки получаются для вспомогательных неизвестных функций: $\vec{\delta}_i(t), \vec{\rho}_{ij}(t), \rho_{ij}(t), \dots, \vec{\nu}_{ij}(t), \vec{w}_{ij\kappa}(t)$.

Поступила 10.XI. 1980

Кафедра астрономии

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Г. Магнарадзе. Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 1959, № 24, 145-159.
2. Н.Г. Магнарадзе. Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 1961, № 26, 215-224.
3. Н.Г. Магнарадзе. Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 1964, № 30, 145-152.
4. Н.Г. Магнарадзе. Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 1966, № 32, 135-156.
5. Н.Г. Магнарадзе. Сообщения АН Груз. ССР, 1972, 68, № 1, 57-60.
6. Н.Г. Магнарадзе. Сообщения АН Груз. ССР, 1972, 68, № 2, 325-328.
7. Н.Г. Магнарадзе. Труды Тбилисского ун-та, 1976, 179, 75-83.
8. Н.Г. Магнарадзе. Труды Тбилисского ун-та, 1978, 204, 13-28.
9. Н.Г. Магнарадзе. Бюлл. Абастуманской астрофиз. обс., 1978, № 49, 149-158.
10. J.F. Steffensen, Acta mathematica, 1956, 95, 25-37.
11. J.F. Steffensen, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1956, 30, N 18, 3-17.

12. J.Steffensen, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1957, 31, N 3, 3-18.
13. F.M.Rauch and W.C.Riddel, J.Soc. Ind. Appl. Math., 1960, 8, 4, 568-581
14. F.M.Rauch, ARS Journal, 1960, 30, 284-286.
15. E.Rabe, Astr. J., 1961, 66, N 9, 500-516.
16. В.А.Брумберг.Труды Ин-та теорет. астр., 1963, № 4, 234-256.
17. P.Sconzo, Astr. Nachr., 1967, 290, N 4, 163-170.
18. В.Ф. Мячин, О.А.Сизова. Труды Ин-та теорет. астр., 1970, XII, № 5, 389-400.
19. R.Broucke, Celestial Mech., 1971, 4, N 1, 110-115.
20. Charles E.Roberts JR,Celestial Mech., 1975, 12, N 4, 397-407.
21. К.А.Зигель. Лекции по небесной механике. М., 1959.
22. Г.Н.Дубошин. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1964.
23. В.А. Брумберг. Релятивистская небесная механика. М., 1972.
24. В.А. Брумберг. Аналитические алгоритмы небесной механики. М., 1980.
25. Е. Штифель, Г. Шейфеле. Линейная и регулярная небесная механика. М., 1975.

06135940
012:111033

of time, The solutions of the above system by generalization of the method of J. Steffensen and by the method of the perturbation theory are constructed in the form of a power time series which are convergent on a certain segment. For the coefficients of these power series the recurrence relations are obtained which are convenient for computing on modern computers. The estimations of the remainders of these power series and the relativistic effect are given.

УДК 52

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ В
НЬЮТОНОВСМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ С ДВУМЯ НЕПОДВИЖНЫМИ
ЦЕНТРАМИ

Ц.Г.Читаладзе

И. В в е д е н и е. Исследованием движения тела постоянной массы в ньютоновом гравитационном поле с двумя неподвижными центрами занимались Эйлер, Лежандр, Якоби и другие (см., например, / 1,2 /). Было замечено, что полученными в этом направлении результатами можно воспользоваться при первом приближении к решению некоторых реальных астрономических задач. Например, если рассмотреть задачу о движении малых планет или комет в гравитационном поле Солнца и Юпитера, считая последние неподвижными (Юпитер описывает свою почти круговую орбиту вокруг Солнца приблизительно за 12 лет), тогда в достаточно малом промежутке времени ее решение приближенно можно представить как решение задачи с двумя неподвижными центрами.

Но особенно интересной оказалась связь задачи о двух неподвижных центрах с задачей о движении искусственных спут-

041035340
2025.01.03

ников Земли. Е.П.Аксенов, Е.А. Гребеников, В.Г.Демин /3/ об-
наружили весьма важный факт, что потенциал задачи о двух не-
подвижных центрах с комплексно сопряженными массами (т.н.
обобщенной задачи двух неподвижных центров) в достаточной
степени аппроксимирует потенциал притяжения реальной Земли.

В настоящей статье исследуется движение тела M перемен-
ной по времени t массы $m=m(t)$ в ньютоновом гравитационном
поле с двумя неподвижными центрами M_1 и M_2 , имеющими
сферически симметричные формы и постоянные массы m_1 и
 m_2 , соответственно.

2. Основное дифференциальное
уравнение. В основу нашего исследования положено
известное уравнение И.В.Мещерского / 4 /

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{\phi}, \quad (2.1)$$

где \vec{v} - скорость, \vec{F} - равнодействующая внешних сил,
приложенных к телу M , $\vec{\phi} = \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2$, $\vec{\phi}_1$ - реак-
тивная сила, обусловленная отделением частиц, $\vec{\phi}_2$ - тор-
мозящая сила, обусловленная присоединением частиц к телу
 M .

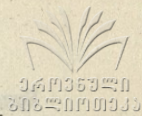
Полагая

$$\vec{\phi} = \lambda(t) m(t) \vec{v}, \quad \vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r},$$

где $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ - радиус-вектор с началом в некоторой фикси-
рованной точке O , из (2.1) получим уравнение движения

$$\frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \frac{\vec{F}}{m(t)} + \lambda(t) \frac{d}{dt} \vec{r}. \quad (2.2)$$

Введем абсолютную систему координат O_{xyz} , начало O



которой находится в середине отрезка $M_1 M_2$, а ось O_x по направлению совпадает с вектором $\overrightarrow{M_2 M_1}$.

Пусть $2c$ - расстояние между двумя неподвижными центрами: $M_1(0, 0, c)$ и $M_2(0, 0, -c)$.

По предположению тело M притягивается двумя неподвижными центрами M_1 и M_2 по закону Ньютона. Поэтому

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m m_1}{r_1^3} \vec{r}_1 - \gamma \frac{m m_2}{r_2^3} \vec{r}_2, \quad (2.3)$$

где γ - коэффициент притяжения,

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{c}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r} + \vec{c}, \quad \vec{c} = (0, 0, c), \quad r_1 = |\vec{r}_1|, \quad (2.4)$$

$$r_2 = |\vec{r}_2|.$$

В силу (2.3), получаем основное дифференциальное уравнение рассматриваемой задачи:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\gamma \frac{m_1}{r_1^3} \vec{r}_1 - \gamma \frac{m_2}{r_2^3} \vec{r}_2 + \lambda(t) \frac{d}{dt} \vec{r}. \quad (2.5)$$

Введем еще начальные условия:

$$\text{при } t = t_0 \quad \vec{r} = \vec{r}_0, \quad \frac{d}{dt} \vec{r} = \vec{r}'_0, \quad (2.6)$$

где $t_0, \vec{r}_0, \vec{r}'_0$ - заданные величины.

Ниже будем предполагать, что во все время движения величины $|\vec{r}_1(t)|$ и $|\vec{r}_2(t)|$ снизу ограничены заданным постоянным положительным числом.

Функцию $\lambda(t)$ будем считать известной аналитической функцией на заданном сегменте $t_0 \leq t \leq t_0 + 1/H_0$.

Пусть

$$\lambda(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (t - t_0)^n. \quad (2.7)$$

Будем считать, что

$$\left| A_n \right| \leq A_0 \frac{H_0^n}{n^\alpha}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (2.8)$$

где A_0, H_0 и $\alpha > 1$ - заданные положительные числа. В силу (2.8), очевидно, что степенной ряд (2.7) сходится абсолютно и равномерно на сегменте $|t - t_0| \leq 1/H_0$.

Для решения уравнения (2.5) с начальными условиями (2.6) мы пользуемся известным методом И.Стеффенсена, предложенным им при решении задачи трех тел с постоянными массами и получившим дальнейшее широкое развитие и обобщение в работах В.А.Брумберга /6/ и ряда ученых (в случае постоянных масс), Н.Г.Магнарадзе /7/ (в случае переменных масс).

3. Вспомогательные неизвестные и уравнения. Введем следующие вспомогательные неизвестные:

$$u_1 = \frac{1}{r_1}, \quad u_2 = \frac{1}{r_2}, \quad \sigma_1 = u_1^2, \quad \sigma_2 = u_2^2, \quad (3.1)$$

$$\omega_1 = u_1 \sigma_1, \quad \omega_2 = u_2 \sigma_2.$$

Тогда, в силу (2.4), для определения основных и вспомогательных неизвестных $\vec{r}_1, \vec{r}_2, r_1, r_2, u_1, u_2, \sigma_1, \sigma_2, \omega_1, \omega_2$ получим следующую систему дифференциальных и конечных уравнений:

$$\frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \lambda(t) \frac{d \vec{r}_1}{dt} - \gamma m_1 \omega_1 \vec{r}_1 - \gamma m_2 \omega_2 \vec{r}_2,$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + 2\vec{c}, \quad (3.2)$$

$$r_1^2 = (\vec{r}_1, \vec{r}_1), \quad r_2^2 = (\vec{r}_2, \vec{r}_2),$$

$$\gamma_1 u_1 = 1, \quad \gamma_2 u_2 = 1, \quad \psi_1 = u_1^2, \quad \psi_2 = u_2^2,$$

$$\omega_1 = u_1 \psi_1, \quad \omega_2 = u_2 \psi_2.$$

Начальные условия (2.6) принимают вид:

$$\text{при } t=t_0 \quad \vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}_0 - \vec{c}, \quad \frac{d}{dt} \vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}'_0. \quad (3.3)$$

4. Решение системы (3.2) и соответствующие рекуррентные равенства. Решение системы (3.2) будем искать в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\gamma}_{1n} (t-t_0)^n, & \vec{\gamma}_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \vec{\gamma}_{2n} (t-t_0)^n, \\ \gamma_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{1n} (t-t_0)^n, & \gamma_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_{2n} (t-t_0)^n, \\ u_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n} (t-t_0)^n, & u_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n} (t-t_0)^n, \\ \psi_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{1n} (t-t_0)^n, & \psi_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n} (t-t_0)^n, \\ \omega_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{1n} (t-t_0)^n, & \omega_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{2n} (t-t_0)^n. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставляя ряды (4.1) в систему (3.2) и приравнявая коэффициенты при $(t-t_0)^n$, $n=0, 1, 2, \dots$, получим следующие рекуррентные равенства:

$$(n+1)(n+2)\vec{r}_{1n+2} = \lambda_0(n+1)\vec{r}_{1n+1} + \lambda_n\vec{r}_{11} - \gamma m_1(\omega_{10}\vec{r}_{1n} + \omega_{1n}\vec{r}_{10}) - \gamma m_2(\omega_{20}\vec{r}_{2n} + \omega_{2n}\vec{r}_{20}) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} \left[\lambda_{n-k}(k+1)\vec{r}_{1k+1} - \gamma m_1 \omega_{1n-k}\vec{r}_{1k} - \gamma m_2 \omega_{2n-k}\vec{r}_{2k} \right], \quad n \geq 0,$$

$$\vec{r}_{20} = \vec{r}_{10} + 2\vec{c}, \quad \vec{r}_{2n} = \vec{r}_{1n}, \quad n \geq 1,$$

$$2\chi_{10}\chi_{1n} = 2(\vec{r}_{10}, \vec{r}_{1n}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\vec{r}_{1k}, \vec{r}_{1n-k}) - \chi_{1k}\chi_{1n-k} \right], \quad n \geq 0,$$

$$2\chi_{20}\chi_{2n} = 2(\vec{r}_{20}, \vec{r}_{2n}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\vec{r}_{2k}, \vec{r}_{2n-k}) - \chi_{2k}\chi_{2n-k} \right], \quad n \geq 0,$$

$$\chi_{10}u_{1n} = -u_{10}\chi_{1n} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{1k}\chi_{1n-k}, \quad n \geq 0, \quad (4.2)$$

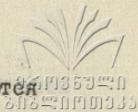
$$\chi_{20}u_{2n} = -u_{20}\chi_{2n} - \sum_{k=1}^{n-1} u_{2k}\chi_{2n-k}, \quad n \geq 0,$$

$$\psi_{1n} = 2u_{10}u_{1n} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{1k}u_{1n-k}, \quad n \geq 0,$$

$$\psi_{2n} = 2u_{20}u_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{2k}u_{2n-k}, \quad n \geq 0,$$

$$\omega_{1n} = \psi_{10}u_{1n} + u_{10}\psi_{1n} + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{1k}u_{1n-k}, \quad n \geq 0,$$

$$\omega_{2n} = \psi_{20}u_{2n} + u_{20}\psi_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \psi_{2k}u_{2n-k}, \quad n \geq 0.$$



В равенствах (4.2) при $n=0$ знаки суммирования заменяются нулями.

5. Некоторые вспомогательные соотношения. В силу допущения γ_{10} и γ_{20} являются положительными числами. Из (4.2), пользуясь начальными условиями (3.3), можно последовательно определить коэффициенты степенных рядов (4.1) для первых нескольких значений $n=0, 1, 2, \dots$.

Для того чтобы показать абсолютную и равномерную сходимость степенных рядов (4.1), введем следующие положительные постоянные:

$$B_1 = \frac{2^{\alpha-2}}{3} \max \left(3A_0 L_\alpha + 3|\lambda_0|, A_0 |\vec{\eta}_{11}|, \gamma m_1 \omega_{10}, \gamma m_2 \omega_{20}, \right. \\ \left. \gamma m_1 |\vec{\eta}_{10}|, \gamma m_2 |\vec{\eta}_{20}|, \gamma m_1 L_\alpha, \gamma m_2 L_\alpha \right), \quad (5.1)$$

$$B_2 = 1, \quad B_3 = \max \left(1, \frac{L_\alpha}{2\gamma_{10}} \right), \quad B_4 = \max \left(1, \frac{L_\alpha}{2\gamma_{20}} \right),$$

$$B_5 = \max \left(\frac{1}{\gamma_{10}^2}, \frac{L_\alpha}{\gamma_{10}} \right), \quad B_6 = \max \left(\frac{1}{\gamma_{20}^2}, \frac{L_\alpha}{\gamma_{20}} \right),$$

$$B_7 = \max \left(\frac{2}{\gamma_{10}}, L_\alpha \right), \quad B_8 = \max \left(\frac{2}{\gamma_{20}}, L_\alpha \right),$$

$$B_9 = \max \left(\frac{1}{\gamma_{10}^2}, \frac{1}{\gamma_{10}}, L_\alpha \right), \quad B_{10} = \max \left(\frac{1}{\gamma_{20}^2}, \frac{1}{\gamma_{20}}, L_\alpha \right),$$

где $L_\alpha = 2^\alpha (3\alpha - 1) / (\alpha - 1)$, $\alpha > 1$.

Следуя / 7 /, можно показать, что при любых заданных положительных постоянных B_i ($i=1, 2, \dots, 10$), опреде-



ленных по равенствам (5.1), всегда можно эффективно найти положительные постоянные C_i ($i=1, 2, \dots, 10$) и $H \geq H_0$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$B_1 \left[\frac{H_0}{H^3} + \left(\frac{1}{H^2} + \frac{1}{H} \right) C_1 + \frac{1}{H^2} (C_2 + C_9 + C_1 C_9 + C_2 C_{10}) \right] \leq C_1, \quad (5.2)$$

$$B_2 C_1 \leq C_2, \quad B_3 (C_1 + C_1^2 + C_3^2) \leq C_3,$$

$$B_4 (C_2 + C_2^2 + C_4^2) \leq C_4, \quad B_5 (C_3 + C_3 C_5) \leq C_5,$$

$$B_6 (C_4 + C_4 C_6) \leq C_6, \quad B_7 (C_5 + C_5^2) \leq C_7,$$

$$B_8 (C_6 + C_6^2) \leq C_8, \quad B_9 (C_7 + C_7^2 + C_5 C_7) \leq C_9,$$

$$B_{10} (C_8 + C_8 + C_6 C_8) \leq C_{10}.$$

6. Доказательство сходимости рядов (4.1). Исходя из рекуррентных равенств (4.2), пользуясь неравенством (см. / 7 /)

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{K^\alpha (n-K)^\alpha} < \frac{L_\alpha}{n^\alpha}, \quad n=2, 3, \dots,$$

а также соотношениями (5.2) и методом полной математической индукции, нетрудно установить, что при $n=2, 3, \dots$, имеем следующие соотношения

$$\begin{aligned} |\vec{u}_{1n}| &\leq C_1 \frac{H^n}{n^\alpha}, & |\vec{u}_{2n}| &\leq C_2 \frac{H^n}{n^\alpha}, & |u_{1n}| &\leq C_3 \frac{H^n}{n^\alpha}, \\ |u_{2n}| &\leq C_4 \frac{H^n}{n^\alpha}, & |u_{1n}| &\leq C_5 \frac{H^n}{n^\alpha}, & |u_{2n}| &\leq C_6 \frac{H^n}{n^\alpha}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$|\psi_{1n}| \leq C_7 \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\psi_{2n}| \leq C_8 \frac{H^n}{n^\alpha},$$

$$|\omega_{1n}| \leq C_9 \frac{H^n}{n^\alpha}, \quad |\omega_{2n}| \leq C_{10} \frac{H^n}{n^\alpha}.$$

Теперь, в силу (6.1), очевидно, что ряды (4.1) сходятся абсолютно и равномерно на сегменте $|t-t_0| \leq 1/H$.

7. Оценка остаточных членов рядов (4.1). Очевидно, имеем

$$\vec{\chi}_1(t) = \sum_{k=0}^n \vec{\chi}_{1k} (t-t_0)^k + [\vec{\chi}_1(t)]_n, \quad (7.1)$$

где

$$[\vec{\chi}_1(t)]_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \vec{\chi}_{1k} (t-t_0)^k.$$

В силу (6.1), очевидно, имеем

$$|[\vec{\chi}_1(t)]_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} C_1 \frac{H^k}{k^\alpha} |t-t_0|^k \leq C_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

или

$$\left| [\vec{\chi}_1(t)]_n \right| \leq \frac{C_1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \quad n=1, 2, \dots \quad (7.2)$$

Аналогичные оценки получаются и для других рядов (4.1).

В следующей статье будет исследовано движение тела переменной массы вблизи соударения с одним из двух неподвижных центров.



ლიტერატურა

1. Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., 1975, с.799.
2. Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., 1964, с.560.
3. Е.П. Аксенов, Е.А.Гребеников, В.Г.Демин. Астрон.ж., 1963, 40, № 2.
4. И.В. Мещерский. Работы по механике тел переменной массы. М., 1952, с.280.
5. J.F.Steffensen. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1956, 30, N 18, 3-17.
6. В.А. Брумберг. Аналитические алгоритмы небесной механики. М., 1980.
7. Н.Г. Магнарадзе. Труды Тбилисского университета, 218, 1981.

ც, რიგგარეშე

ცვლადი მასის სხვაობის ძრავების მათემატიკა და მათი გამოყენება
 კოსმოსში ვარდნილის უძრავი ცენტრით

რეზიუმე

განხილულია რიგგარეშე ცვლადი მასის მქონე სხვაობის რეგულარული ძრავების ნიუტონისებრი კოსმოსური ვარდნილის უძრავი ცენტრით. აღივსება, რომ მასა წარმოადგენს ანალიზურ ფუნქციას ერთი მთავარი სივრცითი კოორდინატის მიხედვით. ნ.სტეფენსენისა და ნ.მაგნარაძის შედეგების გამოყენებით აგებულია ხსენებული ცვლადების ამოხსნის ერთი ხარისხობრივი მეთოდი, რომელიც კრებულა ცალკეულ სივრცით. ამ ხარისხობრივი მეთოდის გამოყენებით მიღებულია რეგულარული და მოკლებული რეგულარული, რომელიც მოხერხებულია მათ გამო-



სათვლელო მანამდე რეკავ კამონთვლეო მანქანებზე. მოცემულია ხსენებული
რი ხარისხობანი მწკრივის ნაშთის შეფასება.

C. Chitaladze

INVESTIGATION OF THE REGULAR MOTION OF A BODY HAVING
VARIABLE MASS IN THE NEWTONIAN GRAVITATIONAL FIELD
WITH TWO FIXED CENTRES

Summary

A differential equation of the regular motion of a body with variable mass is considered in the newtonian gravitational field with two fixed centres. It is assumed that this mass is an analytic function of the given segment of time. With the help of the results of J. Steffensen and N. Magnaradze the solution of the above equation is constructed in the form of the power time series which is convergent on a certain segment. For the coefficients of this power series the recurrence relations are obtained, which are convenient for computing on modern computers. The estimation of the remainders of this power series is given.

РЕЗЮМЕ

УДК 517.9

Некоторые краевые задачи аналитических функций и их применения в теории упругости. Е.И.Оболашвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

Для некоторых областей, разрезанных вдоль конечного числа отрезков прямой или дуг окружности, строится эффективное решение задачи Римана-Гильберта. Затем дается решение одной смешанной задачи для упругой полуплоскости, разрезанной вдоль отрезков прямой или дуг окружности. Библиография 9 назв.

УДК 517.54

Об одной теореме типа Нетера для нескольких неизвестных функций. Г.Н.Александрия. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

Предлагается простой способ доказательства теоремы типа Нетера об индексах внутренних граничных задач со сдвигом как для аналитических, так и для обобщенных аналитических функций.

УДК 539.03

Деформация пластин с несимметричными криволинейными ребрами переменной жесткости. И.А.Зоненашвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

Рассматривается изотропная пластинка, срединная плоскость которой занимает область, отображаемую на круг при помощи полиномов. Вдоль границы пластинка несимметрично подкреплена ребром переменной жесткости. Методом Н.И.Мухелишвили в сочетании с методом коллокации исследовано влияние ребер жесткости на упругое равновесие пластинки. Рассмотрены частные примеры. Предлагаются рекомендации для увеличения прочности конструкции, снижения максимальных напряжений, а также концентраций напряжений около отверстий. Библ. 7 назв.

УДК 539.3.01

Плоская контактная задача при наличии сил трения. Л.Г.Доборджигинидзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981

В работе исследована плоская контактная задача классической теории упругости, когда в круговое отверстие, проделанное в бесконечном упругом теле, вложена круглая упругая

шайба (вообще говоря, из другого материала) того же радиуса.

Задача приведена к сингулярному интегральному уравнению относительно искомого нормального давления под шайбой. Для решения полученного уравнения строится приближенный алгоритм. Результаты вычислений представлены в численной форме. Библ. 3 назв.

УДК 517.958

Решение некоторых граничных задач для обобщенного потенциального вектора. Л.А.Гоголаури. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

Для пространственного аналога обобщенной системы Коши-Римана даны эффективные решения некоторых граничных задач (типа Дирихле и смешанного типа) для полупространства и бесконечного пространства, разрезанного вдоль полуплоскости. Библ. 5 назв.

УДК 539.3

Об одной задаче анизотропной пластинки с упругим креплением. Г.Т.Жоржолиани. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

В задаче об анизотропной пластинке с эллиптическим от-



вертием и усиливающим пластинку прямолинейным ребром жесткости, построено сингулярное интегральное уравнение первого рода относительно неизвестных контактных напряжений под стрингером. Библиография. 4 назв.

УДК 53

О совместном обтекании эллиптического и кругового цилиндров идеальной несжимаемой жидкостью. Н.Н. Патарая. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981

Применяется обобщенный вариационный метод к решению задачи совместного обтекания эллиптического и кругового цилиндров идеальной несжимаемой жидкостью. Библиография. 3 назв.

УДК 532

О некоторых решениях задач движения вязкой жидкости вблизи критической точки. Дж.В. Шарикадзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

Методом функций Грина и последовательными приближениями решены следующие задачи течения вязкой жидкости вблизи

критической точки; плоская стационарная задача, плоская нестационарная задача, пространственная нестационарная задача и общая нестационарная плоская задача. Библ. 3 назв.

УДК 532.546

Применение метода срачиваемых асимптотических разложений к решению задач нелинейной фильтрации. В.М.Ентов, Т.А.Малахова, М.Г.Одишария. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

В работе методом срачиваемых асимптотических разложений решен ряд задач нелинейной фильтрации. Рассматривались два закона сопротивления: с предельным градиентом давления и двухзвенный закон. Решения задач даны в виде графиков и таблиц. Библ. 9 назв. Табл.3. Рис.10.

УДК 538.4

О некоторых задачах свободной и вынужденной конвекции сжимаемой переменного проводящей жидкости. Л.Г.Азмайпарашвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

Изучены некоторые задачи об обтекании бесконечной пористой пластины сжимаемой жидкостью, проводимость которой

выражается экспоненциальным и степенным законами при наличии магнитного поля. Найдены несколько точных и приближенных решений этих задач, изучены влияния магнитного поля, разности температур, числа Прандтля и переменной проводимости на характеристики течения. Библ. 5 назв. Табл.3.

УДК 517.838

Фредгольмовские аналитические множества и ветвление решений нелинейных уравнений. Г.Н.Химшиашвили. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

Доказывается, что фредгольмовские аналитические множества, рассматриваемые как банаховы аналитические пространства в смысле А.Дуади, локально изоморфны конечномерным модельным аналитическим пространствам. С помощью этого результата определяется и изучается локальная кратность комплексно-аналитического фредгольмовского оператора индекса нуль. Установлено, что число малых решений уравнения с таким оператором, зависящим от параметра, совпадает с локальной кратностью. Для правильных операторов положительного индекса описано пересечение множества корней с гиперплоскостями общего положения коразмерности, равной индексу.

В вещественном случае имеют место аналогичные результаты по модулю 2. Кроме того, для комплексно-аналитического отображения доказана теорема о неподвижной точке типа тео-



ремы Шаудера, но без предположения выпуклости области определения. Библ. 9 назв.

УДК 52

О релятивистском эффекте при движении многих тел с переменными массами в постньютоновом гравитационном поле. Н.Г.Магнарадзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218,1981.

Рассматривается система дифференциальных уравнений регулярного движения многих тел с переменными массами с учетом релятивистских эффектов. Предполагается, что массы тел и коэффициент гравитации являются аналитическими функциями на заданном сегменте времени. С помощью обобщения метода И. Стеффенсена и применяя метод теории возмущений, построены решения указанной и вспомогательной систем уравнений в виде степенных рядов по времени, сходящихся на определенном сегменте. Для коэффициентов этих рядов устанавливаются рекуррентные соотношения, очень удобные для их вычисления на современных вычислительных машинах. Даны оценки для остаточных членов упомянутых рядов и релятивистского эффекта. Библ. 25 назв.

УДК 52

Исследование движения тела переменной массы в ньютоновом гравитационном поле с двумя неподвижными центрами.

Ц.Г.Читаладзе. Труды Тбилисского университета. Математика. Механика. Астрономия. 218, 1981.

Рассматривается дифференциальное уравнение регулярного движения тела с переменной массой в ньютоновом гравитационном поле с двумя неподвижными центрами. Предполагается, что масса тела является аналитической функцией на заданном сегменте. Пользуясь результатами И.Стеффенсена и Н.Г.Магнарадзе, строится решение указанного уравнения в виде степенного ряда, сходящегося на определенном сегменте. Для коэффициентов этого ряда устанавливаются рекуррентные соотношения, очень удобные для их вычисления на современных вычислительных машинах. Дана оценка остаточного члена упомянутого ряда. Библ.

7 назв.

Академик Н.И.Мусхелишвили	7
Е.И.Оболашвили. Некоторые краевые задачи аналитических функций и их применения в теории упругости	14
Г.Н.Александрия. Об одной теореме типа Нетера для нескольких неизвестных функций	31
И.А.Зоненашвили. Деформация пластины с несимметричным криволинейным ребром переменной жесткости	33
И.Г.Доборджинидзе. Плоская контактная задача при наличии сил трения	45
И.А.Гоголаури. Решение некоторых граничных задач для обобщенного потенциального вектора	54
Г.Т.Жоржолани. Об одной задаче анизотропной пластинки с упругим креплением	61
Н.Н.Патарая. О совместном обтекании эллиптического и кругового цилиндров идеальной несжимаемой жидкостью	74
Д.В.Шарикадзе. О некоторых решениях задач движения вязкой жидкости вблизи критической точки	87
В.М.Ентов, Т.А.Малахова, М.Г.Одишария. Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к решению задач нелинейной фильтрации	106
И.Г.Азмаишарашвили. О некоторых задачах свободной и вынужденной конвекции сжимаемой переменнo-проводящей жидкости	145
Г.Н.Химшиашвили. Фредгольмовские аналитические множества и ветвление решений нелинейных уравнений	159
Н.Г.Магнарадзе. О релятивистском эффекте при движении многих тел с переменными массами в пост-ньютоновом гравитационном поле	183
Ц.Г.Читаладзе. Исследование движения тела переменной массы в ньютоновом гравитационном поле с двумя неподвижными центрами	217
Рефераты	228



C O N T E N T S

Academician N.Muskhelishvili	7
E.Obolashvili, Some boundary value problems of analytic functions and their applications	24
G.Aleksandria, On a Noether-type theorem for several unknown functions	32
I.Zonenashvili, Deformation of plates with asymmetric curvilinear ribs of variable rigidity	44
I.Doborjginidze, Plane contact problem in the presence of frictional forces	53
I.Gogolauri, Solution of some boundary value problems for the generalized potential vector	60
G.Zhorzholiani, On one problem of anisotropic plate with elastic strengthening	73
N.Patarais, On the joint flow-around of elliptical and circular cylinders by an ideal incompressible liquid	86
J.Sharikadze, On the solution of some problems of the motion of a viscous fluid near the stagnation point	105
V.Entov, T.Malekhova, M.Odisharia, Application of the method of joined asymptotic expansions to the solution of nonlinear filtration problems	137
I.Azmaiparashvili, On some problems of the free and forced convection of a compressible variable-conductivity	158
G.Himshlashvili, Fredholm analytic sets and branching of solutions of nonlinear equations	182
N.Magnaradze, On the relativistic effect of regular motion of bodies having variable masses in the post-newtonian gravitational field	215



04705740
02:010933

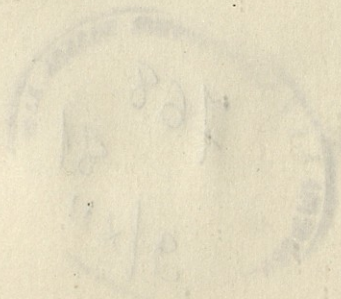
C.Chitaladze, Investigation of the regular motion of a body having
 variable mass in the newtonian gravitational field with
 two fixed centres 227

Precises 228

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆ

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԿՈՒՆԱԿԱՆ ԿՈՄԻՏԵ
 ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԿՈՒՆԱԿԱՆ ԿՈՄԻՏԵ
 ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԿՈՒՆԱԿԱՆ ԿՈՄԻՏԵ

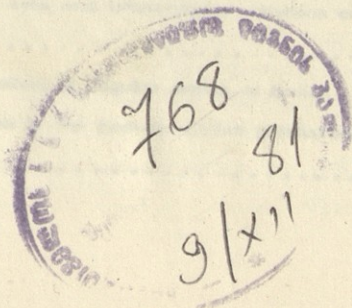
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԿՈՒՆԱԿԱՆ ԿՈՄԻՏԵ
 ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԿՈՒՆԱԿԱՆ ԿՈՄԻՏԵ
 ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԿՈՒՆԱԿԱՆ ԿՈՄԻՏԵ
 ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԿՈՒՆԱԿԱՆ ԿՈՄԻՏԵ
 ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳՐԱԴԱՐԱՆԻ ԿՈՒՆԱԿԱՆ ԿՈՄԻՏԵ



Редактор издательства Л.Абушвили

Сдано в производство 1.06.81. Подписано в печать 18.05.81.
УЭ 05847. Бумага 60x84. Усл.печ.л.15. Уч.-изд.л. 8,78.
Тираж 300. Заказ 2109 Цена 1 руб. 30 коп.

Издательство Тбилисского университета,
Тбилиси, 380028, пр.И.Чавчавадзе, 14,
თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა,
თბილისი, 380028, ი.ჭავჭავაძის პროსპექტი, 14
Типография АН ГССР, Тбилиси, 380060,
ул.Кутузова, 19.
საქ.სსრ მეცნიერებათა აკადემიის სტამბა,
თბილისი, 380060, კუტუზოვის 19



86-81

81-768



中華民國國家圖書館
2022年10月33日